



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть стоимость k килограмма 2 k $a - x$, k $b - y$, k $c - z$. Тогда у нас следует, что

$$\begin{cases} x + y \geq 6 & (1) \\ y + z \geq 14 & (2) \\ x + z \geq 16 & (3) \end{cases} (*)$$

~~Сумма~~ Сумма, (1)+(2)+(3): $2(x+y+z) \geq 36$
 $x+y+z \geq 18$

Заметим, что при миним. об.с $x+y+z$ - наим. возм. (смет. k хозг. 2 не вылезет на деньги на ост. z ша, если $x+y$ не наим. возм., мы можем добавить хотя бы на 2*, при этом сист-ма (*) (не-ген. на 2) будет выполнят. (* экв. наим. возм. $x+y+z$, на ост. у нас это не увеличит, а об.с будет меньше).

При $x=4, y=2, z=12$ (*) выполнят. и $x+y+z=18$ - наим. возм. \Rightarrow $x+y+z=18$ действ. наим. возм.

Рассм. аналогичные сист-мы для 3 и 5:

Для 3 (k -ст. хозг. 3 a, b, c)	Для 5 (k -ст. хозг. 5 a, b, c)
$\begin{cases} x+y \geq 13 & 2(x+y+z) \geq 59 \\ y+z \geq 21 & x+y+z \geq 29,5 \\ x+z \geq 25 & x+y+z \geq 30 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y \geq 11 & 2(x+y+z) \geq 82 \\ x+z \geq 13 & x+y+z \geq 26 \\ x+z \geq 28 \end{cases}$

При $x=9, y=5, z=16$ сист-ма выполнят. и $x+y+z=30$ - наим. возм. z -м.

Заметим, что x, y, z - целые неотриц. При $x+y+z=26$ $x+y=11 \Rightarrow x \leq 11$
 $x+y=13 \Rightarrow y \leq 13$
 $\Rightarrow x+z \leq 24 < 28$ - не выполнят сист-ма

~~$x+z \geq 28 \Rightarrow$ если бы у нас $x \geq 14$ или $y \geq 14$ или $z \geq 14$ ($x < 14, y < 14 \Rightarrow x+y < 28$) и для нас др. пер-во ($x+y+z \geq 28$) заведомо выполнят. ($14 > 13 > 11$). Для второго метода (методом x) $x+y \geq k \Rightarrow y \geq k-x$ $x+y+z \geq x+y \geq 28 \Rightarrow 28$ - наим. возм. z -м. При $x=y=14, z=0$ сист-ма выполнят. и наим. возм. z -м.~~

Сумма, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$. Достигн. при $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$
 $b = 2^2 \cdot 3^{15}$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

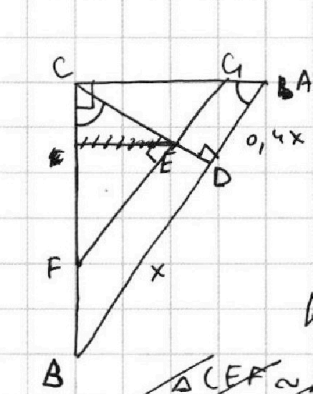
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

$\angle ECF = 90^\circ - \angle DCA = \angle DAC$
 $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$ (по св-ву соответ. при $EF \parallel AB$)
 Сл-но, $\triangle CEF \sim \triangle ADC$ по 2-м угл.
 Сл-но, их площади соотнос как квадраты соответ. сторон (по теор.) k

$$k = \frac{AD}{CE}$$

~~$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{FE}{AD} \Rightarrow CE = \frac{CD \cdot FE}{AD} \Rightarrow \frac{1}{CE} = \frac{AD}{CD \cdot FE}$~~
 ~~$\Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{FE}{AD} \Rightarrow CE = \frac{CD \cdot FE}{AD} \Rightarrow \frac{1}{CE} = \frac{AD}{CD \cdot FE}$~~

Пусть $FE \cap AC = G$. По теор. о перес. хорд отгол. окруж. $GA^2 = GE \cdot GF$

Пусть $AD = x \Rightarrow AC = 1,4x$, $BD = 1,4x \Rightarrow DA = AC - BD = 0,4x$. По теор. о высоте к гипотен. $CD = \sqrt{BD \cdot DA} = x \sqrt{1,4 \cdot 0,4} = x \sqrt{0,56}$

По теор. о перес. хорд. $CE : ED = CG : GA \Rightarrow CE = \frac{CG \cdot ED}{GE} = \frac{CG \cdot ED}{\sqrt{GE \cdot GF}}$

$$\cos \angle CGF = \frac{CE}{CG} = \frac{CG}{GF} \Rightarrow CG = \sqrt{CE \cdot GF} \Rightarrow CE = ED \Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD = \frac{x \sqrt{0,56}}{2}$$

$$\text{Ит.о. } k = \frac{AD}{CE} = \frac{0,4x}{\frac{x \sqrt{0,56}}{2}} = \frac{0,8}{\sqrt{0,56}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = \frac{0,64}{0,56} = \frac{64}{56} = \frac{8}{7}$$

Ответ: $\frac{8}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√3

$$\text{arccos}(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{arccos}(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - 0,2x$$

$$\text{arccos } t \in [0; \pi] \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{10} - 0,2x \geq 0 \\ \frac{9\pi}{10} - 0,2x \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,2x \leq \frac{9\pi}{10} \\ 0,2x \geq -\frac{\pi}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{9\pi}{2} \\ x \geq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos(\text{arccos}(\sin x)) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{10} - 0,2x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{10} - 0,2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \frac{9\pi}{10} - 0,2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9\pi}{10} - 0,2x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,8x = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -1,2x = -\frac{14\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{10}x = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{12}{10}x = \frac{14\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = -4\pi + 20\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 12x = 14\pi + 20\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

При этом $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow$ по серии 1 $\text{корн. } -\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$
по серии 2 $\text{корн. } \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

Проверим нек-е значения

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \text{arccos}(-1) = \pi, 10\pi = 9\pi - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(2\pi) = 0, \text{arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, 5\pi = 9\pi - 2 \cdot 2\pi$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1, \text{arccos}(1) = 0, 0 = 9\pi - 2 \cdot \frac{9\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \frac{20\pi}{3} = 9\pi - 2 \cdot \frac{7\pi}{6} = \frac{27\pi}{3} - \frac{7\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} = 9\pi - 2 \cdot \frac{17\pi}{6} = \frac{27\pi}{3} - \frac{17\pi}{3}$$

Все значения совп. реш. исход. ур-я

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; 2\pi; \frac{9\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



✓ч

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 8y + 77) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8y + 81 - 4 = 0 \end{cases}$$

Будем решать графически в ш.м. xOy

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \text{ - ур-е окр. с центром } (0; 0) \text{ и рад. } 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 \text{ - ур-е окр. с центром } (0; -9) \text{ и рад. } 2 \end{cases}$$

$5x + 6ay - b = 0$ - ур-е прямой

Прямая имеет с окр. не более 2-х общ. точек \Rightarrow с 2-ми окр. - не более 4
Она имеет ровно 4 общ. точки \Rightarrow пересекает каждую из двух данных окр.

$$5x + 6ay - b = 0$$

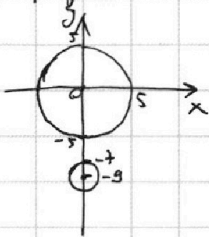
$$6ay = -5x + b$$

При $a = 0$: $-5x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{5}$ и найдем b , при котором обе окр. будут пересекать 2-х точек (или, при $b = 0$: $(0; 5), (0; -5), (0; -7), (0; -11)$)

$$\text{При } a \neq 0: y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

~~Рассм. окр. с ц.в. $(0; 0)$ и рад. 5 (длина = 10). Заметим, что если пр. пересек. окр., то она пересек. одну из осей вытупа~~

Удобрием схем-но графики:



Заметим, что пр. пересек. окр. \Leftrightarrow рассм. от центра

окр. до пр. меньше радиуса

Тогда рассм. от центров наших данных окр. до прямой

$$\text{пр.: } \rho_1 = \frac{|5 \cdot 0 + 6a \cdot 0 - b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5 \quad \& \quad \rho_2 = \frac{|5 \cdot 0 - 6a \cdot 9 - b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 2$$

$$| -b | < 5\sqrt{25 + 36a^2} \quad | -54a - b | < 2\sqrt{25 + 36a^2}$$

При нем-н a найдемся усл. $b \Leftrightarrow \begin{cases} | -b | < 5\sqrt{25 + 36a^2} \\ | -54a - b | < 2\sqrt{25 + 36a^2} \end{cases}$ имеет рещ.

$$\begin{cases} b^2 < 25(25 + 36a^2) \\ 54^2 a^2 + 108ab + b^2 < 4(25 + 36a^2) \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 25(25 + 36a^2) < 0 \\ b^2 + 108ab + 2772a^2 - 100 < 0 \end{cases}$$

Ответ: 0

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x \cdot \frac{1}{121} - 5 \quad \sqrt[5]{5} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 0,5y = \log_{11} 0,5y (11^{-1}) - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5 \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} = -\frac{13}{3} \log_{11} (0,5y) - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \frac{1}{121} + \frac{2}{3} \log_{11} x + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \frac{1}{121} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} + 5 = 0$$

Замечаем $a = \log_{11} x$, $b = \log_{11} 0,5y$

$$11^a = x, 11^b = 0,5y \Rightarrow 11^{a+b} = 0,5xy \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$

$$a^4 - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{11^a} + 5 = 0 \quad b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \quad b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0$$

Рассм. $f(x) = x^5 + 5x - \frac{16}{3} \Rightarrow a$ - корни $f(x)$, т. пересек. пр. к с Ox

$g(x) = x^5 + 5x + \frac{16}{3} \Rightarrow b$ - корни $g(x)$, т. пересек. пр. с Ox

$f'(x) = 5x^4 + 5 > 0 \Rightarrow f(x)$ - монот. \Rightarrow имеет не более 1 пересек. с Ox

При этом $f(0) = -\frac{16}{3} < 0$, $f(1) = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow b$ имеет непрерывности, пересек. Ox . Значит, у уравн. $f(x) = 0$ ровно 1 реш., т.е. существует единств.

реш. a

Заметим, что $f(-x) - f(x) = -x^5 - 5x + \frac{16}{3} = (-x)^5 + 5(-x) + \frac{16}{3} = g(-x)$

Следо, если x_0 - корни $f(x)$, то $(-x_0)$ - корни $g(x)$ и наоборот

Т.е., $g(x)$ имеет единств. корни $b = -a$ (а.к. $f(x)$ имеет ед. корни a)

Следо, единств. возм. реш. $a + b = a - a = 0$ (и оно годится.)

Следо, единств. возм. реш. $xy = 2 \cdot 11^{a+b} = 2 \cdot 11^0 = 2$

Ответ: 2

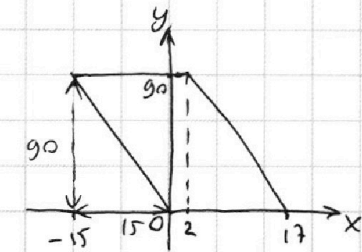
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пар.-мн ар.-пр. $y=90, y=0, y=-6x, y=-x+6 \cdot 17$
 Точка лежит внутри $\Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0; 90] \\ y \in [0; 90] \\ y \geq -6x \\ y \leq -6x + 6 \cdot 17 \end{cases} \begin{cases} y \in [0; 90] \\ 6x + y \geq 0 \\ 6x + y \leq 6 \cdot 17 \end{cases}$

Рассм. $A(x_0; y_0)$ и будем искать все целые координаты $B(x; y)$:

$$6(x-x_0) + y - y_0 = 48$$

$x - x_0 \in \mathbb{Z}, y - y_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 48 : 6 \Rightarrow y - y_0 : 6 \Rightarrow y \in [0; 90], y_0 \in [0; 90]$

$$6x - 6x_0 + y - y_0 = 48$$

$y_0 \geq -6x_0 \Rightarrow 6x - 6x_0 + y - y_0 \leq 6x + y_0 + y - y_0 = 6x + y$, т.е. $6x + y \geq 48 \Rightarrow y \geq -6x + 48$

$y_0 \leq -6x_0 + 6 \cdot 17 \Rightarrow 6x - 6x_0 + y - y_0 \geq 6x + y - y_0 - 6 \cdot 17 + y_0 = 6x + y - 6 \cdot 17$, т.е.

$$6x + y - 6 \cdot 17 \leq 48 \Rightarrow y \leq -6x + 48 + 6 \cdot 17$$

Это значит, что точка с коорд. $(x-8; y)$ также лежит в параллелеграмме. Если же в параллелеграмме лежит всякая точка с целыми коорд. с данными x и y .

Заметим, что для заданных x, y_0 $6x + y - 6x_0 - y_0 - 48 = 0$ — пр.-е пр., проходящее через точки $(x_0; y_0 + 48)$ и $(x_0 + 8; y_0)$ ($y = -6x + 6x_0 + y_0 + 48$)

Заметим, что эта пр. || двум сторонам параллельна, т.е. $\frac{48}{8} = \frac{90}{15} = 6 = -6 \Rightarrow$ она имеет внутри параллельно либо 0 точек с целыми коорд. (т.е. с целыми коорд.), либо столько же, сколько лежит на стороне, параллельной, которой она параллельна, т.е. $\frac{90}{15} = 6$ или $15 + 1 = 16$

Эта пр. имеет с параллелеграммой общие точки \Leftrightarrow пересек. Ox в точке, лежащей на отрезке $[0; 17]$

Найдем её пересек. с Ox : $6x + 0 - 6x_0 - y_0 - 48 = 0$

$$6x = 6x_0 + y_0 + 48$$

$$x = x_0 + 8 + \frac{y_0}{6}$$

Пр. имеет с Ox общие целые точки $\Leftrightarrow (x_0 + 8 + \frac{y_0}{6}) \in \{0; 1; 2; \dots; 17\}$ (т.е. явл. целым)

$6x_0 + 48 + y_0 \in \{0; 6; 12; \dots; 17 \cdot 6\}$ — кажд. из точек $A(x_0; y_0)$ удовл.

Условию даёт ровно 16 уникальных пар A, B и больше таких пар нет

Условию на x, y внутри пар. $48 \leq 6x_0 + y_0 \leq 6 \cdot 17 \Rightarrow 48 \leq 6x_0 + y_0 \leq 6 \cdot 25$

След. $6x_0 + y_0 \in \{6 \cdot 8; \dots; 6 \cdot 17\}$, т.е. $6x_0 + y_0 \in \{0; 6; \dots; 6 \cdot 9\}$

$$6x_0 + y_0 : 6 \Rightarrow y_0 : 6$$

$$x_0 + \frac{y_0}{6} \in \{0; 1; \dots; 9\}$$

Это и есть все целые точки, лежащие внутри параллельно на след. пр.:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$6x$

$N 6$

$$6x_0 + y_0 = 0$$

$$y_0 = -6x_0$$

$$6x_0 + y_0 = 6$$

$$y_0 = -6x_0 + 6$$

...

...

$$6x_0 + y_0 = 54$$

$$y_0 = 54 - 6x_0$$

} 10 пр

Эти пр также параллельны 2-м стр. картины, пересекают Ox в целых
метках на отрезке $(0; 17]$ и имеют с картиной по 16 общ. точек
 \Rightarrow всего $16 \cdot 10$ точек $A(x_0; y_0)$, лежащих на 10 пр

Значит, всего пр ~~картин~~ $160 \cdot 16 = 2560$

Ответ: ~~картин~~ 2560

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

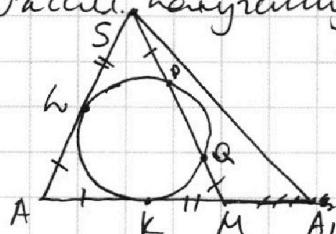
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

Рассм. сф. ω пирамиды и сфера ω , плоск. π пересек. π SA и AA_1 .
Сфера ω пересек. эту пл-ть по окр ω , причём ω будет касаться
 SA в т. L и AA_1 в т. K

Рассм. коническую пл-ть: конструируем:



$$\{SM \subset (SAA_1) \Rightarrow SM \perp \omega = \{P; Q\}$$

По теор. о степен. точки отн. окр. $SL^2 = SP \cdot SQ$

$$\text{и } MK^2 = MQ \cdot MP$$

(Эту теор. можно дог-ти, восп. св-ва угла между
кас. и хордой и подобием Δ -ков)

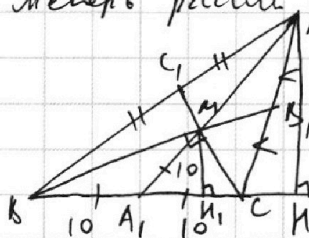
$$MQ = SP, SQ = SP + PQ = PQ + QM = MP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow SL = MK$$

По теор. об отр. кас. $AK = AL$

$$20 = SA = SL + LA = MK + KA = AM$$

По св-ву мед. $AM : MA_1 = 2 : 1 \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

Теперь рассм. ΔABC :



Нам известно, что $BC = 20 \Rightarrow BA_1 = A_1C_1 = 10$

$$AA_1 = 30; AM = 20; MA_1 = 10$$

Также $S_{\Delta ABC} = 180 = \frac{AA_1 \cdot BC}{2}$, где AA_1 — выс. к BC

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{2 \cdot 180}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

Опустим к M перп. к BC — высоту ΔBMC — MI_1 ,

Заметим, что $BA_1 = A_1C_1 = A_1M = 10$, MA_1 — мед. ΔBMC (по окр.) $\Rightarrow \Delta BMC$ — равност.

и центр. по углу $\Rightarrow S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} MI_1 \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MC$

$\Delta A_1MI_1 \sim \Delta A_1AI_1$ по 2-м углам. ($\angle AA_1I_1$ — общ., $\angle A_1I_1A_1 = 90^\circ = \angle MI_1A_1$) \Rightarrow

$$\frac{MI_1}{A_1M} = \frac{AI_1}{A_1A} \Rightarrow MI_1 = \frac{A_1M \cdot AI_1}{A_1A} = \frac{10 \cdot 18}{30} = 6$$

$$\text{Следо, } BM \cdot MC = MI_1 \cdot BC = 6 \cdot 20 = 120.$$

По теор. о св-ву мед. $BM : MD = CM : MC = 2 : 1 \Rightarrow BM = \frac{2}{3} BD, CM = \frac{2}{3} CD \Rightarrow$

$$BM \cdot CM = \frac{4}{9} BD \cdot CD = 120 \Rightarrow BD \cdot CD = \frac{120 \cdot 9}{4} = 30 \cdot 9 = 270$$

$$\text{Следо, } AA_1 \cdot BD \cdot CD = 30 \cdot 270 = 8100$$

Ответ: 8100



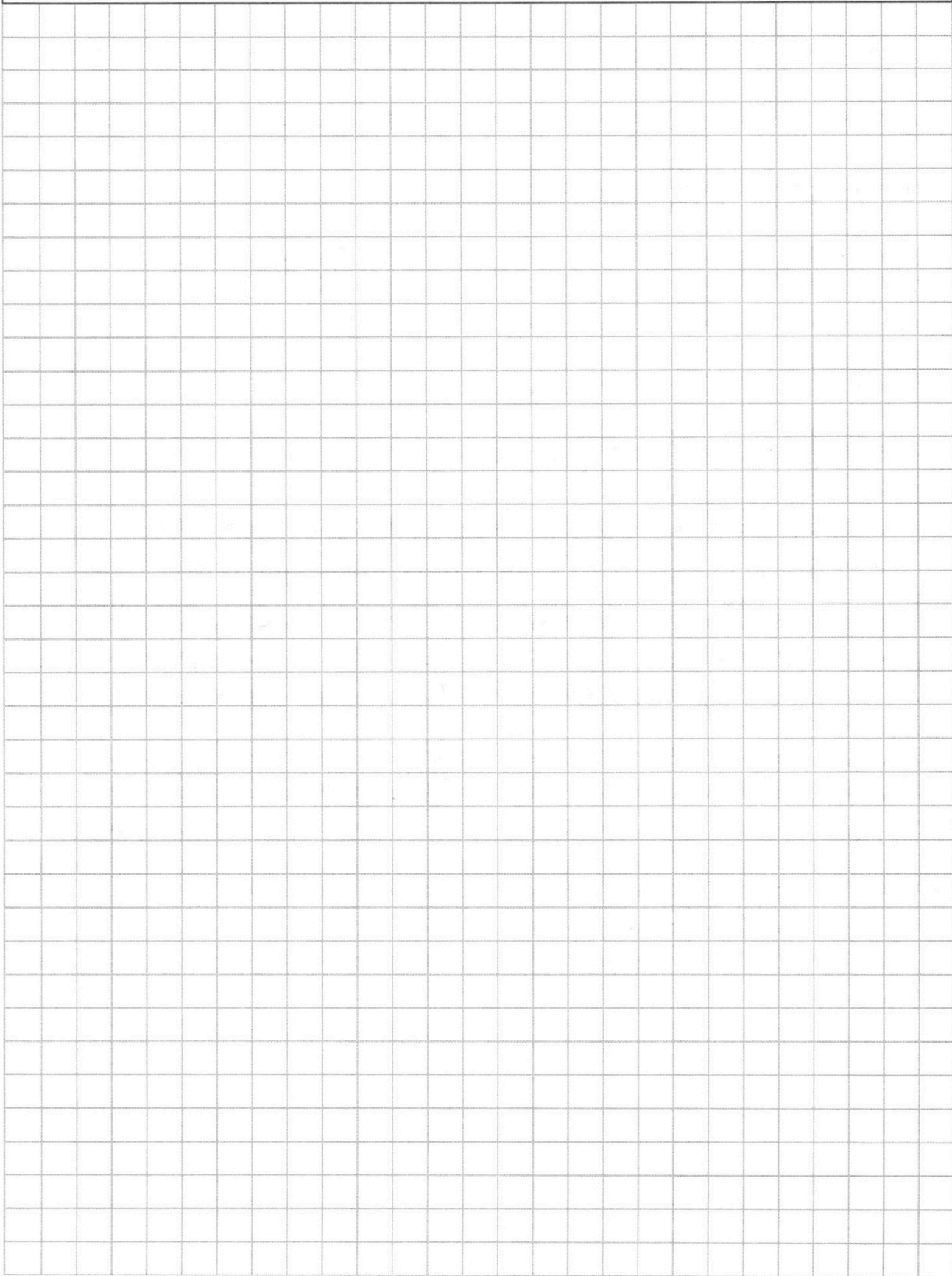
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7

8) Распи. сег. выпр. и ср. площ., проходящую $S_{\Delta A}$ и центр, сферы
(используя e_i/d), ср. вылет касательной $S_{\Delta B}$,
 $\Delta \cap (ABC) = a$ - пер. и пр.

Заметим, что

Сфера касается обеих граней куба \Rightarrow ее центр лежит на
его биссектр. плоскости

Вопрос

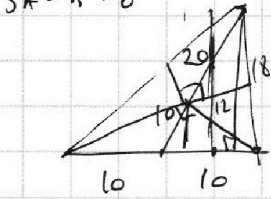
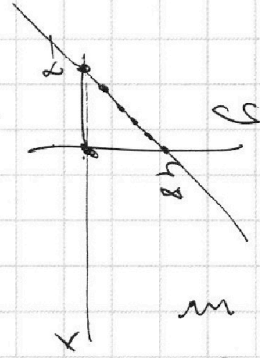
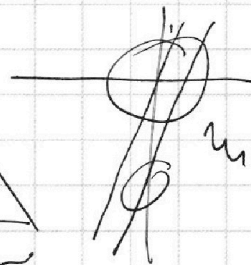
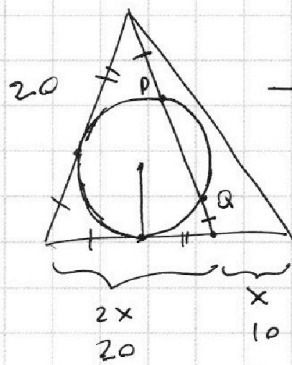
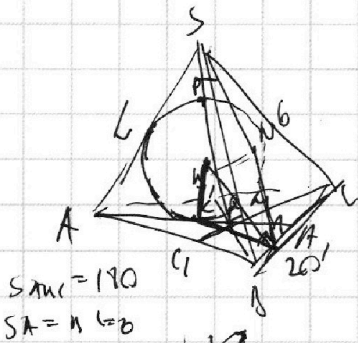
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



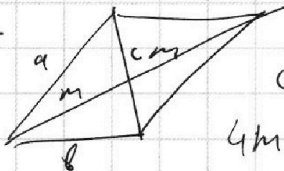
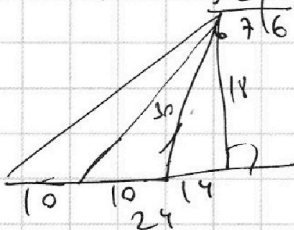
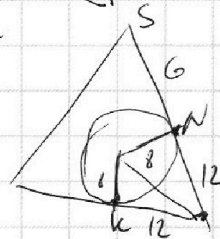
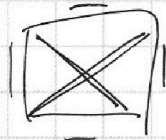
$$h = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$$

$$300 - \frac{2 \cdot 180}{20} = 324$$

$$\begin{array}{r} 910 \\ 900 \\ \hline 324 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 26 \\ \hline 156 \\ \hline 52 \\ \hline 78 \\ \hline 78 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$6.5 \quad 6.3$$

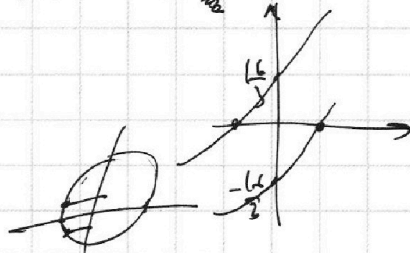


$$c^2 + 4m^2 = (a^2 + b^2) \cdot 2$$

$$4m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}$$

$$| -54a - b | = 2 \sqrt{25 + 36a^2}$$

$$| -b | = 5 \sqrt{25 + 36a^2}$$



$$\begin{array}{r} 952 \\ 964 \\ \hline 91x \\ 91 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{10\pi}{6}$$

$$\frac{17\pi}{6}$$

$$9\pi - 2 \frac{7\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6}$$

$$\frac{20\pi}{6}$$

$$\frac{27\pi}{6}$$

$$\frac{9\pi}{2} = \frac{27\pi}{6}$$

$$y - 1 = 0$$

$$y - 51 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

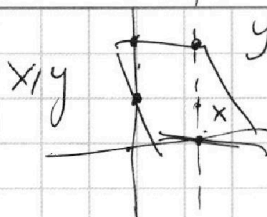


$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 54 \\ \hline 216 \\ + 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 444 \\ \hline .1072 \\ 2916 \\ - 144 \\ \hline 2772 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2916 \\ - 154 \\ \hline 154 \end{array}$$



$y_0 \geq -6x_0$ $-y_0 \leq 6x_0$
 $y \in [0; 90]$
 $48 \geq 6x + y$
 $y = -6x + 48$
 $y \leq -6x + 17$

$$\frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} \quad \frac{1}{3} \log_x 11^{-2} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - y_0$$

$$\log_{11} x \rightarrow \log_{11} 11 = 1 \quad 5 \frac{1}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5$$

$$t^4 - \frac{16}{3} t + 5 = 0 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11} \frac{x}{2} \rightarrow \frac{11 \log_{11} x - 11 \log_{11} 2}{2}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 t.$$

$$\log_{11}^3 11^{-13} = -\frac{13}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11} 11 + \frac{13}{3} \log_{11} 11 = \frac{16}{3} \log_{11} 11$$

$$\log_{11}^4 t + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} t} + 5 = 0$$

$$\log_{11}^4 a^4 - \frac{16}{3} \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad a = -b \Rightarrow$$

$$b^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{b} + 5 = 0$$

$$(a^4 - b^4) - \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b)(a + b) - \frac{16(a + b)}{ab} = 0$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times 108 \\ \hline 11088 \\ + 864 \\ \hline 864 \end{array}$$

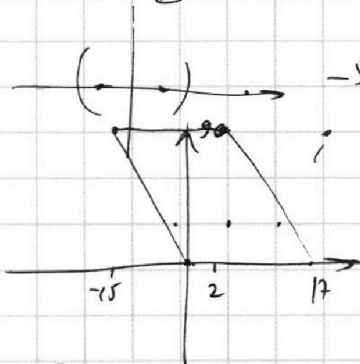
$$\begin{array}{r} 2772 \\ \times 4 \\ \hline 11088 \end{array}$$

$$9504 \quad 400 - 1584a^2$$

$$\begin{array}{r} 1584/4 \\ 11088 - \frac{12}{396} \\ \hline 9504 - \frac{2}{3} \\ \hline 1584 \end{array} \quad 108a \pm 2\sqrt{100 - 396a^2}$$

$$(-5\sqrt{25+36a^2}; 5\sqrt{25+36a^2})$$

$$(-54a - \sqrt{100 - 396a^2}; -54a)$$



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$6a + b = 48$$

$$b : 6 \Rightarrow b = 0; 6; ; 90$$

$$|x_2 - x_1| \leq 17$$

$$a^3 - a^2b + b^2a - b^3 - 16$$

$$a^3b - a^3b^2 + b^3a^2 - ab^3 - 16 = 0 \quad b = \log_{11}(0,5y)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - \frac{16}{b^4} = 0 \quad 11^b = 0,5y \quad 11^a = x$$

$$11^{a+b} = 0,5xy \quad xy = 2 \cdot 11^{a+b}$$