МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 20y + 64\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

Произведение чисел x и y $\vdots$ простому множителю z в степени w $\Leftrightarrow$ сумма степеней z, входящ. в числа x и y $\geqslant w$

Если в каком-то из чисел (a, b, c) будет присутствовать какой-то простой множитель (отличный от $2, 3, 5$) в степени >0, то произведение abc не будет минимальным.

$\Rightarrow \exists \begin{cases} a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \\ b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \\ c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \end{cases}$

Тогда по условию ~~$ab \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17} \Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1 \geqslant 12 \\ a_2+b_2 \geqslant 20 \\ a_3+b_3 \geqslant 17 \end{cases}$~~

~~$ab \vdots 2$~~ $ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1 \geqslant 8 & (1) \\ a_2+b_2 \geqslant 14 & (2) \\ a_3+b_3 \geqslant 12 & (3) \end{cases}$

$bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \Rightarrow \begin{cases} b_1+c_1 \geqslant 12 & (4) \\ b_2+c_2 \geqslant 20 & (5) \\ b_3+c_3 \geqslant 17 & (6) \end{cases}$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39} \Rightarrow \begin{cases} a_1+c_1 \geqslant 14 & (7) \\ a_2+c_2 \geqslant 21 & (8) \\ a_3+c_3 \geqslant 39 & (9) \end{cases}$

1) $(1)+(4)+(7)$

$2a_1+2b_1+2c_1 \geqslant 8+12+14$

$a_1+b_1+c_1 \geqslant 17$

Рав-во достиг $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_1+b_1 = 8 \\ b_1+c_1 = 12 \\ a_1+c_1 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 5 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 9 \end{cases}$

2) $(2)+(5)+(8)$

$2a_2+2b_2+2c_2 \geqslant 55$

$a_2+b_2+c_2 \geqslant \frac{55}{2}$

Т.к. $a_2, b_2, c_2 \in \{\mathbb{N} + \{0\}\}$

$a_2+b_2+c_2 \geqslant 28$

Например, $\exists a_2 = 8, b_2 = 6, c_2 = 14$

$\begin{cases} a_2+b_2 = 14 \geqslant 14 \\ b_2+c_2 = 20 \geqslant 20 \\ a_2+c_2 = 22 \geqslant 21 \end{cases}$ — верно.

3) $a_3+c_3 \geqslant 39 \Rightarrow a_3+b_3+c_3 \geqslant 39$

$\exists a_3 = 20, c_3 = 19, b_3 = 0$

$\begin{cases} a_3+b_3 = 20 \geqslant 12 \\ b_3+c_3 = 19 \geqslant 17 \\ a_3+c_3 = 39 \geqslant 39 \end{cases}$ — верно.

Итак, $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \geqslant 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

(пример: $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) = (5, 8, 20, 3, 6, 0, 9, 14, 19)$)

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Дано:
$\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$
CD - высс.
ω кас $CB = B$
$\omega \cap CD = F$
$\omega \cap AC = E$
$EF \parallel AB$
$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$

Найти:
$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$

$\rceil\ EF \cap BC = X$

По теор. о секущей и касательной
$XB^2 = XF \cdot XE$

$EX \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{FX} = \frac{AD}{DB}$

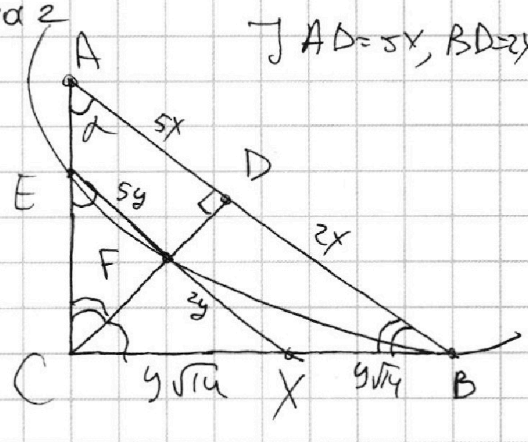
$\rceil\ EF = 5y,\ FX = 2y$

$XB^2 = 14y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow XB = y\sqrt{14}$

$CD = x\sqrt{10}$ - ~~теор. об отрез~~ ср. геом. отрезков, на кот. делит гипп.

$\rceil\ \angle A = \alpha$

$\rceil\ AD = 5x,\ BD = 2x$



$$tg\alpha = \frac{x\sqrt{10}}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow ctg\alpha = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{10}{35}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

В $\triangle CFX$ $\sin\alpha = \frac{FX}{CX} = \frac{2y}{CX} = \sqrt{\frac{2}{7}} \Rightarrow$

$\Rightarrow CX = y\sqrt{14} = BX \Rightarrow CX \Rightarrow$ по теор о пропорц. отрезках $AE = EC$

$\triangle ECF \sim \triangle ACD$, $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{CD \cdot 5x}{2},\quad S_{\triangle ABC} = \frac{CD \cdot 7x}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ECF}}{7/5\, S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{28}$$

~~Ответ: $\frac{5}{28}$~~

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{28}{5}$$

Ответ: $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \dfrac{\pi - 2x}{10}$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\dfrac{\pi-2x}{10}\right)$, $|\cos x| \le 1$

$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x = \cos\left(\dfrac{4\pi+2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{2\pi+x}{10}\right)$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{2\pi+x}{10} + 2\pi n & (1) \\ x = -\dfrac{2\pi+x}{10} + 2\pi k & (2) \end{array}\right. \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

1) $10x = 2\pi + x + 20\pi n$

$x = \dfrac{2\pi + 20\pi n}{9}$

2) $10x = -2\pi - x + 20\pi k$

$x = \dfrac{-2\pi + 20\pi k}{11}$

Ответ: $\dfrac{2\pi + 20\pi n}{9}$, $\dfrac{-2\pi + 20\pi k}{11}$ $(n, k \in \mathbb{Z})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

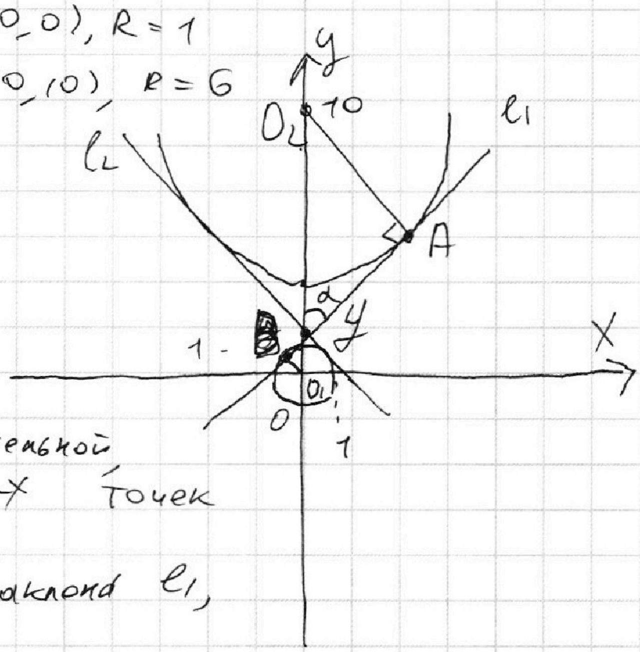
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$\begin{cases} ax-3y+4b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 & (2) \end{cases}$ – 4 реш.

(2) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \quad \text{– окр } (0,0),\ R=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \quad \text{– окр } (0,10),\ R=6 \end{array}\right.$

(1) $y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3}$.



tg угла наклона к полож. напр. $Ox=\frac{a}{3}$

b – $\forall$ число $\Rightarrow$ прямая двиг. вдоль Oy. Заметим, что если прямая $\parallel$ общей внутр. касательной то она имеет не более 2-х точек пересеч. с этими окр.

Если $\frac{a}{3}\geq 0$ и $\frac{a}{3}<$ tg $\angle$ наклона l_1, то также не более 2 реш.

tg $\angle$ накл. l_2 = – tg $\angle$ накл. l_1 (т.к. симметричны)

если $\frac{a}{3}\leq 0$ и $\frac{a}{3}>$ tg $\angle$ накл. l_2, то не более 2 реш.

$\exists$ tg $\angle$ накл $l_1=k$. Тогда чтобы нашлось b, при котором система имеет 4 реш нужно, чтобы

$\frac{a}{3}<-k<k<\frac{a}{3}$, $\Rightarrow a\in(-\infty,-3k)\cup(3k,+\infty)$

Найдем k.

$\exists\, l_1\cap Oy=y(0,y)$

Тогда $\sin\alpha=\frac{O_2A}{O_2y}=\frac{O_1B}{O_1y}$; $O_2A=6$, $O_1B=1$

$\frac{6}{10-y}=\frac{1}{y}$; $6y=10-y$

$\Rightarrow y=\frac{10}{7}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{7}{10}=\cos(90-\alpha)=$

$=\cos\angle$ наклона

$tg^2\angle$ наклона $=\frac{1-\cos^2\angle\text{ наклона}}{}=1-\frac{49}{100}=$ ~~$\frac{\sqrt{51}}{10}$~~

$=\frac{51}{100}\Rightarrow k=\frac{\sqrt{51}}{10}\Rightarrow a\in\left(-\infty,-\frac{3\sqrt{51}}{10}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{10},+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 & (1) \\ \log_5^4(y) + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0,\ x\neq \frac{1}{2} \\ y>0,\ y\neq 1 \end{cases}$

(1) $\log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5(2x)} - \dfrac{4}{3\log_5(2x)} + 3 = 0$

$]\ \log_5 2x = a$

$a^4 - \dfrac{3}{a} - \dfrac{4}{3a} + 3 = 0 \quad | \times 3a$

$3a^5 + 9a - 13 = 0 \quad (*)$

$f_1(a) = 3a^5 \uparrow$, $f_2(a) = 9a \uparrow \Rightarrow f(a) = 3a^5 + 9a - 13 \uparrow \Rightarrow$ имеет не более 1 корня.

(2). Аналог. $\log_5 y = b$. После преобразований получаем $3b^5 + 9b + 13 = 0$ (**) - также не более 1 корня.

Сложим (*) и (**)

$3a^5 + 9a - \cancel{13} + 3b^5 + 9b + \cancel{13} = 0$

$3(a^5 + b^5) + 9(a+b) = 0$

$3(a+b)(a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 + 3) = 0$

Сумма также $\uparrow$ ф-ция относ. $a \Rightarrow$
$\Rightarrow$ имеет не более 1 корня. Заметим, что $a = -b$ - корень

$a + b = 0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5(y) = 0$

$\log_5 2xy = \log_5 1 \Rightarrow xy = 0{,}5$

Ответ: 0,5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

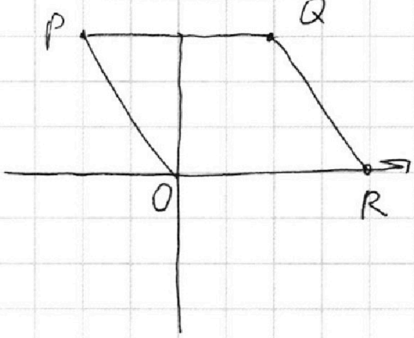
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [X] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O(0,0)$, $P(-16,80)$, $Q(2,80)$, $R(18,0)$

Задача 6



$OP: \; y=-5x$

$QR: \; \frac{x-2}{16}=\frac{y-80}{-80}$

$y=-5x+90$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \geq -5x_1 & (1) \\ y_2 \geq -5x_2 & (2) \\ y_1 \leq -5x_1+90 & (3) \\ y_2 \leq -5x_2+90 & (4) \end{cases} + \; y_1, y_2 \in [0,80]$$

Из (1) и (3) $\Rightarrow -90 \leq -y_1-5x_1 \leq 0$

Из (2) и (4) $\Rightarrow 0 \leq y_2+5x_2 \leq 90$

$5x_2-5x_1+y_2-y_1=45.$

При $-y_1-5x_1<-45$ или $y_2+5x_2<45$ реш. нет.

$$\Rightarrow (1)\begin{cases} -y_1-5x_1=-45 \\ y_2+5x_2=90 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} -y_1-5x_1=-44 \\ y_2+5x_2=89 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y_1-5x_1=0 \\ y_2+5x_2=45 \end{cases}$$

1) y_1 и $y_2 \; \vdots \; 5$, т.к. точки с целыми коорд., y_1 и $y_2 \in [0,80] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для y_1 $\frac{80}{5}+1=17$ вариантов,

для y_2 17 вариантов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для пар (x_1,y_1), (x_2,y_2) 17^2 вариантов. (т.к. при опр. y_1 и y_2 x_1 и x_2 опр. однозначно)

2) Аналог. п. 1, только $y_1 \equiv 4 \pmod 5 \equiv y_2$ – 16 вариантов $\Rightarrow 16^2$ пар.

И т.д. для чисел $\vdots\, 5$ будет 17^2 вариантов, для чисел $\not\vdots\, 5$ 16^2 вариантов. Чисел $\vdots\, 5$ от -45 до 0: $\frac{45}{5}+1=10$, остальных $46-10=36$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Общее кол-во пар $10\cdot17^2+36\cdot16^2=2890+9216=$
$=12106$

Ответ: 12106

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5(2x)} = \dfrac{4}{3\log_5(2x)} - 3 \\ \log_5^4(y) + \dfrac{4}{\log_5(y)} = -\dfrac{1}{3\log_5(y)} - 3 \end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2x)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} - \frac{1}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3\log_5(2x)} - \frac{13}{3\log_5(y)} = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{13}{3}\left(\frac{\log_5(2xy)}{\log_5(2x)\cdot\log_5(y)}\right) = 0$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) = (\log_5^2(2x)) + (\log_5^2(y))(\log_5^2(2x) - $$
$$ - \log_5^2 y)(\log_5 2xy) =$$

$$= ((\log_5 2xy)^2 - 2\log_5 2x \cdot \log_5 y)(\log_5 \frac{2x}{y}) \cdot \log_5 2xy$$

$$2y \cdot 7y = XB^2$$
$$14y^2 = XB^2$$
$$XB = y\sqrt{14}$$

$$1 + \frac{25}{10}$$

$$\frac{35}{10}$$

$$\frac{XB + CX}{2\cancel{x}} = \cancel{\frac{4y}{2x}}\ \frac{CX}{2y}$$

$$\frac{y\sqrt{14} + CX}{\cancel{4}x} = \frac{CX}{y}$$

$$y^2\sqrt{14} + CX \cdot y = CX \cdot X$$

$$CX = \frac{y^2\sqrt{14}}{X - y}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\operatorname{ctg} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot \cancel{2}y}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{\sin^2} = \frac{35}{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{x^2 = (10-y)^2 - 6^2 = (6-y)^2 +}$

$x^2 = (10-y)^2 - 16 = (4-y)^2 (14-y)$

$\cancel{y^2} - 20y + 100 - 16 = \cancel{y^2} - 18y + 64$

$100 - 36 - 56 = 2y = 20 \Rightarrow y = 10$

$= 64 - 56 = 8$

$k^2q^2 - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2q^2 = k^2 + q^2$

$\cancel{k^2q^2} - 20qk^2 + 100k^2 - 1 - \cancel{k^2} - \cancel{q^2} + 20q + 64 = 0$

$-20qk^2 + 100k^2 + 20q = -63$

$(a^2+b^2)^2 - ab(a^2+ab+b^2) + 3 = 0$

$(a^2+b^2)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$ $a+b = x$, $ab = y$

$((a+b)^2 - 2ab)^2 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$

$(x^2 - 2y)^2 - y(x^2 - y) + 3 = 0$

$x^4 - 4x^2y + 4y^2 - x^2y + y^2 + 3 = 0$

$x^4 - 5x^2y + y^2 + 3 = 0$

$D = 25y^2 - 4y^2 - 12 = 21y^2 - 12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

log

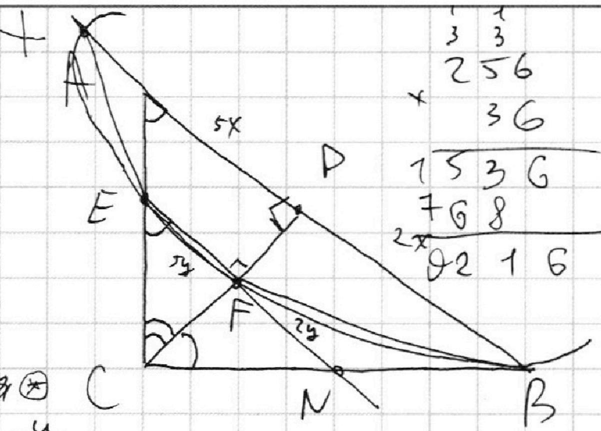
$x^2 - y^2 = 1$

x^2

$\begin{array}{r} 9216 \\ 2890 \\ \hline 12106 \end{array}$

34

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$



$\begin{array}{r} 256 \\ \times 36 \\ \hline 1536 \\ 768 \\ \hline 9216 \end{array}$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 \geq -y_1 \\ 5x_2 \geq -y_2 \\ 5x_1 \leq y_1 - 90 \\ 5x_2 \leq -y_2 + 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_1 \leq y_1 \\ 5x_2 \geq -y_2 \\ -5x_1 \geq y_1 - 90 \\ 5x_2 \leq -y_2 + 90 \end{cases}$$

$5x_2 - 5x_1 \leq y_1 - y_2 + 90$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 \leq 90$

$5x_2 - 5x_1 \geq -y_2 + y_1 - 90$

$NF \cdot NE = NB^2$

$2y \cdot 7y = NB^2$

$14y^2 = NB^2$

$$\frac{NB}{NE} = \frac{NF}{NB}$$

$$\begin{cases} 5x_2 + y_2 = 45 \\ -5x_1 - y_1 = 0 \end{cases}$$

0 5 10 . 80 (17)

(17)

17 · 17 пар.

$0 \leq (5x_2 + y_2) \leq 90$

$-90 \leq (-5x_1 - y_1) \leq 0$

$$\begin{cases} 5x_2 + y_2 = 46 \\ -5x_1 - y_1 = -1 \end{cases}$$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$

$x^2 = (10-y)^2 + 6^2 = (6-y)^2 + (16-y)^2$

$-k \quad 0 \quad k$

$\cancel{y^2} - 20y + 100 + \cancel{36} = \cancel{y^2} - 12y + \cancel{36} + y^2 - 32y + 16^2$

$y^2 - 24y + 156 = 0$

$$\begin{cases}\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \\ \log_5^4(y) + 4\log_y(5) = \log_{y^3}(0{,}2) - 3\end{cases}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3}\frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5(y)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\log_5(y)} - 3$$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) - \frac{3}{\log_5(2y)} - \frac{4}{\log_5(y)} - \frac{4}{3\log_5(2x)} - \frac{1}{3\log_5(y)} \; 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{ax+4b}{3} = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

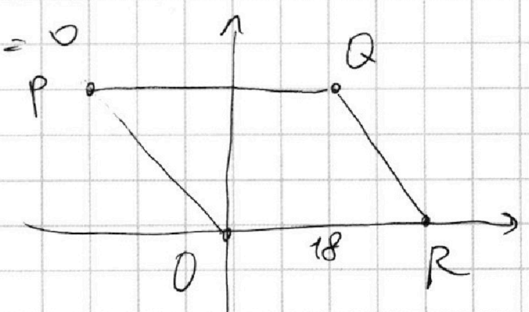
$$x^2 + \frac{a^2}{9}x^2 + \frac{16b}{9} + 2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{4b}{3}x - 1 = 0$$

$$x^2\left(1 + \frac{a^2}{9}\right) + \frac{8ab}{9}x + \frac{16b}{9} - 1 = 0$$

$$D = \frac{8a^2b^2}{81} \cancel{-4} - \frac{4a^2}{9} - \frac{64b}{9} \cancel{+4} =$$

$$= \frac{8a^2b^2 - 36a^2 - 9\cdot 64b^2}{81} = 0 \quad 3\cdot 8$$

$$-(6a+24b)^2$$



OP: $\frac{x}{-16} = \frac{y}{80}$

$\boxed{y = -5x}$

QR: $\frac{x-2}{16} = \frac{y-80}{-80}$ 5

$\boxed{y = -5x + 90}$

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 \\ y_2 \geq -5x_2 \\ y_1, y_2 \in [0, 80] \\ y_1 \leq -5x_1 + 90 \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 \end{cases}$$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$5y_2 - 5x_1 \leq y_1 - y_2 + 90$

$\boxed{5y_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 \leq 90}$

$5y_2 - 5x_1 \geq y_1 - 90 - y_2$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 90$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

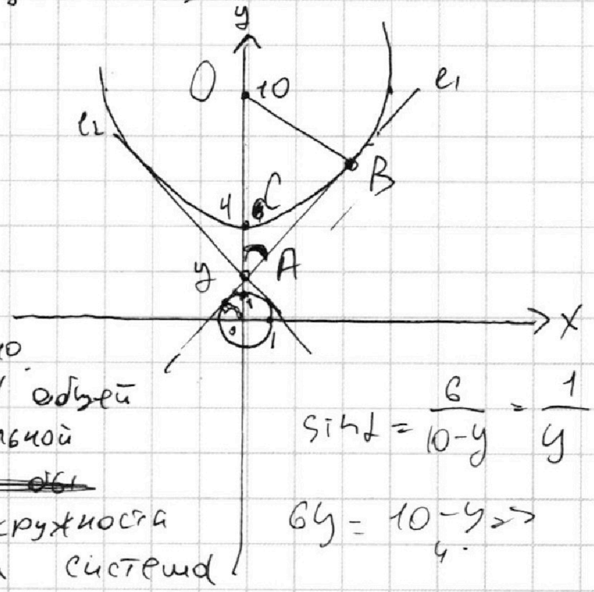
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 & (2) \end{cases}$$ 4 реш.

(2) $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2 = 6^2 \end{array}\right.$ – окр. с центром $(0,0)$ и $R=1$; – окр с центром $(0,10)$ и $R=6$

(1) $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ – прямая,



tg угла наклона к полож. направлению Ox $= \frac{a}{3}$

b – $\forall$ число => прямая двигается вдоль Oy как угодно

Заметим, что если прямая // общей ~~касат~~ внутренней касательной этих окружностей, то ~~каждую об~~ она не сможет $\cap$ обе окружности в 2-х точках (а 4 решения система будет иметь <=> прямая $\cap$ каждую окр. в 2-х точках)

$\sin\angle = \frac{6}{10-y} = \frac{1}{y}$

$6y = 10 - y$ =>

~~Если tg ∠ наклона~~ $\exists$ tg ∠ наклона $l_1 = k$, $l_2 = -k$ (тк они симметричны) Тогда при tg ∠ наклона прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \in [0, k]$ и $\in [-k, 0]$ система будет иметь < 4 решений => $\frac{a}{3} \in (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

Найдем k.

$\exists\ l_1 \cap Oy = (0, y)$

По теор. Пиф. $AB^2 = AO^2 - OB^2 = (10-y)^2 - 16$

По теор. об отр. кас. $AB^2 = AC \cdot AD$ ($\exists D$ – т. пересеч. окр. с Oy.) $D(0, 14)$

$AB^2 = (4-y)(14-y)$

$(10-y)^2 - 36 = (4-y)(16-y)$

~~$y^2 - 20y + 100 - 36 = y^2 - 18y + 56$~~

~~$2y =$~~

$y = kx + q$

$x^2 + k^2x^2 + 2kqx + q^2 - 1 = 0$

$x^2 + k^2x^2 + 2kqx + q^2 - 20kx - 20q - 64 = 0$

$(kq - 10k)^2$

$k^2(q-10)^2$

$$\begin{cases} x^2(1+k^2) + 2kq \cdot x + q^2 - 1 = 0 \\ x^2(1+k^2) + x(2kq - 20k) + q^2 - 20q - 64 = 0 \end{cases}$$

$\cancel{k^2q^2} - 1 - k^2 - q^2 + 1 = 0$ $\quad k^2 + q^2 = k^2q^2$

$\cancel{k^2q^2} - 20qk^2 + 100k^2 - 1 - \cancel{k^2} - \cancel{q^2} + 20q + 64 = 0$

$k^2(100 - 20q) + 20q + 64 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3$

$\log_5 2x = a$

$\log_5 y = b$

$a+b-?$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \\ b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \end{cases}$$

$a^4 - b^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{b} - \frac{4}{3a} + \frac{1}{3b} = 0$

$a^4 - \frac{13}{3a} - b^4 - \frac{10}{3b} = 0$

0 1

1 1 1

2 1 2 1

3 1 3 3 1

4 1 4 6 4 1

5 1 5 10 10 5 1

$(a^2+b^2)^2 - ba^3 - b^2a^2 - b^3a + 3 = 0$

$a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0 \Rightarrow 3a^5 + 9a - 16 = 0$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$

$3(a^5+b^5) + 9(a+b) = 0$

$a^4 - \frac{16}{3a} + 3 = 0$

$a^5+b^5 \,|\, a+b$

a^4

$(a^2+b^2)^2 - ab(a^2+ab+b^2)$

$a^5 + 9a - 16 = 0$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$

$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$

~~$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$~~

$b^4 + \frac{13}{3b}$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(3) $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \dfrac{\pi - 2x}{10}$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\dfrac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x = \cos\left(\dfrac{4\pi + 2x}{10}\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{2\pi + x}{5}\right)$

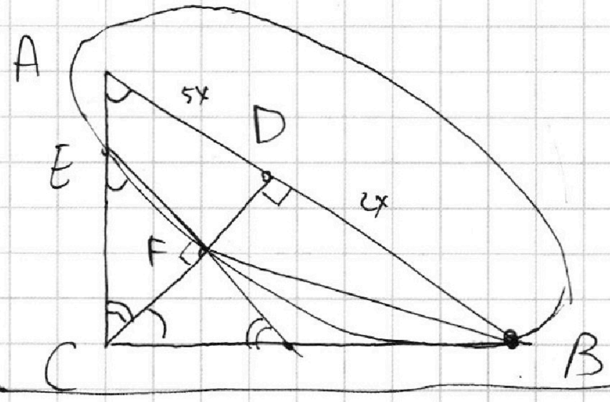
$625 \,|\, 25$, $50 \,|\, 25$, 125

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi + x}{5} + 2\pi n \\ x = -\dfrac{2\pi + x}{5} + 2\pi n \end{array}\right.$$

$AB \parallel EF$

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{5}{2}$

$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$ — ?



(5) $\log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5(2x)} = \dfrac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$

$x > 0,\ y > 0$

$\dfrac{\log_5^5(2x) - 3}{\log_5(2x)} = \dfrac{4}{3\log_5(2x)} - 3$

$3\log_5^5(2x) - 9 = 4 - 9\log_5(2x)$

$3\log_5(2x)\left(\log_5^4(2x) + 3\right) = 13$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c

~~мин степень 2. у (a, b~~

2) ab: мин. степень 2 – 8; 3 – 14; 5 – 12

bc: 2 – 12; 3 – 20; 5 – 17

ac: 2 – 14; 3 – 21; 5 – 39

$68 | 2$

$\frac{29+39}{2} = 34$

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$

$a_1+b_1 \geq 8$
$a_2+b_2 \geq 14$
$a_3+b_3 \geq 12$
$b_1+c_1 \geq 12$
$b_2+c_2 \geq 20$
$b_3+c_3 \geq 17$
$a_1+c_1 \geq 14$
$a_2+c_2 \geq 21$
$a_3+c_3 \geq 39$

$\geq 34 \qquad \geq 49$

$a_1+a_2+a_3 + b_1+b_2+b_3 + \underbrace{c_1+c_2+c_3}_{=39} \geq 75$

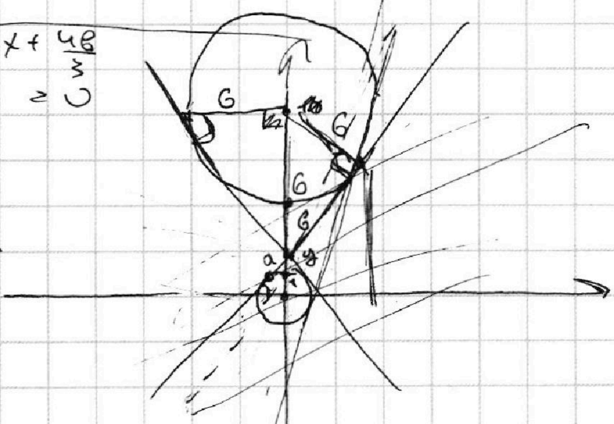
$abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3}$

$a_3+b_3+c_3$ – мин. $\quad a^2 = (y-1)(y+1)$ $\quad b^2 =$

$\exists\, a = 5^{12}$
$c = 5^{27}$

(4) $\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$ $\quad y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2+(y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$



~~$c_1+c_2+c_3 = 39$~~

$a_3+b_3+c_3 = 39$

$a_1+b_1+b_1+c_1+a_1+c_1 \geq 34$
$\Rightarrow a_1+b_1+c_1 \geq 17$

$\begin{cases} a_2+b_2 = 14 \quad b_2 = 14-a_2 \\ b_2+c_2 = 20 \\ a_2+c_2 = 21 \end{cases}$

$\frac{55}{2} \quad \frac{56}{2} = 28$

~~$c_2 - a_2 = 6$~~
$a_2 + c_2 = 21$

$a_2 = 8$
$b_2 = 6$
$c_2 = 14$

$14 = a_2 + b_2$
$20 = b_2 + c_2$
$22 = a_2 + c_2$