



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что

$$ab \geq 2^2 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$
$$bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16}$$
$$ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

2, 3, 5 - попарно  
взаимно-просты

$$(abc)^2 \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{16} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$
$$= 2^{34} \cdot 3^{13} \cdot 5^{25}$$

т.е.

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{\frac{13}{2}} \cdot 5^{\frac{25}{2}}$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$ , то наименьшее произведение  
такого натурального числа, множителем  
которого имеют натуральные степени!

$$\left\lceil \frac{13}{2} \right\rceil + 1 = 22$$

$$\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil + 1 = 38$$

$$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

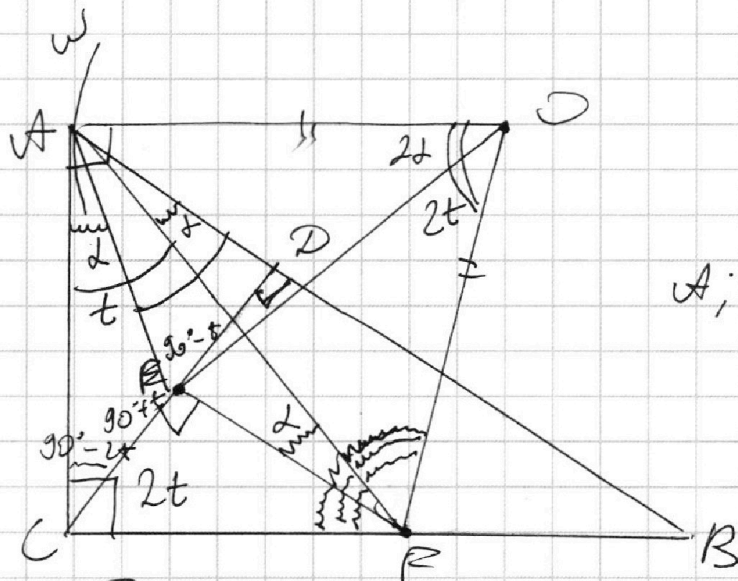
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано

CD - высота

A, E, F - на осп ω с центром O

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

EF || AB

Найти

$$\frac{S(ACD)}{S(CBF)}$$

Доказать

1) Пусть  $AB = 13x$

$BD = 10x$

Тогда  $AD = 13x - 10x = 3x$

2) Т.к. окр ω касается AC, в точке A,

то  $AO = R$ ;  $AO \perp AC$ ,  $\angle C = 90^\circ$

Значит,  $AO \parallel CB$

3)  $EO = OF = AO$  - как радиусы, AF - диаметр

4) Пусть  $\angle CAE = \alpha$

$\angle AFE = \alpha$  (по д-ву угла между касат. и хордой)

$\angle AOE$  - центральный,  $\angle AOE = 2\alpha$

5) Пусть  $\angle CAF = t$ , тогда,

$\angle ADE = 2t$  (по д-ву угла между касательной и хордой)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



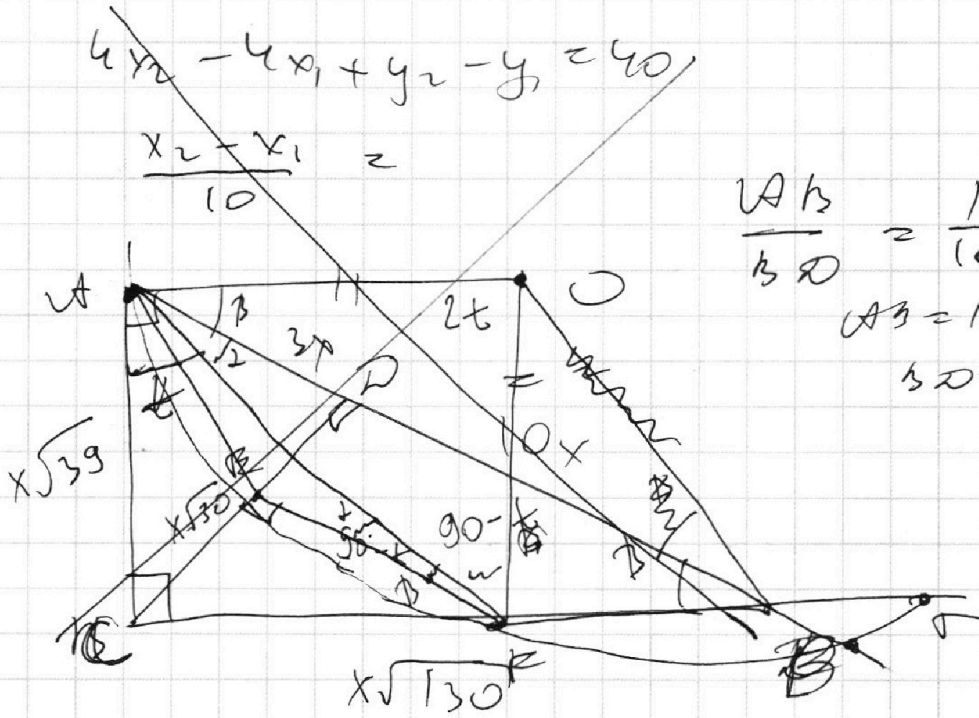
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$\frac{x_2 - x_1}{10} = z$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$AB = 13x$$

$$BD = 10x$$



$\angle ACD = 90^\circ$ ,  $\angle ARD = \frac{140^\circ - 2t}{2} = 90^\circ - t$   
 $\angle CFA = 90^\circ - t$   $\triangle ACF$  - прямоугольный.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ так как } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$$

$$2 \arccos(\sin x) = 4x$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = \sin x \\ 0 \leq 2x \leq \pi \\ \sin x = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = 0 \\ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \Rightarrow t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Ответ } x = \frac{\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O; L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$L: \frac{1}{3a}x + y - \frac{7b}{3a} = 0 \quad ? O(0; 0);$$

Вспомогательная прямая  $L$   
имеет нормальный вектор  
такого же угла наклона,  
тогда,  $\frac{1}{3a} > 0$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{|-\frac{7b}{3a}|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}} &= 3 \\ \frac{|-\frac{7}{3a} - \frac{7b}{3a}|}{\sqrt{\frac{1+9a^2}{9a^2}}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{7b}{3a} < 0; \quad -\frac{7b}{3a} > 0$$

$$\text{При этом, } -\frac{7b}{3a} - \frac{7}{3a} > 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-\frac{7b}{3a} \cdot 3a}{\sqrt{1+9a^2}} &= 3 \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 3 \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 7 &= \sqrt{1+9a^2} \\ \frac{-7-7b}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4b &= 9a^2 \\ \frac{-7(1+b)}{\sqrt{1+9a^2}} &= 2 \end{aligned} \right.$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \pm \frac{4}{\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ a &> 0 \end{aligned} \right.$$

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Аналогичные рассуждения  
для  $\frac{1}{3a} < 0$ , тогда  $a < 0$ ,

$$\text{тогда } \forall a: a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \quad \exists b, \text{ то}$$

система будет 4 различными решениями

$$\text{Ответ } a \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

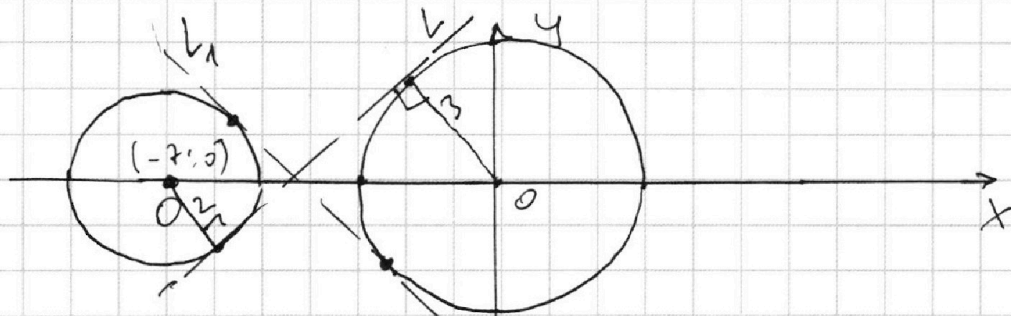
$$\begin{cases} y = \frac{7b}{3a} - \frac{1}{3a}x & (3) \\ [(x+7)^2 + y^2 = 2^2 & (1) \\ (x^2 + y^2 = 3^2 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что графики уравнений (1) и (2)

задают окружности  $\omega$  и  $\Omega$  с центрами  $O(-7; 0)$   
и  $O_1(0; 0)$  и радиусами  $r=2$   $r_1=3$  соответственно

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$  — задает множество прямых

Когда данная прямая будет иметь 4  
решения тогда и только тогда когда  
графики (1) (2) (3) функции будут пересекаться  
по 4 точкам



Заметим, что от параметра  $b$  зависит положение  
прямой  $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$  по оси  $Ox$ .

Когда рассмотрим крайнее положение прямой  
когда она вместе будет касательной

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} \log_7 6x + \log_7 y &= 0 \\ x &\neq \frac{1}{6} \\ y &\neq 1 \end{aligned} \right\} \log_7 6xy = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ,  $\frac{1}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_7^4 6x - 2 \log_6 x^7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log y^7 = \log_y 2 (7^5) - 4 \end{cases}$$

Положим  $t = \log_7 6x$

$h = \log_7 y$

Заметим, что  $x, y > 0, x \neq \frac{1}{6}, y \neq 7$  (3)

$$\begin{cases} t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \\ h^4 + \frac{6}{h} = \frac{5}{2h} - 4 \end{cases}$$

$$\log_{36x^2} 343 = \log_{(6x)^2} 343 = \frac{3}{2} \log_{(6x)} 7 = \frac{3}{2} \log_6 x^7$$

$$\begin{cases} \frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0 & (1) \\ \frac{2h^5 + 8h + 7}{2h} = 0 & (2) \end{cases}$$

Сложим (1) и (2) используя условие (3)

$$2t^5 + 2h^5 + 8t + 8h = 0$$

$$2(t^5 + h^5) + 8(t+h) = 0$$

$$(t^5 + h^5) + 4(t+h) = 0$$

$$\begin{cases} (t+h)(t^4 - t^3h + t^2h^2 - th^3 + h^4 + 4) = 0 \\ t \neq 0; h \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+h)(t^3(t-h) - h^3(t-h) + t^2h^2 + 4) = 0 \\ t \neq 0; h \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что  $(t-h)^2(t^2 + th + h^2) + t^2h^2 + 4 > 0$ ,  
т.к.  $t^2h^2 \geq 0, t^2h^2 + 4 \geq 4$

$$(t-h)^2 \geq 0; t^2 + h^2 \geq -2th$$

Поэтому,  $t+h=0, t \neq 0, h \neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$NT = KT$  (как отрезки касательных к  
одной точке,

т.е.  $NT \perp BC$ ;  $KT \perp BC \Rightarrow \angle NTK$  - искомый

где двугранного угла

5)  $\triangle OKT$  - прямоугол., т.к.  $OK \perp (ABC)$ ;  
 $KT \subset (ABC)$   
 $OK = 4$  (по условию)

$$KT = \frac{32}{5}; \quad \angle = \angle KTO$$

$$\operatorname{tg} \angle = \frac{4}{\frac{32}{5}} = \frac{5}{8}$$

т.к.  $K, O, N, T$  лежат в одной плоскости,  
 $\triangle ONT = \triangle KOT$  (по катету и общей  
гипотенузе)

Поэтому,  $\angle KTN = 2\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$
$$= \frac{2 \cdot \frac{5}{8}}{1 - 2 \cdot \frac{25}{64}} = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{25}{32}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{32}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{7} = \frac{40}{7}$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg} \frac{40}{7}$$

$$\angle KTN = 2\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$$

Ответ а) 1350

б)  $2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для медиан  $BB_1$  и  $CC_1$ ,

$$(2BB_1)^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$$

$$(2CC_1)^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$$

$$(2BB_1)^2 = 2(260) - 340$$

$$(2CC_1)^2 = 2(440) - 160$$

$$(2BB_1)^2 = 180 \quad BB_1^2 = 45 \quad BB_1 = 3\sqrt{5}$$

$$(2CC_1)^2 = 720 \quad CC_1^2 = 180 \quad CC_1 = 6\sqrt{5}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 15 \cdot 18 \cdot 5 = 1350$$

б) 1) Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются  $(SBC)$  и  $(AKC)$ , то

$NS = 3 = SL$  (как отрезки касательных)

Тогда  $AL = 10 - 3 = 7$

$$AL = AK = 7 \text{ км} = 3; \quad KA_1 = 8$$

2) Д.а. существует перпендикуляр из точки  $K$  на  $BC$ , тогда:  $KT \perp BC$

Д.а.  $(OK \perp (AKC); \quad KT = Pr_{(ABC)} O)$

$\Rightarrow OT \perp BC$ ; (по  $\nabla T \Gamma$ )<sup>(ABC)</sup>

3)  $\triangle KA_1T \sim \triangle AA_1H$  (по двум углам)

Т.е.  $\frac{KT}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{15}$ ;  $\angle KTA_1 = \angle HAA_1 = 90^\circ$ ,  
 $\triangle AA_1H$  - острый

$$KT = \frac{8}{15} \cdot 12 = \frac{32}{5}$$

4) Если  $(OT \perp BC; \quad BC \subset (SBC); \quad ON \perp (SBC)) \Rightarrow$

$\Rightarrow NT \perp BC$ ;  $NT$  и  $KT$  - отрезки касательных

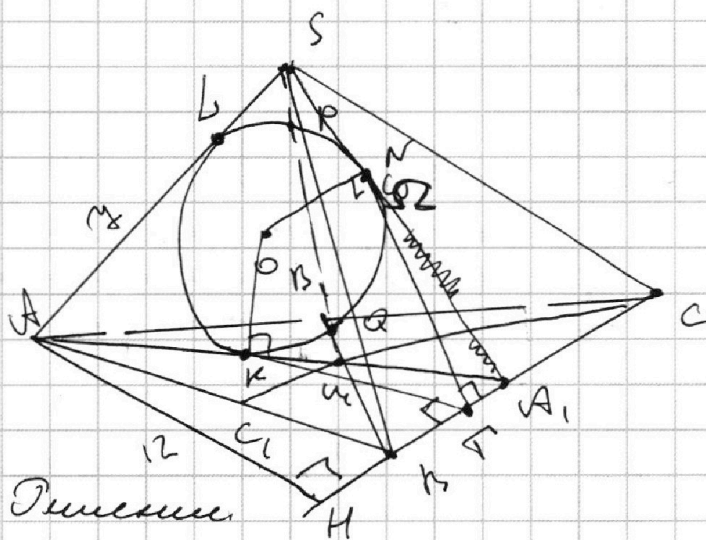
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано

$$BC \subset AS = 10$$

Решение

1)  $LS$  и  $KM$  - касательные к  $\Omega$ , где  
 $SP = MQ$  (по условию), то  $S'Q = MP$

2) То же касательные  
 $KM^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = LS^2$   
 $KM = LS$

$AK = AL$  (как касательные из одной точки)

Тогда  $AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$   
 $AM = 10$

Тогда  $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 15$  (по д-лу медианы)

3) Д.и.  $AH$  - высота;  $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ ;  $AH = 12$

$\triangle AHA_1$ : по т. Пифагора:

$$HA_1 = \sqrt{225 - 144} = 9$$

Значит,  $\triangle ABC$  - прямоугольный,  $HC = 9 + 5 = 14$

4)  $\triangle AHC$  (по т. Пифагора):

$$AC^2 = 144 + 196 = 340$$

5)  $(2AA_1)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

$$1000 = 600 + 2AB^2,$$

$$2AB^2 = 160$$

Тогда, где медианы  $BB_1$  и  $CC_1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3(\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x)) + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3 \arcsin(\sin x) + 3 \arccos(\sin x) + x$$

$$2 \arccos(\sin x) = 4x + y \in \mathbb{Z} + 2\pi$$

$$\arccos(\sin x) = 2x$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2x \\ -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq n \leq 1 \quad n = \{-1; 0; 1\}$$

$$-\pi \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq \frac{5}{3} + 2n \leq 1$$

$$-\frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{6} \leq n \leq \frac{1}{6}$$

$$n = 0$$

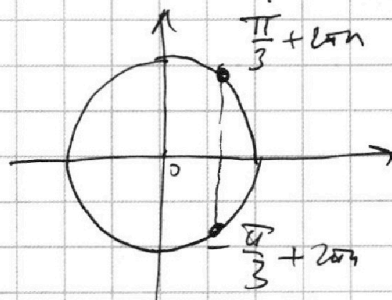
$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \pi$$

$$-1 \leq -\frac{1}{3} + 2n \leq 1$$

$$-\frac{2}{3} \leq 2n \leq \frac{4}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{2}{3} \quad n = 0$$

Ответ:  $x =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (\log_7 6x)^4 - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ (\log_7 y)^4 + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$x > 0, y > 0, \quad x \neq \frac{1}{6}, \quad y \neq 1$$

Пусть  $t = \log_7 6x$

$$t^4 - 2 \frac{1}{t} = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$$

$$t^4 - 2 \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \log \frac{1}{t} - 4 \quad \times \frac{6}{7}$$

$$t^4 - \frac{2}{t} - \frac{3}{2t} + 4 = 0$$

$$2(h^5 + t^5) + 8(h+t) = 0$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$$

$$2(h+t)(h^4 + \dots)$$

$$\frac{2t^5 - 7 + 8t}{2t} = 0$$

$$D = 16 + 14$$

$$\frac{2t^5 + 8t - 7}{2t} = 0$$

$$\frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 2 \log_{6x} 7 - \frac{3}{2} \log_{6x} 7 =$$

$$h = \log_7 3 = -2 \frac{3}{2} \log_{6x} 7 = \frac{-7}{2}$$

$$\log_7 6x = \log_7 x + \log_7 6$$

$$h^4 + 6 \frac{1}{h} = \frac{5}{2} \frac{1}{h} - 4$$

$$\frac{(\log_7 6x)^4 - \frac{2}{\log_7 6x}}{\log_7^3(6x)} = \frac{1}{\log_7^3(6x)} - 4$$

$$\frac{2h^5 + 7 + 8h}{2h} = 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{3}{2}$$

$$\log_7 x + \log_7 y = \log_7 (xy)$$

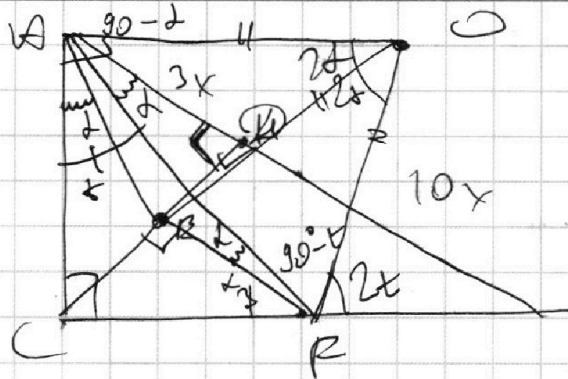
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CB = \sqrt{30} \cdot x$$

$$CB = x\sqrt{130}$$

$$CB = x\sqrt{30}$$

$$AC = x\sqrt{39}$$

$$90^\circ - 2\alpha = \beta + \gamma$$

$$\gamma = 90^\circ - 2\alpha - \beta$$

$$\sin(90^\circ - \beta - \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{x\sqrt{30}}{x\sqrt{130}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos(\sin x)$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \arcsin x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3 \arccos(\sin x) + 3 \arcsin(\sin x) + \frac{\pi}{2}$$

$$2 \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \sin x$$

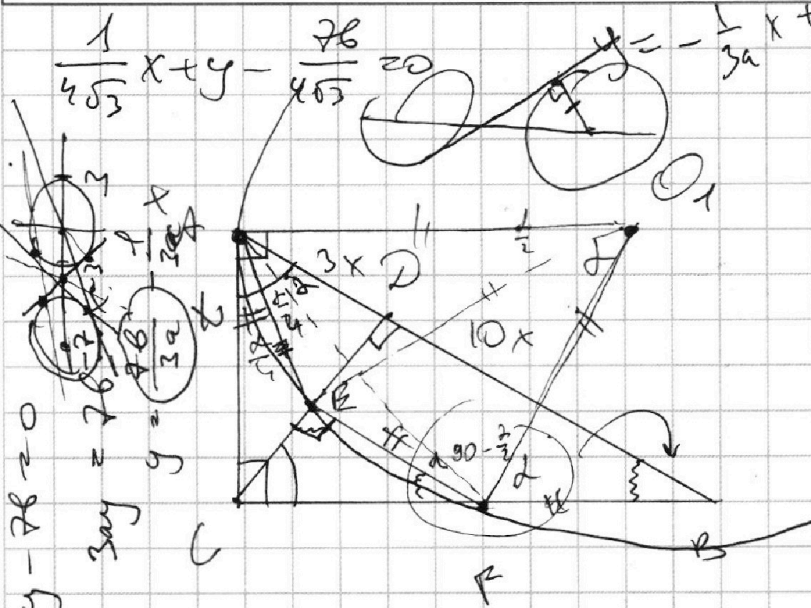
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{2b}{3a} \quad (ax + by + c)$$

$EF \parallel AB$

~~$\frac{AB}{EF}$~~

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{S(ACD)}{S(CBE)}$$

1)  $\triangle CBE \sim \triangle CDB$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB} \quad CB^2 = AB \cdot DB$$

$$CB = x\sqrt{30}$$

$13x : 10x$

$AB = 13x$

$BD = 10x$

$AD = 3x$

$CD^2 = 30x^2$

$CD = x\sqrt{30}$

$$\frac{S(CDB)}{S(ACB)} = \frac{10x^2\sqrt{30}}{3x^2\sqrt{30}} = \frac{10}{3}$$

$$B + \frac{3}{2}\alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$$

$$\sin\left(3 \cdot \left(\frac{1}{2}\alpha\right)\right) = 3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{3\alpha}{2}$$

$\angle CAB = \frac{3}{2}\alpha$

$$\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{CD}{AC}$$

$$3\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

$BD = \tan\frac{5\alpha}{4} \cdot 3x$

$CB = x\sqrt{30} = \tan\frac{5\alpha}{4} \cdot 3x$

$\tan\frac{5\alpha}{4} = \frac{BD}{3x}$

$x + 3ay - 2b = 0$

$3ay = 2b - x$

$y = \frac{2b - x}{3a}$

$x + 3\left(\frac{2b - x}{3a}\right) - 2b = 0$

$x + 2b - x - 6b = 0$

$-4b = 0$



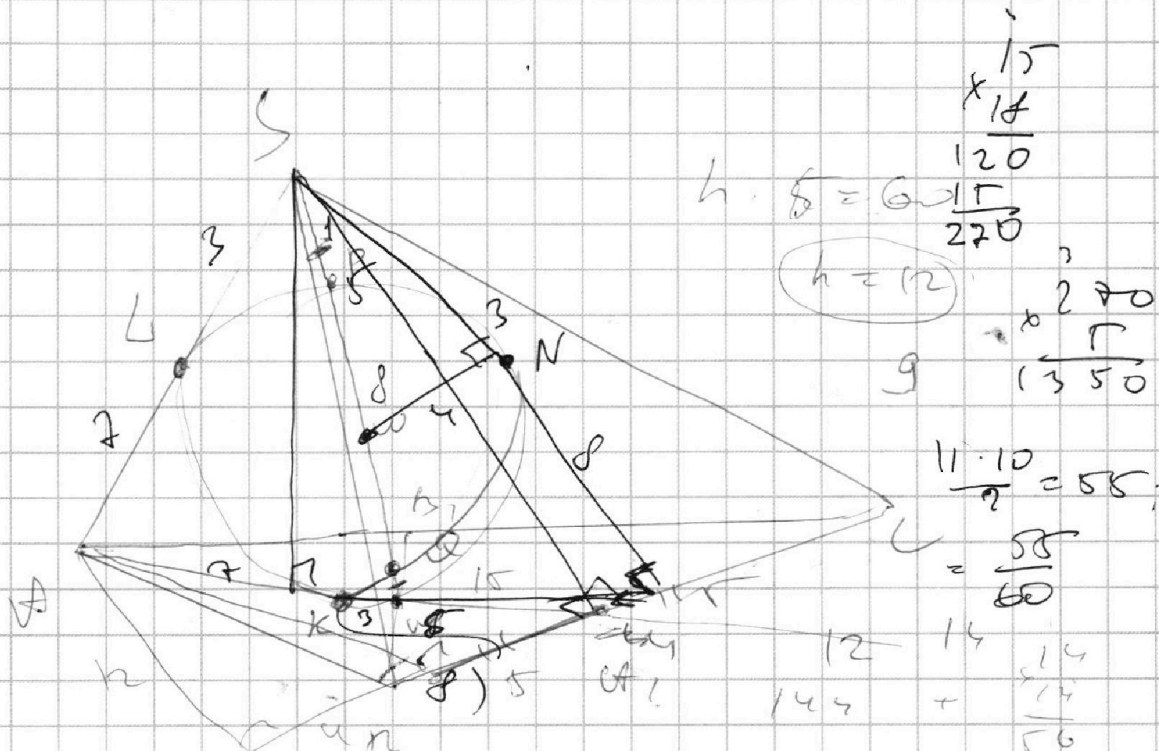
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$h \cdot \frac{1}{2} = \frac{120}{270}$$

$$h = 12$$

$$g = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

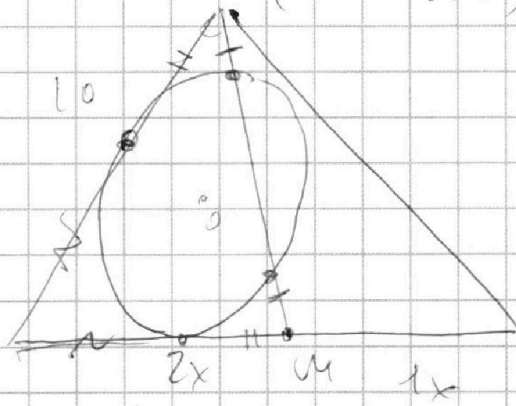
$$12 \cdot 14 = 144$$

$$144 + \frac{14}{56} = 196$$

$$196 + 144 = 340$$

$$30^2 + 10^2 = 2(AC^2 + AB^2) \Rightarrow S_{ABC} = 60$$

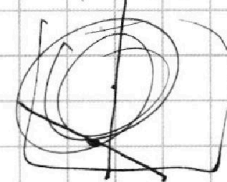
$$S_{A} = BC = 10$$



$$AM = 10$$

$$\frac{AM}{AS} = \frac{2}{3}$$

$$AA_1 = 15$$



$$(2r_{B_1})^2 = 2(AB^2 + 100) - AC^2$$

$$(2r_{C_1})^2 = 2(AC^2 + 100) - AB^2$$

$$4r_{B_1}^2 + 4r_{C_1}^2 = AB^2 + AC^2 + 400$$

$$AB^2 + AC^2 = 225$$

$$(AB_1 + CC_1)^2 = AB_1^2 + CC_1^2 + 2AB_1 \cdot CC_1$$