МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Заметим, что ~~мин~~ степень вхождения двойки в abc не менее, чем $\frac{9+14+19}{2} = \frac{28+14}{2} = 21$, т.к. $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 \vdots 2^{19} \cdot 2^{14} \cdot 2^{9} = 2^{42} \Rightarrow abc \vdots 2^{21}$.

Для тройки $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 \vdots 3^{10+13+18} = 3^{41} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{42}$,

т.к. в точный квадрат должна входить четная степень. $\Rightarrow abc \vdots 3^{21}$ Для пятерки $abc \vdots ac \vdots 5^{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 5^{30}$

Значит $abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Если $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$; $b = 2^2 \cdot 3^3$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$, то

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$; $ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$; $ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$; $bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$.

Заметим что условие выполняется и оценка достигнута

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$x_1 = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos(x_1 - \frac{\pi}{2})) = x_1$

$5\arcsin(\sin x_1) = x_1$.

Заметим, что $|x_1| < \frac{5\pi}{2}$, т.к. $|\arcsin n| < \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим промежутки, на которых по разному раскрывается $\arcsin(\sin(x_1))$

$x_1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:

$5x_1 = x_1$

$x_1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

$x_1 \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$:

$5(\pi - x_1) = x_1$

$5\pi = 6x_1$

$x_1 = \frac{5}{6}\pi \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$

$x = \frac{2}{6}\pi = \frac{1}{3}\pi$

$x_1 \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$.

$5(x_1 - 2\pi) = x_1$

$4x_1 = 10\pi$

$x_1 = \frac{5}{2}\pi \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$.

$x = 2\pi$

Остальные случаи рассматриваются симметрично, т.к. $\arcsin(\sin x_1) = -\arcsin(\sin(-x_1))$ и получаем что если x_1 - корень то $-x_1$ - корень. Получаем ещё 2 корня: $x_1 = -\frac{5\pi}{6}$ и $x_1 = -\frac{5\pi}{2}$

$x = -\frac{\overset{4}{8}\pi}{\cancel{6}_3} = -\frac{4}{3}\pi$ $\quad x = -3\pi$.

Ответ: $x \in \{-3\pi\} \vee \{-\frac{4}{3}\pi\} \vee \{-\frac{\pi}{2}\} \vee \{\frac{1}{3}\pi\} \vee \{2\pi\}$

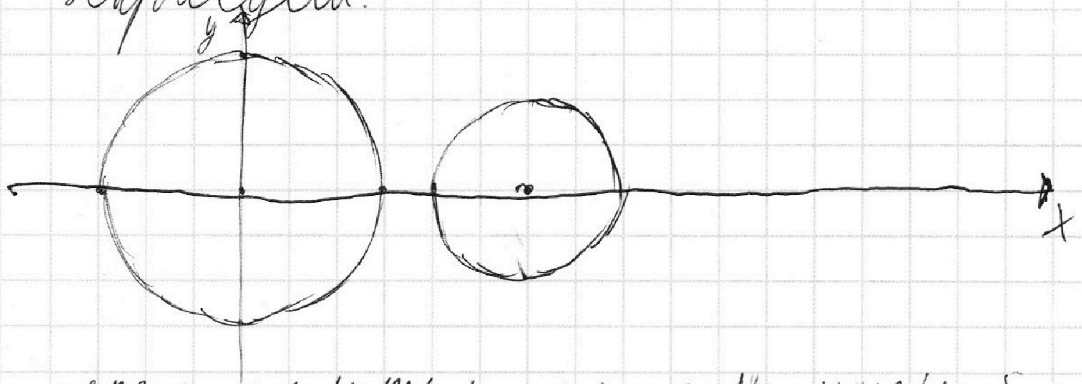
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			V			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Отобр~~ Заметим что второе равенство – две окружности, т.к. $x^2+y^2-9=0$ – окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 3, а $x^2+y^2-12x+32=0$ $(x-6)^2+y^2-4=0$ – окружность с центром в точке $(6;0)$ и радиусом 2. Тогда первое равенство – прямая, у которой угол наклона зависит от a, а то на сколько её подняли – от b. Нарисуем.



Теперь заметим, что если ~~наклон будет по~~ ~~под~~ $-\frac{a}{2}$ по модулю будет больше чем коэффициент у касательной, то прямая при любом b будет пересекать только 1 окружность ⇒ модуль $-\frac{a}{2}$ < модуль у ~~ка~~ внутр. касательной (в случае равенства при опр b он касается двух окр., а при других ~~только пересекает~~ ~~или~~ не пересекает одну из окружностей). При модуле $-\frac{a}{2}$ > модуля коэфф. у внутр. касательной. ~~Если провести~~ Другой лист.

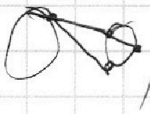
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

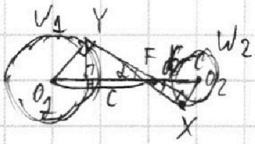
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если провести через точку касательной соотв. знака, то прямая пересечет в 4 точках

(). Тогда нужно вычислить коэффициент наклона касательной.



Пусть O_1 и O_2 - центры w_1 и w_2, X и Y - точки касания, F - пересечение касательной и O_1O_2. $H \in O_1O_2 : YH \perp O_1O_2$.

$O_1O_2 = 6$ ($x_1=0; y_1=0; x_2=6; y_2=0$) $O_1Y = R_1 = 3$ $O_2X = R_2 = 2$

пусть $O_1F = c$, тогда $\frac{c}{3} = \frac{6-c}{2}$ (из подобия)

$2c = 18-3c$ $5c = 18$ $c = \frac{18}{5}$.

$YF = \sqrt{O_1F^2 - O_1Y^2} = \sqrt{(\frac{18}{5})^2 - 3^2} = 3\sqrt{(\frac{6}{5})^2 - 1} = \frac{3}{5}\sqrt{36-25} = \frac{3\sqrt{11}}{5}$.

$tg\,\alpha = \frac{O_1Y}{YF} = \frac{3\cdot 5}{3\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$ $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $a \in (-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☑ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

ОДЗ: $x \neq 1, x > 0$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$

$\log_3^5 x + 6 = \frac{5}{2} - 8\log_3 x$

Замена: $t = \log_3 x$

$t^5 + 8t + 6 - \frac{5}{2} = 0$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$

$y \neq \frac{1}{5}$ $y > 0.$

$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8$

$\log_3^5(5y) + 2 = \frac{11}{2} - 8\log_3(5y)$

$s = \log_3 5y$

$s^5 + 8s + 2 - \frac{11}{2} = 0$

$s^5 + 8s - \frac{7}{2} = 0$

Заметим что функция монотонно возрастает (т.к. все степени нечетные), поэтому есть только 1 решение. ~~Заметим что корень левого многочле~~ Пусть t_1 корень левого.

Тогда $(-t_1)^5 + 8(-t_1) = -(t_1^5 + 8t_1) = \frac{7}{2} \Rightarrow -t_1$ - корень правого.

Тогда ~~$\log_3 x$~~ $t_1 = -s_1$, где s_1 - корень правого $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x = -\log_3 5y$ $\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5xy = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$

Ответ: $xy \in \{\frac{1}{5}\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☑ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Напишем уравнение прямых содержащих стороны паралелограмма.

PO: $y = ax + b$ $\quad \begin{cases} 42 = -14a + b \\ 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{42}{14} = -3 \Rightarrow$ PO: $y = -3x$, $y + 3x = 0$,

т.к. точки A и B $\in$ PORQ, то $\begin{matrix} y_1 + 3x_2 \geq 0 \\ y_2 + 3x_2 \geq 0 \end{matrix}$, т.к.

лежат сверху от прямой.

QR: $y = ax + b$ $\quad \begin{cases} 42 = 6a + b \\ 0 = 20a + b \end{cases} \Rightarrow 14a = -42 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 60 \Rightarrow$ QR: $y = -3x + 60$, $y + 3x = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} y_1 + 3x_1 \leq 60 \\ y_2 + 3x_2 \leq 60 \end{matrix}$

PQ и OR дают ограничения $0 \leq y_1 \leq 42$. Рассмотрим семейство $y + 3x - c = 0$, $c \in \mathbb{Z}$. Заметим, что оно покрывает все целые точки по одному разу. Если переформулировать факт, что надо доказать, то получим: $\begin{matrix} y_1 + 3x_1 = c_1 \\ y_2 + 3x_2 = c_2 \end{matrix}$ $\quad c_2 - c_1 = 33$. Посчитаем кол-во точек в каждом семействе $\in$ пар-мма. Если $c < 0$: 0; если $c > 60$: 0; если $0 \leq c \leq 60$, $c \vdots 3$, то их 8. ~~Тогда ответ - $8^2 \cdot x$, где x - кол-во способов выбрать c_2 и c_1 в таких промежутках~~

иначе 7. Если $c_2 \vdots 3$, то $c_1 \vdots 3$. таких пар целчисел в промежутке - 10.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

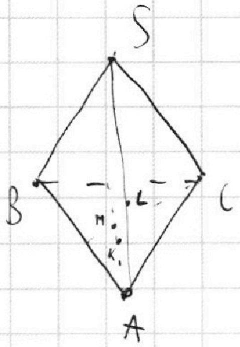
Тогда для таких с пар А и В $= 8^2 \cdot 10$. ~~А~~ для оставшихся кол-во пар цешек $= 28 - 10 = 18$ и для ~~так~~ ~~ци~~ с 7.3 пар А и В $= 7^2 \cdot 18$. Тогда всего пар $= 8^2 \cdot 10 + 7^2 \cdot 18 = 640 + 49 \cdot 18 = 640 + 882 = 1522$.

Ответ: 1522.

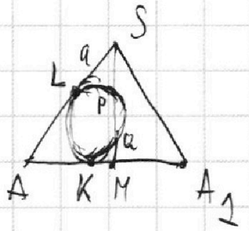
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Посмотрим на плоскость (MKS):



Заметим что w {окружность полученая сечение плоскостью Ω) касается AS и AA_1 в точках L и K соотв.

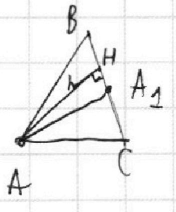
Пусть $SL=a$, тогда $AL=12-a$

$AK=AL$, ~~т.к.~~ $=12-a$, т.к. они обе касательные. $\Rightarrow$

$MK^2 = MP \cdot MQ = SQ \cdot SP = SL^2 \Rightarrow MK = SL = a.$
(степень точки)

$\Rightarrow AM = 12-a+a=12. \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 18.$

Посмотрим на плоскость ABC:



Д/п: $AH \perp BC$.

$AH = \frac{2S}{BC} = \frac{\overset{15}{\cancel{180}}}{12} = 15 \quad AA_1 = 18 \Rightarrow A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} =$
$= \sqrt{18^2-15^2} = 3\sqrt{6^2-5^2} = 3\sqrt{11}. \quad BH = BA_1 - A_1H = \frac{1}{2}BC - A_1H = 6 - 3\sqrt{11} \Rightarrow$

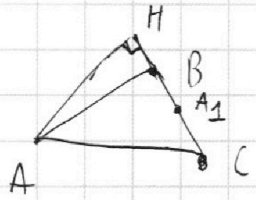
~~$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}$~~ $\Rightarrow \Delta ABC$ тупоуг.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$BH = 3\sqrt{11} - 6$

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

$AB = 3\sqrt{11+4-4\sqrt{11}+25} = 3\sqrt{40-4\sqrt{11}} = 6\sqrt{10-\sqrt{11}}$

$AC = \sqrt{(3\sqrt{11}+12)^2 + 15^2} = 3\sqrt{11+16+8\sqrt{11}+25} =$

$3\sqrt{48+8\sqrt{11}} = 6\sqrt{12+2\sqrt{11}}$

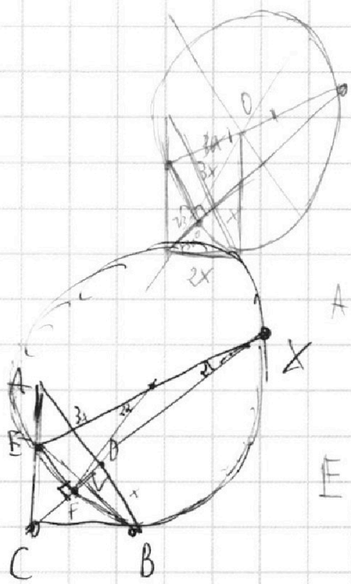
Из ~~этого~~ сторон можно выразить медианы, а после найти произведение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

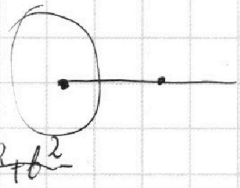
МФТИ



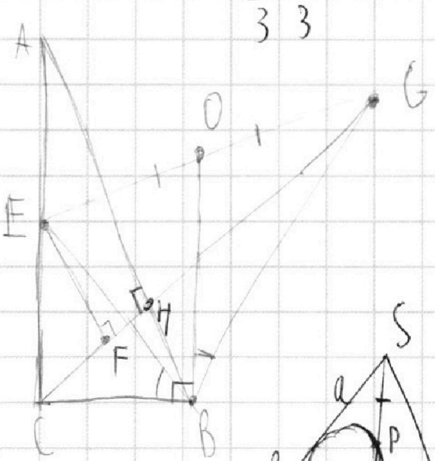
$\cancel{36+15^2}$

$18^2-15^2=3\cdot 33$

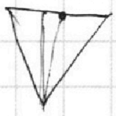
$$\begin{array}{r} 18 \\ +\ 15 \\ \hline 33 \end{array}$$

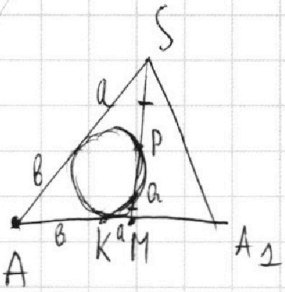


$\cancel{AM=a^2+b^2}$



$CF\cdot CG=CB^2$



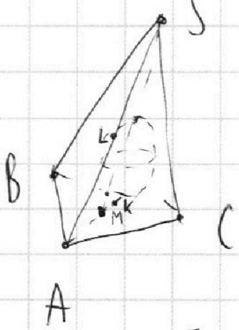


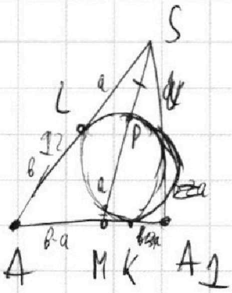
$$\begin{array}{r} 64 \\ \times\ 4 \\ \hline 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$\cancel{18}$ $6^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=$

$=\frac{144-25}{4}=\frac{119}{4}$

$12\cdot\frac{3}{2}=18$





$AK=b$ $AM=b-a$

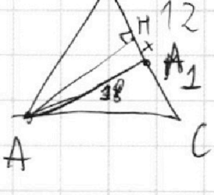
$\cancel{MK=SL}$

$\cancel{a+b=12}$

$\cancel{\frac{12-a}{12-3a}=\frac{2}{1}}$

$\cancel{15,36}$

$\cancel{5,12}$



$h=\frac{\overset{15}{\cancel{90}}}{\underset{2}{\cancel{12}}}=\frac{15}{2}$

$h=\frac{15}{2}$ $x=\sqrt{24^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2}=$

$=3\sqrt{64-\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{231}$

$\cancel{12-a=24-6a}$

$\cancel{5a=12}$

$\cancel{a=\frac{12}{5}\quad b=\frac{12}{5}\cdot 4}$

$m=\frac{72}{5}$

$\cancel{AA_1=b+b-2a=\frac{6\cdot 12}{5}=\frac{72}{5}}$

$\left(\frac{15}{2}\right)^2+x^2=\left(\frac{72}{5}\right)^2$

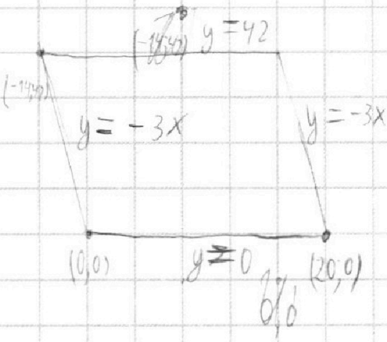
$x=\sqrt{\left(\frac{72}{5}\right)^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2}=3\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33.$

$x_1 \geq -14 \quad 42 \geq y_1 \geq 0$

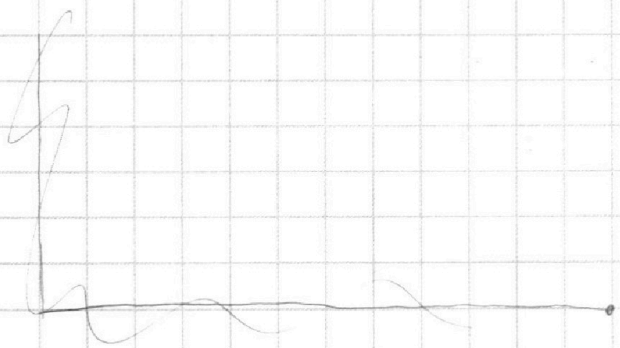
$y_1 \geq 0 \quad \frac{20}{3} \geq y_1 + 3x_1 \geq 0$

$0 \leq y_2 + 3x_2 \leq \frac{20}{3}$

$\frac{20}{3} < 3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ - неверно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не существует таких пар.

№7



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

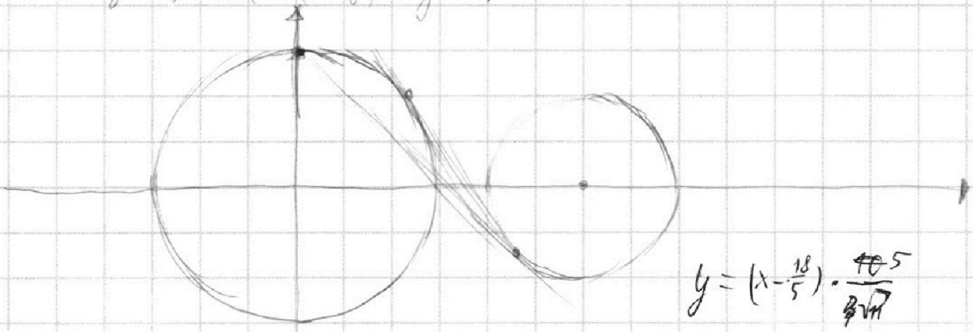
МФТИ

№4

$ax+2y-3b=0 \quad y=\frac{3}{2}b-\frac{a}{2}x$

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$

$x^2+y^2=9$ или $(x-6)^2+y^2=4$



$y=(x-\frac{18}{5})\cdot\frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{3}\sqrt{11}}$ $\quad \frac{36-11}{10}=\frac{\cancel{25}\,5}{\cancel{10}\,2}$

$\cancel{y=2-\sqrt{4-(x-6)^2}}$

$\cancel{\frac{11}{10}-\frac{18}{5}=\frac{22-18}{10}=\frac{4}{10}}$

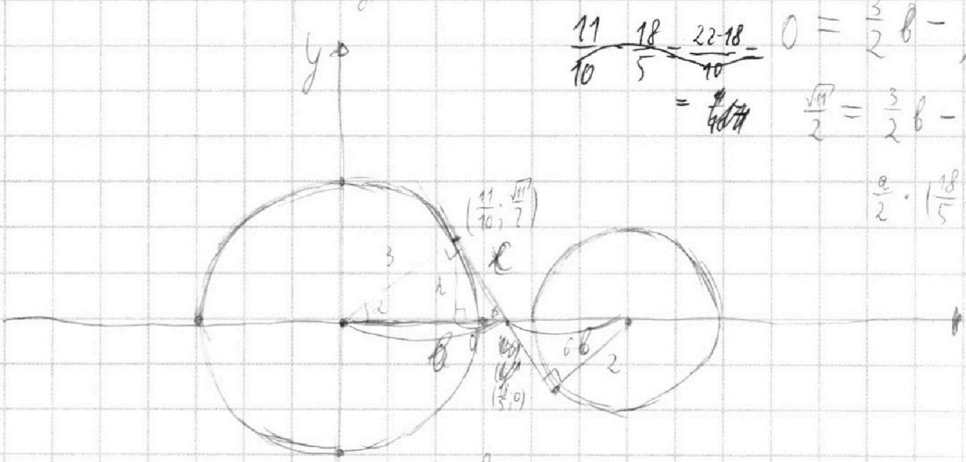
$0=\frac{3}{2}b-\frac{a}{2}\cdot\frac{18}{5}$

$\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{3}{2}b-\frac{a}{2}\cdot\frac{11}{5}$

$\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{18}{5}-\frac{11}{10}\right)=\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\frac{a}{2}\cdot\frac{25}{10}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

$a=\frac{2\sqrt{11}}{5}$



$\frac{b}{6-b}=\frac{3}{2}$

$c=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2-1^2}\cdot 3=$

$=\sqrt{\frac{36}{25}-\frac{25}{25}}\cdot 3=\frac{\sqrt{11}}{5}\cdot 3$

$\frac{2}{3}b=6-b$

$\frac{5}{3}b=6 \quad b=\frac{18}{5}$

$h=\frac{3c}{b}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

$d=\sqrt{11}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{11}\sqrt{\frac{9}{25}-\frac{1}{4}}=$

$=\sqrt{11}\sqrt{\frac{36-25}{100}}=\frac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}{10}=\frac{11}{10}$

$\frac{d}{c}=\frac{c}{b} \quad d=\frac{c^2}{b}=\frac{11\cdot 9\cdot 5}{25\cdot 18}=\frac{11}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 2\cancel{7}43 - 8$

$27 \times 9 = 243$

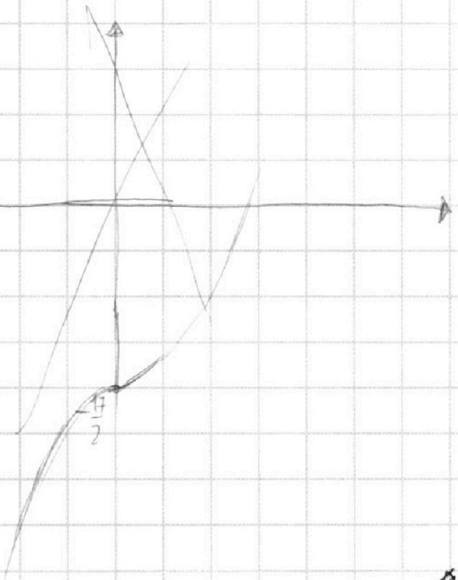
$\log_3^4 x + 6\frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2\log_3 x} - 8$ ОДЗ: $x \neq 1$ $x > 0$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \mid \cdot t \neq 0$

$t^5 + 8t + 6 - \frac{5}{2} = 0$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$



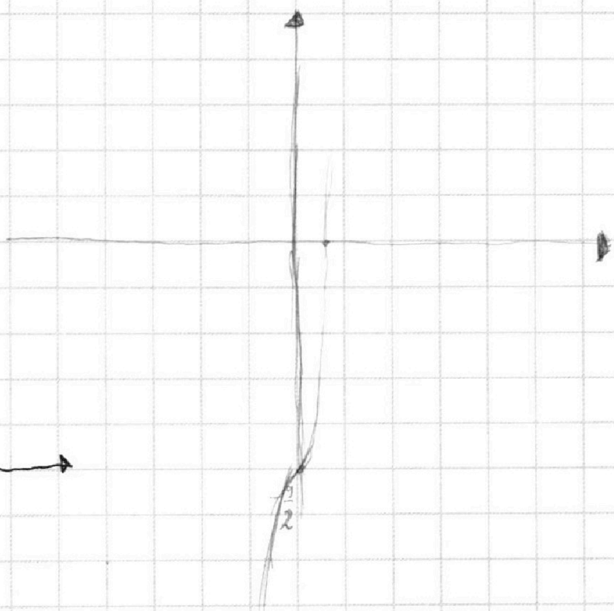
$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

ОДЗ: $5y \neq 1$, $y > 0$

$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2\log_3(5y)} - 8$

$s^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8s$

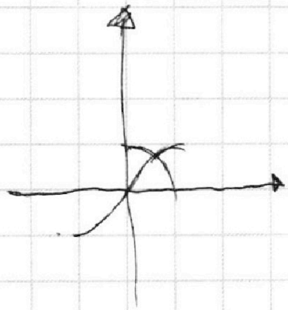
$s^5 + 8s - \frac{7}{2} = 0$



$\cancel{x^5 + 8x = \frac{17}{2}}$

$\cancel{y^5 + 8y = \frac{9}{2}}$

$\cancel{(xy)^5 + 8xy}$



$t = -s$

$\log_3 x = -\log_3 y$

$\log_3 x + \log_3 y = 0$

$\log_3 xy = 0$

$xy = 1$ v

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\arcsin(\cos x_1 - \frac{\pi}{2}) = x_1$

$5\arcsin(\sin x_1) = x_1$

$x_1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$5x_1 = x_1$

$x_1 = 0 \quad x = -\frac{\pi}{2}$

$x_1 \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$

$5(\pi - x_1) = x_1$

$5\pi = 6x_1 \quad x_1 = \frac{5}{6}\pi \quad x = \frac{2}{6}\pi$

$x_1 \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$

$5(x_1 - 2\pi) = x_1$

$4x_1 = 10\pi$

$x_1 = \frac{5}{2}\pi \quad x = 2\pi$

$x_1 \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2})$

$5(-x_1 - \pi) = x_1$

$6x_1 = -5\pi$

$x_1 = -\frac{5\pi}{6}$

$x_1 \in [-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2})$

$5(x_1 + 2\pi) = x_1$

$4x_1 = -10\pi$

$x_1 = -\frac{5\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

ab 2^9 bc 2^{14} ac 2^{19}

ab 3^{10} bc 3^{13} ac 3^{18}

~~$a-b=5$~~
~~$a+b=10$~~
~~$2a=15$~~

a b c
2^7 2^2 2^{12}

a b c
3^7 3^3 3^{11}

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 18 \\ \hline 392 \\ +\ 49\ \ \\ \hline 882 \end{array}$$

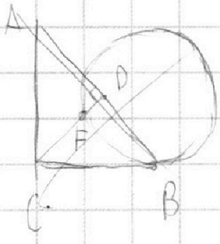
ab 5^{10} bc 5^{13} ac 5^{30}

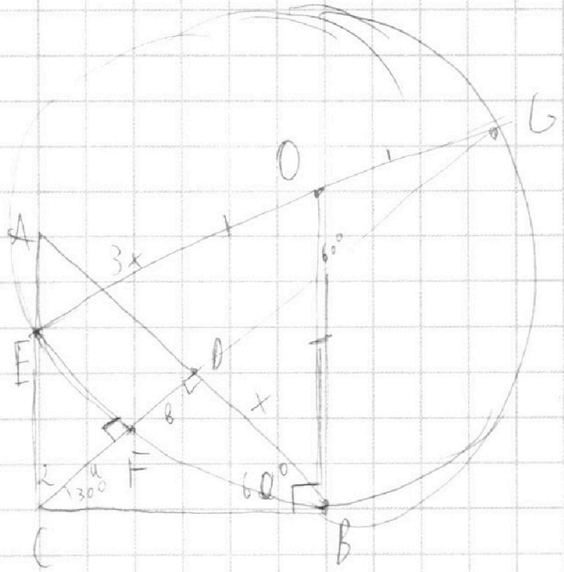
~~$a'-b' = 30-13 =$~~

c 5^{20}

ab 5^{10} abc 5^{30}

№2





$\frac{EF}{CD} = \frac{CF}{CB}$ $\sqrt{3}x$ $\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{CD}$

$CD = \sqrt{AB \cdot DB} = \sqrt{3}x$

$BC = 2x$

$AC = 2\sqrt{3}x$