



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

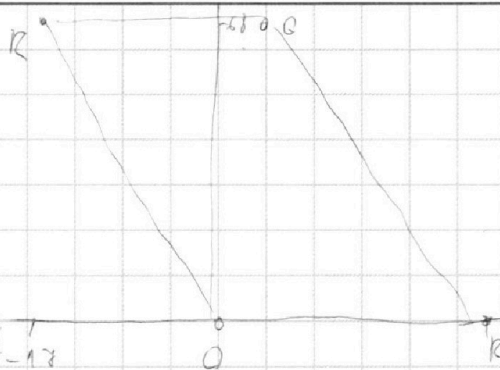
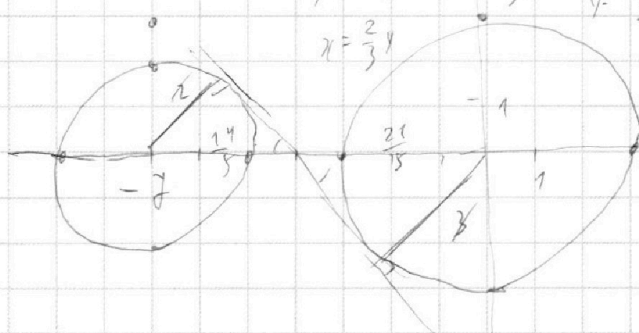
$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}y$$

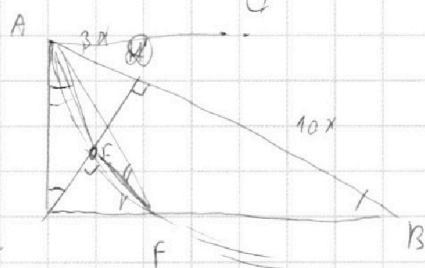
$$x+y=8$$

$$\frac{5}{3}y=8$$

$$y = \frac{24}{5} = 4.8$$



$$\angle EAD = 90^\circ$$



$$CO = \frac{AI \cdot h_c}{AB}$$

$$= x\sqrt{30}$$

$$BC = x\sqrt{30} \cdot x\sqrt{130}$$

$$AC = y\sqrt{30}$$

$$S(ADC) = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 \sqrt{30}$$

$$40 \cdot 90$$

$$A: y = kx + b$$

$$y - kx - b = 0$$

$$\frac{|1-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = 3$$

$$\frac{|2k-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = 2$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2k-b}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 Лист 2

Пусть $ED = y$

$$1 - \frac{y}{x\sqrt{30}} = \frac{y}{\sqrt{30}x}$$

$$\frac{2y}{x\sqrt{30}} = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{30}}{2}x$$

$$6. CE = CD - ED = x\sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}}{2}x = x\frac{\sqrt{30}}{2}$$

~~К~~ $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

~~С~~ $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$$\frac{S(\triangle CEF)}{S(\triangle CDB)} = \frac{CE^2}{CD^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{4 \cdot x^2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$$

$$S(\triangle CEF) = \frac{1}{4} S(\triangle CDB); S(\triangle DBC) = 4 S(\triangle CEF)$$

$$\triangle DAC \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{S(\triangle DAC)}{S(\triangle DBC)} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{x^2 \cdot 130} = \frac{3}{13}$$

$$S(\triangle DAC) = \frac{3}{10} S(\triangle DBC) = \frac{12}{10} S(\triangle CEF)$$

$$\frac{S(\triangle DAC)}{S(\triangle DBC)} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1, 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

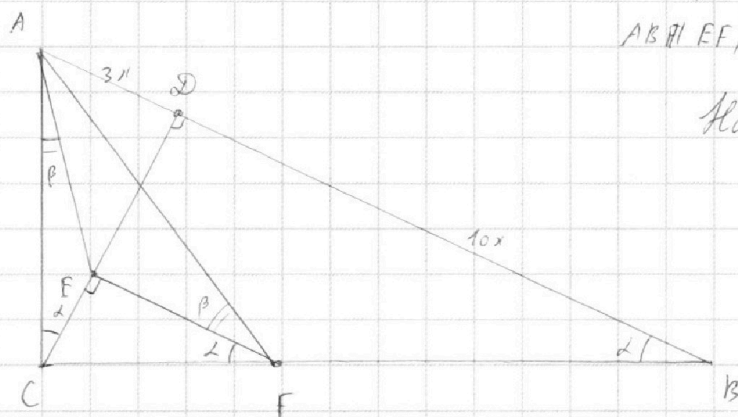
Задача 2 Лист 1

Дано: $\triangle ABC$ - прам; $\angle C = 30^\circ$; Окр. Ω кас.
 AC в A ; $\Omega \cap CD = E$; $\Omega \cap BC = F$;
 $AB \parallel EF$; $AB : BD = 1,3$

Найти: $\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CEF)}$ - ?

Решение.

1. Пусть $AB = 13x$,
тогда $BD = \frac{AB}{1,3} = 10x$



$$AD = AB - BD = 3x$$

2. $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ ($\angle ABC = \angle$; $\angle EFC = \angle ABC = \angle$, как соотв. при $EF \parallel AB$ и сек BC ; $\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = \angle ABC = \angle$).

3. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (по 2-ым углам) $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$; $CD^2 = AD \cdot BD$
 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$ (по 2-ым углам) $CD = x\sqrt{30}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}; AC^2 = AD \cdot AB; AC = x\sqrt{39} \quad \text{Аналогично } BC = \sqrt{BD \cdot AB} = x\sqrt{130}$$

4. По св. угла между касательной и хордой;

$$\angle ACE = \frac{1}{2} \angle AFE = \angle EFA = \beta$$

x

$$\angle AED = \angle ECA + \angle CAE = \alpha + \beta - \text{как внешний}$$

$$\angle CFA = \angle CFE + \angle EFA = \alpha + \beta = \angle AED$$

$\triangle CFA \sim \triangle DEA$ (по 2-ым углам)

$$\frac{CF}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{x\sqrt{39}}{3x} = \sqrt{\frac{39}{3}}; CF = \sqrt{\frac{13}{3}} DE$$

5. $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$, как соотв. при $AB \parallel EF$ и сек CD ,

$\triangle EFC \sim \triangle DCB$ по двум углам

$$\frac{EF}{DB} = \frac{EC}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC}$$

$$\frac{CD - ED}{CD} = \frac{CF}{x\sqrt{130}}$$

$$\left(1 - \frac{ED}{CD}\right) = \frac{\sqrt{\frac{13}{3}} ED}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 лист 2

$$5x - 10\pi = \pi - x$$

$$6x = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\checkmark x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] : \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - 3\pi)) =$$

$$= -x + 3\pi$$

$$-5x + 15\pi = \pi - x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

Прямой по всей x -оси

Ответ. $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 лист 1

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

Задумка, т.е. $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin(\sin x) \geq -\frac{\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{2} \geq 5 \arcsin(\sin x) \geq -\frac{5\pi}{2}$

тогда
$$\begin{cases} \pi - x \geq -\frac{5\pi}{2} \\ \pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x \geq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

I. $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = x + \pi$

$$5x + 5\pi = \pi - x$$

$$x = -\frac{4}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi$$

$$5x - 5\pi = \pi - x; 4x = -6\pi; x = -\frac{3}{2}\pi$$

II. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = x$

$$5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

III. $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x-\pi)) =$

$$= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -x + \pi$$

$$-5x + 5\pi = \pi - x; 4x = 4\pi; x = \pi$$

IV. $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x-2\pi)) =$

$$= x - 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Положим $y = kx - \frac{21}{5}$

$$x^2 + \left(k^2 x^2 - \frac{42}{5} kx + \frac{21^2}{5^2} \right) = 9$$

$$x^2 (k^2 + 1) + x \left(-\frac{42}{5} k \right) + \frac{21^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$D_{1/4} = 0$$

$$\left(\frac{21}{5} \right)^2 k^2 - (k^2 + 1) \left(\frac{21^2}{5^2} - 9 \right) = 0$$

$$-9k^2 + \left(\frac{21}{5} \right)^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = 1 + \left(\frac{5}{21} \right)^2 = \frac{49}{21^2} + 1 = \frac{34}{21}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{34}}{21}, \text{ но упр. коэф. должен быть } 0$$

$$a = k = -\frac{1}{34}, \quad a = -\frac{1}{3k} = \pm \frac{5}{3\sqrt{34}}$$

Получим предельные значения при них не может быть
и решений.

$$\text{Значит предельно } a < -\frac{5}{3\sqrt{34}} \text{ и } a > \frac{5}{3\sqrt{34}}$$

(м.к. упроб. при высших упробов коэф. предельно
не может пересекать обе окружности)

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{3\sqrt{34}} \right) \cup \left(\frac{5}{3\sqrt{34}}; +\infty \right)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4, лист 1

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим (2): $(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

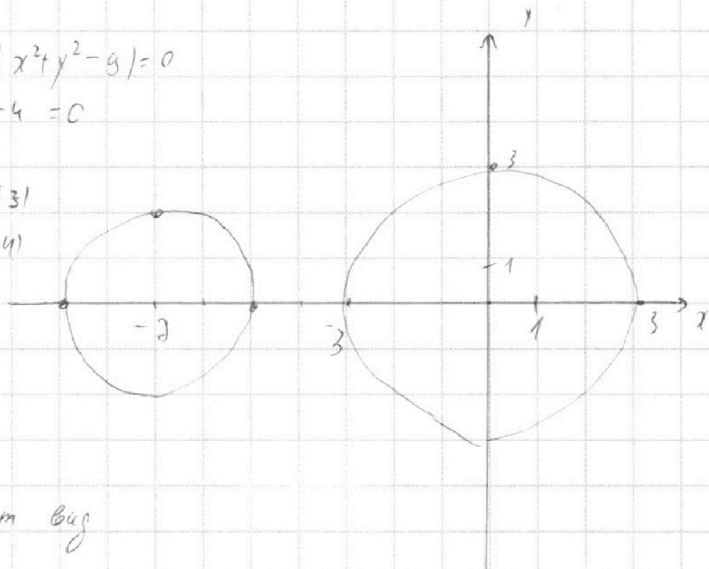
$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Ур-я $\rightarrow$ $\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & (3) \\ x^2 + y^2 = 9 & (4) \end{cases}$

Окружностей

(3) - с центром $(-7, 0)$ и радиус 2

(4) - с ц. $(0, 0)$ и радиус 3



I Если $a=0$, то (1) имеет вид

$$x - 7b = 0$$

$x = 7b$, $b=0$ - ~~представляет собой~~ вертикальная прямая, не

II. Если $a \neq 0$, то (1) имеет вид

$$3ay = 7b - x$$

$$x = \frac{7b - x}{3a}; \quad y^2 = \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2}$$

Подставим полн. y в (2)

$$x^2 + 14x + 49 + \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} + 45 = 0$$

$$x^2 + \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} - 9 = 0$$

$$\left[x^2 \left(1 + \frac{1}{9a^2} \right) + x \left(14 - \frac{14b}{3a^2} \right) + \frac{49b^2}{9a^2} + 45 = 0 \right]$$

$$\left[x^2 \left(1 + \frac{1}{9a^2} \right) + x \left(-\frac{14b}{3a^2} \right) - 9 = 0 \right]$$

Из графиков понятно, что решения этих двух уравн
не имеют пересек / т.к. они лежат на непересека.

Окружностей $\Rightarrow$ существование 4-х решений уравнения

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4 лист 2

II $a \neq 0$: Уравнение 1. урав. прямой

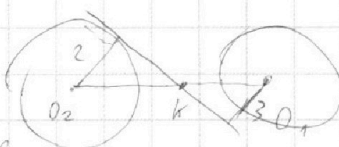
$$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a} \quad \text{С помощью выбора } b \text{ можно}$$

выставить любую свободной коэф., т.е. двести
прямую вверх/вниз как угодно. При малом укл. коэф.,
конечно, прямая пересекает обе окружности, пока
не дойдет до предельно пологой своей касательной
этих окружностей (внутренней). Найдем ее укл. коэф.
касаясь равновеликой крив., что равно ст. укл. ар-го праме
ее радиус. Пусть прямая $y = kx + c$ - ее касатч.
тогда $\frac{|0 - 0 - c|}{\sqrt{1 + k^2 + c^2}} = 3$

$$\frac{|0 + 7k - c|}{\sqrt{1 + k^2 + c^2}} = 2$$

$$\begin{cases} c^2 = 9 + 9k^2 + 9c^2 \\ 49k^2 - 14kc + c^2 = 4 + 4k^2 + 4c^2 \\ 9k^2 + 9c^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим затем



$$O_1, O_2 = 7$$

$$\begin{aligned} &\text{из подобия} \\ &\frac{O_2 k}{k O_1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$O_2 k + k O_1 = 7$$

$$k O_1 = \frac{21}{5}$$

Тогда, т.е. тогда

$|7b; 0|$ всегда

исполн. на вершине прямой,
рассмотрим ее при $b = -\frac{3}{5}$ (тогда проходит через k)

$$y = -\frac{x}{30} - \frac{21}{5} \quad \text{Затем условие касания с}$$

той окружностью через дискр. Пусть $k = -\frac{1}{39}$
прямой



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

как сумма возрастающих на $\mathbb{R}$ функций

Тогда пусть $f(a_1) = 7$ - ес. ~~хорош~~ решение уравнения

$f(x) = 7$. Тогда единственное решение уравнения

$f(x) = -7$; $f(-x) = 7$; $-x = a_1$, $x = -a_1$.

т.е. Тогда Отсюда

$$a + b = a_1 - a_1 = 0$$

$$\log_6 x + \log_6 y = 0$$

$$\log_6 6xy = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

I Рассмотрим первое равенство.

$$\log_2^4(6x) - 2\log_2 7 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} = \frac{3}{2\log_2 6x} - 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Условие на то, что } 6x > 0 \\ (2\log_2 6x) \text{ осталось, как и то, что } 6x \neq 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2\log_2^5 6x + 8\log_2 6x - 4 = 0 \\ \log_2 6x \neq 0 \end{cases}$$

Пусть $\log_2 6x = a$

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 4 = 0 \\ a \neq 0 - \text{осв. не кор.} \end{cases} \quad \text{Пусть } f(a) = 2a^5 + 8a - 4$$

$$f'(a) = 10a^4 + 8$$

II. Рассмотрим второе равенство. $f(x) = 2x^5 + 8x$

$$\log_2^4 y + 6\log_2 7 = \log_2 (7^5) - 4$$

$$\log_2^4 y + \frac{6}{\log_2 y} = \frac{5}{2\log_2 y} - 4 \quad \left(\begin{array}{l} (2\log_2 y) \text{ Аналогично I можно} \\ \text{не ставить} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2\log_2^5 y + 8\log_2 y + 7 = 0 \\ \log_2 y \neq 0 \end{cases}$$

Пусть $b = \log_2 y$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$b \neq 0$ - осв. не корни

III. Наши равенства свелись к виду

$$\begin{cases} f(a) - 4 = 0 \\ f(b) + 7 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $f(x)$ - нечетная

Функция: Действительно

$$f(-x) = 2(-x)^5 + 8(-x) = -1 \cdot (2x^5 + 8x) = -f(x)$$

Пусть $f(x)$ с крестом того $f(x)$ и при $x \in \mathbb{R}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7. Итого 2

Безграничной общности будем считать, что $\angle AA_1C$ - тупой (случай, когда он острый - симметричен относительно замены A на B , и B на A).
Тогда $\cos \angle AA_1C = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle AA_1C} = -\frac{3}{5}$, $\cos \angle AA_1B = \frac{4}{5} = \cos(\frac{\pi}{2} - \angle AA_1C) = \frac{3}{5}$
По т. косинусов в треугольнике AA_1C : $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 + 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos \angle AA_1C =$
 $= 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot (-\frac{3}{5}) = 250 + 90 = 340$
По т. косинусов в треугольнике AA_1B : $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos \angle AA_1B =$
 $= 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 250 - 90 = 160$

3. Искать длину медиан будем следующим образом:
удвоим BB_1 за точку B_1 до K . Получим параллель $BK \parallel AC$
(по пр. AK $B_1B = B_1K$ и $AB_1 = B_1C$). По св. диаг. паралл-ля

$$AC^2 + BK^2 = 2(AB^2 + BC^2), \quad BB_1^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2(160 + 100) - 340}{4} =$$

$$= \frac{180}{4} = 45, \quad BB_1 = \sqrt{45}$$

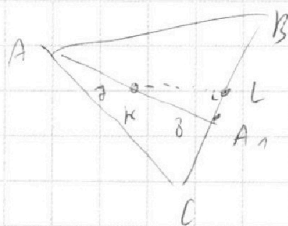
$$\text{Аналогично: } CC_1^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2(340 + 100) - 160}{4} =$$

$$= \frac{720}{4} = \frac{360}{2} = 180 = 45 \cdot 4, \quad CC_1 = 2\sqrt{45}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{45} \cdot 2 = 30 \cdot 45 = 1350$$

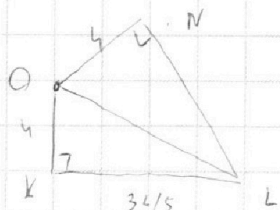
4. Т.к. L и N - точки касания, $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp BC$;
 $ON \perp (SAC) \Rightarrow ON \perp AC$. Тогда, по пр. перп. прямой и плоскости,
 $BC \perp (OKN)$. Тогда $(OKN) \perp (ABC) = KL$, где $KL \perp BC$, т.е. KL -
высота треугольника, соотв. высоту, опущенную из K на BC , т.е. $L \in BC$

В плоскости (SAC) : $SL = SN = 3$, как точки касания
Также тогда $KM = SL = 3$; $AK = AM - KM = 7$; $AK = 15 - 7 = 8 = AA_1 - AK$
 $= AA_1 - AK$



$$\text{из } \triangle AA_1K: KL = \sin \angle KA_1L \cdot KA_1 = \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{32}{5}$$

5. Выясним размеры: $(OK \perp N)$



$$\text{из } \triangle OKL: LN = KL = \frac{32}{5}, \quad \angle OKL = \angle ONL$$

$$\text{по катету и гипотенузе } \angle NLO = \angle OKL$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 лист 3

$$\tan \angle OLK: \tan \angle OLK = \frac{OK}{KL} = \frac{4 \cdot 5}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\angle NLK = 2 \angle OLK = 2 \arctg \frac{5}{8}$$

Заметим, что $\angle NLK$ - угол между касательными к окружности в точках N и L .

Угол $\angle S(BC)A$, т.к. $KL \perp BC$ и $NL \perp BC$.

Ответ: а) 1350 б) $2 \arctg \frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

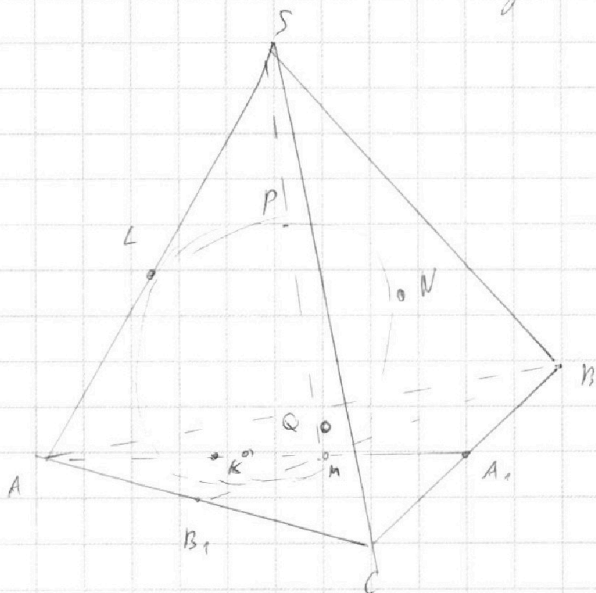
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7 Лист 1



Дано: $SABC$ - пирамида;

AA_1, BB_1, CC_1 - медианы;

Ω - сф., Ω кас AS в L ; Ω кас (ABC)

в $K \in AM$; $\Omega \cap SM = \{P; Q\}$

$SP = MQ$; $S(ABC) = 60$; $SA = BC = 10$

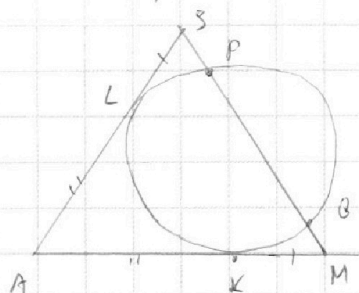
а) Найти $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$

б) Ω кас. BSC в N ; $SN = 3$

пр. Ω - ч. кас. $\angle LSA, \angle BSA \angle S(BC)A$?

Решение.

1. Вспомогательный чертеж плоскости (ASM)



а) Независимо от расположения

P и Q . $SQ = KP$

$SQ = SP + PQ = MP + QP \cdot MP$ (на этом

картинке, если мы примем направление, то

$MP = OM - QP = SP - PQ = SQ$)



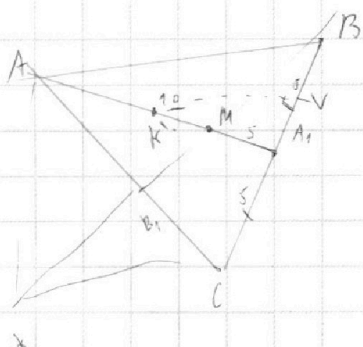
Отметим, тогда по теореме

Поток, т.к. сф. кас. $AM \perp AS$:

$$MK^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL. \text{ Крестом пока,}$$

$$AL = AK \text{ как отр. кас.} \Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$$

2. Вспомогательный чертеж (ABC)



$$AM = \frac{3}{2} AA_1 = 15, \text{ т.к. } M - \text{центр тяжести.}$$

$$S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC) = 30, \text{ т.к. } S(AA_1C) = S(ABA_1) \rightarrow$$

* BC равна высоте и ось LA_1 и HA_1B тоже равна. $S(AA_1C) = AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1C \cdot \sin \angle AA_1C$

$$\sin \angle AA_1C = \frac{30 \cdot 2}{15 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

Первое рав-во

$$\log_2^4(6x) - 2 \log_6 x^2 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} - \frac{3}{2} \log_{16x^2} 7 + 4 = 0$$

$$2 \log_2^5(6x) - 3 \log_2^2(6x) + 8 \log_2 6x - 2 = 0$$

$$\log_2 6x \neq 0$$

$$6x \neq 0$$

$$\log_2^4(6x) = \log_{36x^2} (343) + 2 \log_6 x^2 - 4$$

Заметим, что при $x > 0$: $f_1(x) = 6x$ - возрастает;

$f_2(x) = 36x^2$ - возрастает, тогда $f_3(x) = \log_2^4(6x) \uparrow$, т.к.

$$\log_2^4 y + 6 \log_2 y = \log_2 (17^5) - 4$$

$$\log_2^4 y + \frac{6}{\log_2 y} - \frac{5}{2 \log_2 y} + 4 = 0$$

$$\log_2^4$$

$$\log_2^4 y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 y} + 4 = 0$$

$$2 \log_2^5 y + 8 \log_2 y + 7 = 0$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{2}{\log_2 6x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\log_2 6x} + 4 = 0$$

$$2 \log_2^5 6x + 8 \log_2 6x - 7 = 0$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 8(a + b) = 0$$

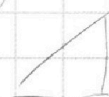
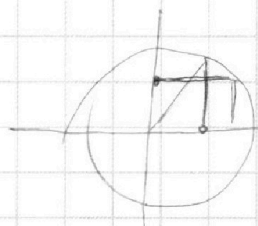
$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sqrt{1 - \cos^2 x})$$

$$5 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$\pi - x$$



$$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5 \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$(-7 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$y = -x + 7 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Или: } a_1 = -b_1$$



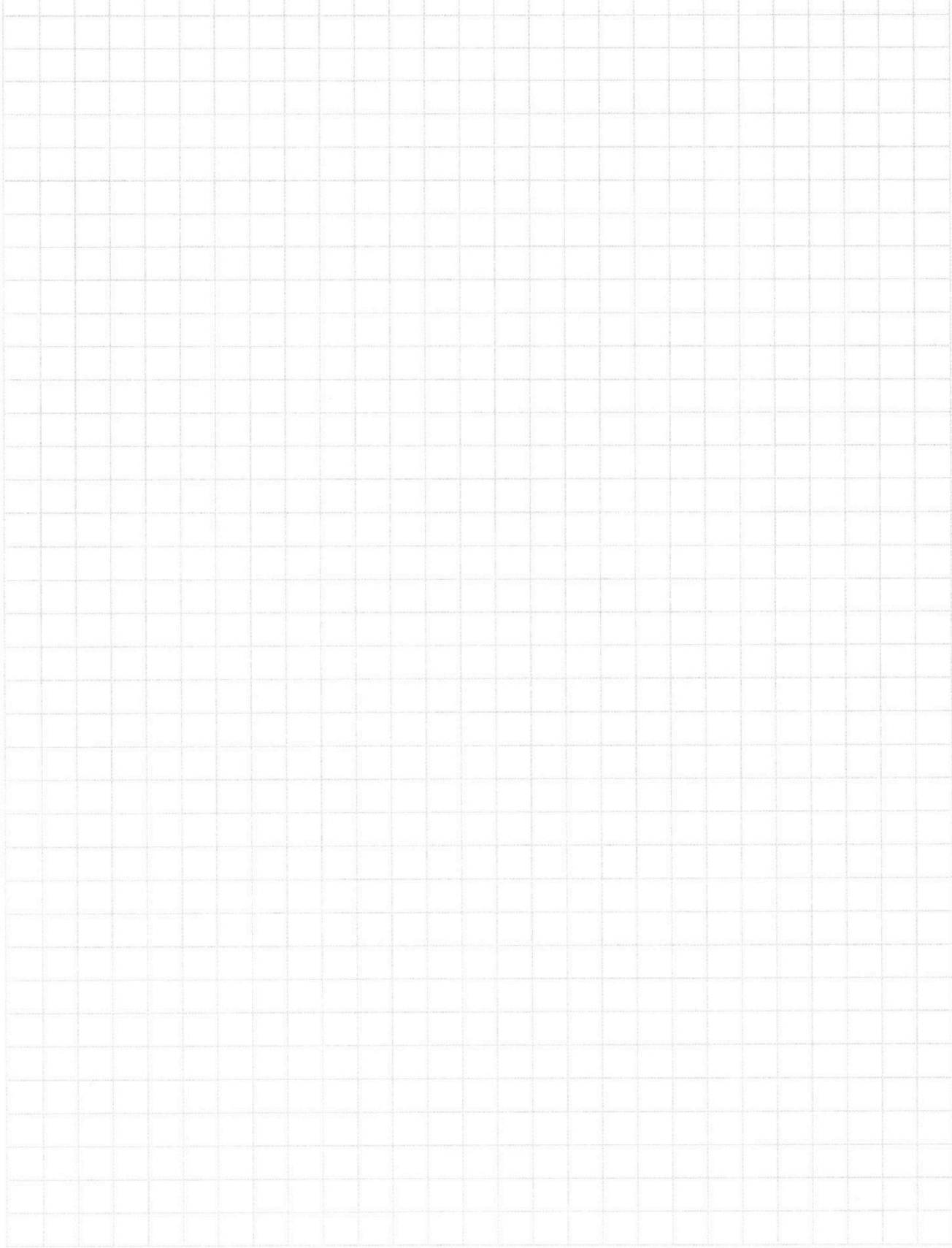
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 МСЭ
т.е. найдемся в том, что $b > 0$,
т.е. найдемся в том, что $b > 0$,

Затем условие на дискриминант.

$$\begin{cases} R_{14} > 0 \\ R_{24} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(1+t) + 14x(1-bt) + 49b^2t + 45 = 0 \\ x^2(1+t) - 14x \cdot bt - 9 = 0 \end{cases}$$

Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x^2(1+t) + 14x(1-bt) + 49b^2t + 45 &= 0 \\ x^2(1+t) - 14x \cdot bt - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Затем условие на их дискриминант.

$$\begin{cases} 14^2(1-bt)^2 - 49 \cdot 4b^2 \cdot 4(1+t)(49b^2t + 45) > 0 \\ 14^2b^2t^2 + 36(1+t) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49(1-2bt + b^2t^2) - (49b^2t^2 + 45t + 49b^2t + 45) > 0 \\ 14^2b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-98b - 49b^2 - 45) + 4 > 0 \\ 49b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t(-49(b+1)^2 + 4) + 4 > 0 \\ 49b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☒

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a_1 + b_1 = 2$$

$$b_1 + c_1 = 13$$

$$a_1 + c_1 = 14$$

$$a_1 - c_1 = c_1 - a_1 = c$$

$$2c_1 = 20$$

$$c_1 = 10$$

$$a_1 = 4, b_1 = 3$$

$$a_2 + b_2 = 11$$

$$b_2 + c_2 = 15$$

$$c_2 - a_2 = 4$$

$$a_2 + c_2 = 18$$

$$2c_2 = 22$$

$$c_2 = 11, a_2 = 8, b_2 = 4$$

$$+ a_3 + b_3 = 14$$

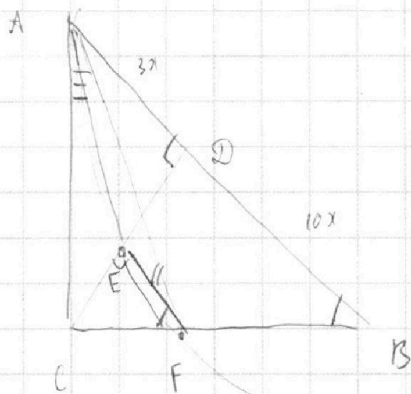
$$b_3 + c_3 = 18$$

$$c_3 - a_3 = 4$$

$$+ a_3 + c_3 = 14$$

$$c_3 = 24, a_3 = 14, b_3 = 0$$

$$43 - 14 = 29$$



$$AB : BD = 13 : 10$$

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CEF)} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{AC \cdot AB}{CE \cdot EF}$$

$$\triangle CAF \sim \triangle CBA$$

$$CF = AC$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$AC^2 = CF \cdot BC$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$\triangle BDC \sim \triangle BDA$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$$

$$BC^2 = BD \cdot AB =$$

$$\angle AFD = \angle CFA$$

$$\triangle FCA \sim \triangle EDA$$

$$\frac{FC}{ED} = \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

$$FC = \frac{ED \cdot AC}{AE}$$

$$\frac{FC}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$$