МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 20y + 64\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ — степени вхождения 2 в a, b и c соответственно.
$\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — степени вхождения 3 в a, b и c соответственно.
$\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ — степени вхождения 5 в a, b и c соответственно.

1.

$$\begin{aligned} ab \,\vdots\, 2^8 3^{14} 5^{12} \,\vdots\, 2^8 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_a+\alpha_b \geq 8 \quad (1) \\ \alpha_b+\alpha_c \geq 12 \quad (2) \\ \alpha_a+\alpha_c \geq 14 \quad (3) \end{cases} \\ bc \,\vdots\, 2^{12} 3^{20} 5^{17} \,\vdots\, 2^{12} &\Rightarrow \\ ac \,\vdots\, 2^{14} 3^{21} 5^{39} \,\vdots\, 2^{14} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{2}$: $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = 17$

$\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{17}$, т.к. 2 входит в разложение на простые множители числа abc в степени $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c$.

2.

$ab \,\vdots\, 2^8 3^{14} 5^{12} \,\vdots\, 3^{14} \Rightarrow \beta_a+\beta_b \geq 14$ (4)

$bc \,\vdots\, 2^{12} 3^{20} 5^{17} \,\vdots\, 3^{20} \Rightarrow \beta_b+\beta_c \geq 20$ (5)

$ac \,\vdots\, 2^{14} 3^{21} 5^{39} \,\vdots\, 3^{21} \Rightarrow \beta_a+\beta_c \geq 21$ (6)

$\frac{(4)+(5)+(6)}{2}$: $\beta_a+\beta_b+\beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2}$

$\Rightarrow \beta_a+\beta_b+\beta_c \geq \frac{56}{2} = 28 \Rightarrow abc \,\vdots\, 3^{28}$.

3.

$ab \,\vdots\, 2^8 3^{14} 5^{12} \,\vdots\, 5^{12} \Rightarrow \gamma_a+\gamma_b \geq 12 \Leftrightarrow \gamma_a+\gamma_b = 12+k, k \geq 0$
$bc \,\vdots\, 2^{12} 3^{20} 5^{17} \,\vdots\, 5^{17} \Rightarrow \gamma_b+\gamma_c \geq 17 \Rightarrow \gamma_b+\gamma_c = 17+n, n \geq 0$
$ac \,\vdots\, 2^{14} 3^{21} 5^{39} \,\vdots\, 5^{39} \Rightarrow \gamma_a+\gamma_c \geq 39 \Rightarrow \gamma_a+\gamma_c = 39+m, m \geq 0$.

$(\gamma_a+\gamma_b)+(\gamma_b+\gamma_c) \geq \gamma_a+\gamma_c \Rightarrow 12+k+17+n \geq 39+m$ (7)

~~Итак~~. $\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c = \frac{2(\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}{2} = \frac{12+k+17+n+39+m}{2} \geq$

$\geq \frac{39+m+39+m}{2} = 39+m \geq 39 \Rightarrow abc \,\vdots\, 5^{39}$.

Первое нестрогое неравенство верно по соотношению (7).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(1 (продолжение))

$$\begin{cases} abc \vdots 2^{17} \\ abc \vdots 3^{28} \\ abc \vdots 5^{39} \\ (2^{17}, 3^{28}) = (2^{17}, 5^{39}) = (3^{28}, 5^{39}) = 1 \end{cases} \Rightarrow abc \vdots 2^{17}3^{28}5^{39} \Rightarrow$$

$\Rightarrow abc \geqslant 2^{17}3^{28}5^{39}$

Оценка: $2^{17}3^{28}5^{39}$.

Пример: возьмём $a = 2^5 3^8 5^{17}$, $b = 2^3 3^6 5^0$,

$c = 2^9 3^{14} 5^{22}$. $ab = 2^{5+3} 3^{8+6} 5^{17+0} = 2^8 3^{14} 5^{17} \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$.

$bc = 2^{3+9} 3^{6+14} 5^{22} = 2^{12} 3^{20} 5^{22} \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$.

$ac = 2^{5+9} 3^{8+14} 5^{17+22} = 2^{14} 3^{22} 5^{39} \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$.

$abc = 2^{5+3+9} 3^{8+6+14} 5^{17+22} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

Пример подходит.

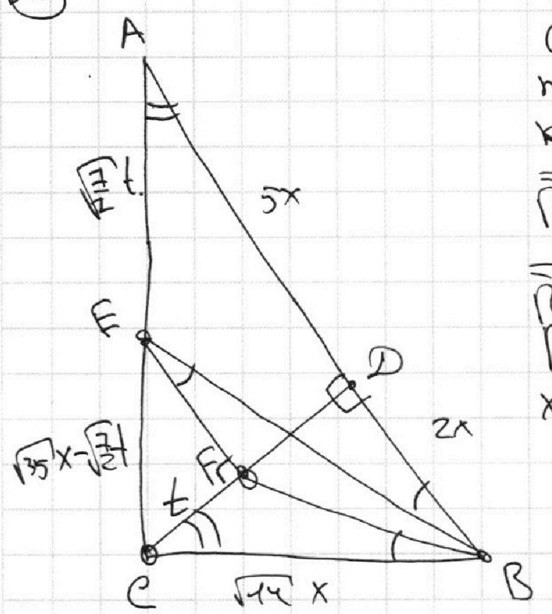
Ответ: $2^{17}3^{28}5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2



$AD = 5x$, тогда $DB = 2x$, $CD = \sqrt{AD\cdot DB} = \sqrt{5x\cdot 2x} = \sqrt{10}\,x$ по свойству высоты, проведённой к гипотенузе. $BC = \sqrt{BD^2+CD^2} = \sqrt{4x^2+10x^2} = \sqrt{14}\,x$ по теореме Пифагора, $AC = \sqrt{AD^2+CD^2} = \sqrt{25x^2+10x^2} = \sqrt{35}\,x$ по теореме Пифагора.

По теореме об угле между хордой и касательной $\angle FEB = \angle FBC$ при хорде FB и касательной CB. $EF \parallel AB \Rightarrow \angle ABE = \angle FEB$ как накрест лежащие при параллельных. $\angle DCB = 90^\circ - \angle ACD = \angle CAD$, так как ΔACB, ΔACD – прямоугольные треугольники. $\Delta CFB \sim \Delta AEB$ по углам $\angle FCB = \angle EAB$ и $\angle FBC = \angle EBA \Rightarrow$ Если $CF = t$, то $AE = t\cdot\frac{AB}{BC} = t\cdot\frac{7x}{\sqrt{14}\,x} = \sqrt{\frac{7}{2}}\,t$. $CE = AC - AE = \sqrt{35}\,x - \sqrt{\frac{7}{2}}\,t$ $EF \parallel AB \Rightarrow$ по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$ $\frac{\sqrt{35}\,x - \sqrt{\frac{7}{2}}\,t}{\sqrt{35}\,x} = \frac{t}{\sqrt{10}\,x}$

$1 - \frac{t}{\sqrt{10}\,x} = \frac{t}{\sqrt{10}\,x} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{10}\,x}{2}$. $EF \parallel AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CAD \Rightarrow S_{CEF} = S_{CAD}\cdot\left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = S_{CAD}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{10}\,x}\right)^2 = S_{CAD}\cdot\left(\frac{\frac{\sqrt{10}\,x}{2}}{\sqrt{10}\,x}\right)^2 = \frac{S_{CAD}}{4}$.

$AD:DB = 5:2 \Rightarrow S_{CAD} = \frac{5}{7}S_{ABC}$. $S_{CEF} = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$. Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

③ $10\arcsin(\cos x) = 10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = f(x)$.

Если $0 \le x \le \pi$, то $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = 10\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Если $2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $0 \le x - 2\pi k \le \pi \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = f(x-2\pi k) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right)$.

Если $-\pi < x < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = 10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Если $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $-\pi < x - 2\pi k < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = f(x - 2\pi k) = 10\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k\right)$.

$$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x\end{cases}\\ \begin{cases}-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 10\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi k\right) = \pi - 2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 8x = 4\pi + 20\pi k\end{cases}\\ \begin{cases}-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 12x = -4\pi + 20\pi k\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\\ 2\pi k \le \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \le \pi + 2\pi k\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}\\ -\pi + 2\pi k < -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} < 2\pi k\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}\\ -1 \le k \le 1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}\\ 0 \le k \le 1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -2\pi\\ x = \frac{\pi}{2}\\ x = \frac{3\pi}{\cancel{2}}\\ x = -\frac{\pi}{3}\\ x = \frac{4\pi}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{\cancel{2}}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

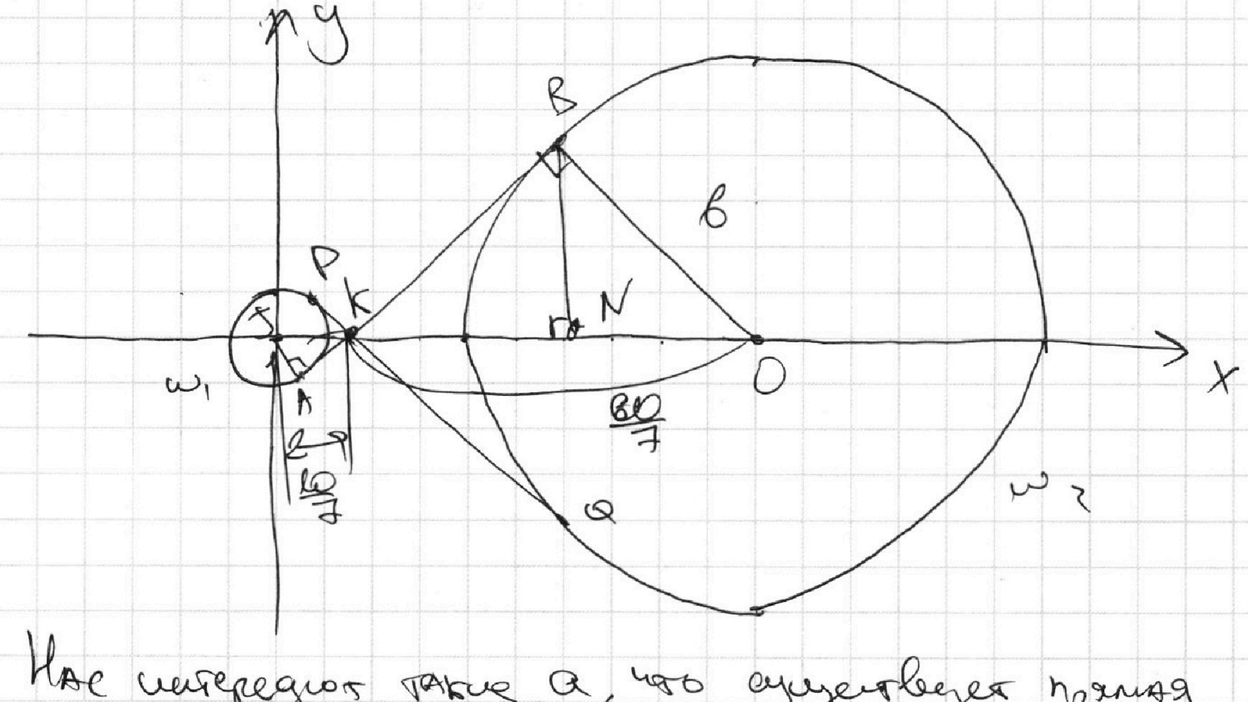
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) $\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3} \\ \left[\begin{array}{ll} x^2+y^2=1 & (2) \\ x^2+(y-10)^2=6^2. & (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

Уравнения (2) и (3) задают окружности ω_1 и ω_2 с радиусами 1 и 6 соответственно и центрами (0; 0) и (0; 10) соответственно.



Нас интересуют такие a, что существует прямая с наклоном $\frac{a}{3}$, пересекающая ω_1 и ω_2 в четырёх точках (ω_1 в двух и ω_2 в двух), так как $\frac{4b}{3}$ мы можем варьировать.
Понятно, что наклон не превышает наклона общей внеш. AB и не меньше внутренней касат. наклона ~~внешней~~ общей внутр KA, PQ. Остальные наклоны достижимы (можно немножко двигать A и B и получать нужный наклон)
$\triangle AKN \sim \triangle OBK$ по 2м углам $\Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

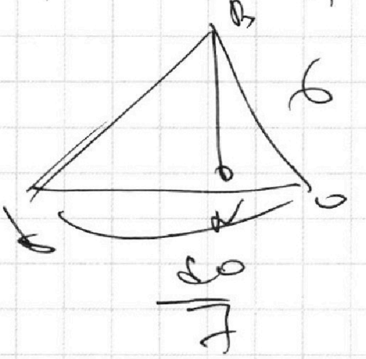
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4

$\Rightarrow JK : KO = JA : BO = 1:6$

$\Rightarrow KO = \frac{6}{7} \cdot JO = \frac{60}{7}$



$KB = \sqrt{\left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2} = \frac{6\sqrt{51}}{7}$

$\Rightarrow tg\angle BKO = \frac{a}{3} = \frac{7}{\sqrt{51}}$

$\Rightarrow a = \frac{21}{\sqrt{51}}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left[-\frac{21}{\sqrt{51}}; \frac{21}{\sqrt{51}}\right]$

(наклон PQ по модулю равен наклону AB)

$K = PQ \cap AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(5) $a=\log_5 2x$, $b=\log_5 y$.

Первое равенство можно записать как

$a^4-\frac{3}{a}=\frac{4}{3a}-3 \Leftrightarrow 3a^5-9=4-9a$ [$a=0$ не подходит] $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a^5+9a-13=0$. Второе равенство можно записать как

$b^4+\frac{4}{b}=-\frac{1}{3b}-3 \Leftrightarrow 3b^5+12=-1-9b$ [$b=0$ не подходит] $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3b^5+9b+13=0$. $\begin{cases} 3a^5+9a-13=0 & (1) \\ 3b^5+9b+13=0 & (2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1)+(2)$: $3(a^5+b^5)+9(a+b)=0$

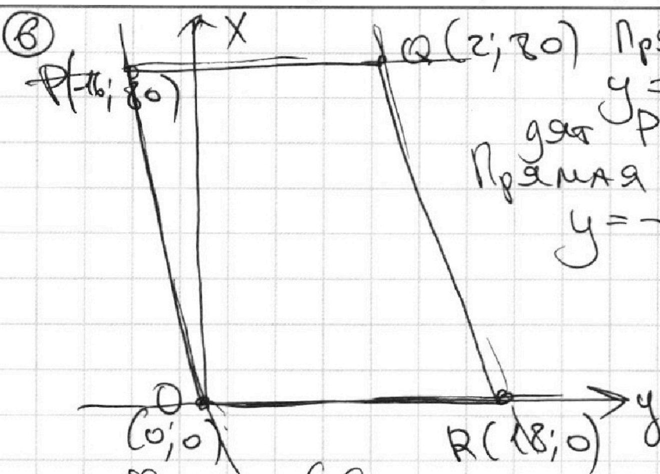
$(a+b)\Big(3\underbrace{(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}+9\Big)=0 \Leftrightarrow$

$=\frac{a^5+b^5}{a+b}=\frac{a^5-(-b)^5}{a-(-b)}>0$, т.к. $f(t)=t^5$ — возрастающая функция.

$\Leftrightarrow a+b=0$. Получается, $a+b$ может принимать только значение $0 \Leftrightarrow \log_5 2x+\log_5 y = \log_5(2xy)$ может принимать только значение $0 \Leftrightarrow 2xy$ может принимать только значение $1 \Leftrightarrow xy$ может принимать только значение $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

6



Прямая PO задаётся уравнением $y=-5x$, так как под него подходят P и O: $80=-5\cdot(-16)$, $0=-5\cdot 0$.
Прямая QR задаётся уравнением $y=-5x+90$, так как под него подходят Q и R:
$80=-5\cdot(2)+90$,
$0=-5\cdot(18)+90$.
Полоса, образованная прямыми QR и PO, задаётся ~~совокупностью~~ системой неравенств

$$-5x\le y\le -5x+90 \Leftrightarrow 0\le 5x+y\le 90.$$

Горизонтальные прямые PQ и OR задаются уравнениями $y=80$ и $y=0$ соответственно. Полоса, образованная прямыми PQ и OR, задаётся системой неравенств $0\le y\le 80$.

PQRO — пересечение двух полос, которые мы рассмотрели. Значит, точка (x,y) лежит в PQRO тогда и только тогда, когда выполняется система:

$$\begin{cases} 0\le 5x+y\le 90 \ (1) \\ 0\le y\le 80 \end{cases}$$

$5x_2-5x_1+y_2-y_1=45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5x_2+y_2)-(5x_1+y_1)=45$. Т.к. $x_2, y_2, x_1, y_1\in\mathbb{Z}$ и верно неравенство (1), возможны только следующие варианты:

$5x_1+y_1=0$, $5x_2+y_2=45$
$5x_1+y_1=1$, $5x_2+y_2=46$
⋮
$5x_1+y_1=45$, $5x_2+y_2=90$.

В общем случае: $5x_1+y_1=k$, $5x_2+y_2=k+45$, $0\le k\le 45$, $k\in\mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6 (продолжение)

$$5x_1+y_1=k \Leftrightarrow 5x_1=k-y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k-y_1}{5} \\ y_1 \underset{5}{\equiv} k \\ 0 \le y_1 \le 80 \end{cases}$$

Для уравнения $5x_2+y_2=45+k$ аналогично.

Заметим, что $5\cdot 0 \le y_1 \le 5\cdot 16$.

Поэтому для $k \vdots 5$ существует 17 y_1 таких, что $y_1 \underset{5}{\equiv} k$; для $k \not\vdots 5$ существует 16 y_1 таких, что $y_1 \underset{5}{\equiv} k$. Причём кол-во y_1 таких, что $y_1 \underset{5}{\equiv} k$, и таких, ~~что~~ y_2, что $y_2 \underset{5}{\equiv} 45+k$, одинаково, т.к. $k \underset{5}{\equiv} 45+k$.

Для $k \vdots 5$ получаем 17^2 пар (x_1 и x_2 однозначно получаются из y_1 и y_2 соответственно).

Для $k \not\vdots 5$ получаем 16^2 пар.

$5\cdot 0 \le k \le 5\cdot 9$, поэтому для всех $k \vdots 5$ кол-во пар равно $10\cdot 17^2$, для всех $k \not\vdots 5$ кол-во пар равно $36\cdot 16^2$. Всего: $36\cdot 16^2+10\cdot 17^2=$ $=12106$.

Ответ: 12106.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

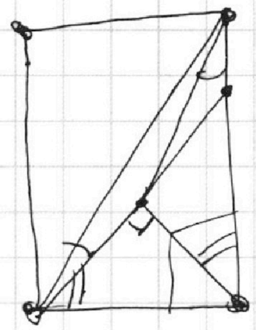
МФТИ

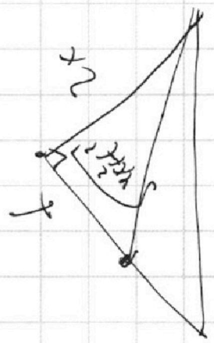
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

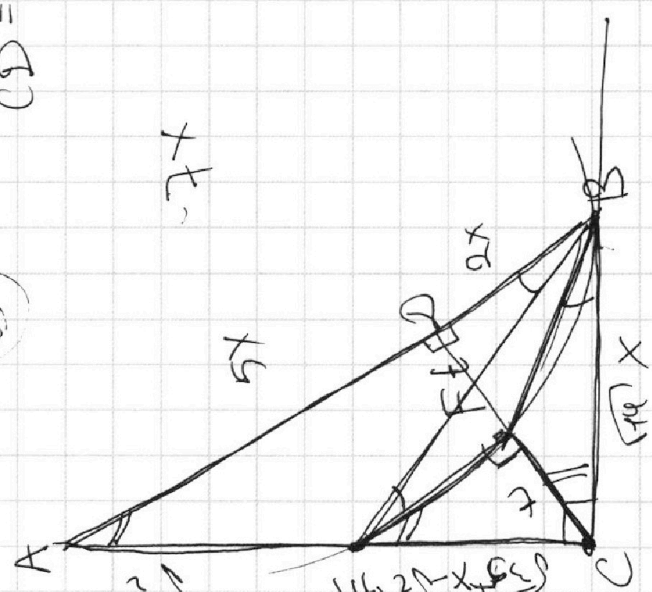
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



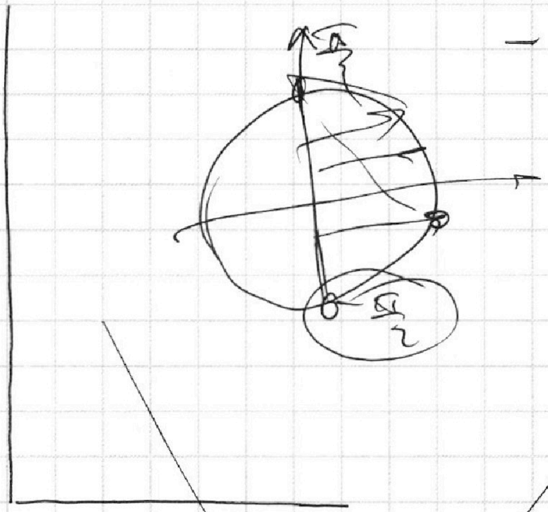




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-1 < -\frac{l}{3} - \frac{k}{3} < 0$$

$$0 < \frac{l}{3} + \frac{k}{3} < 1$$

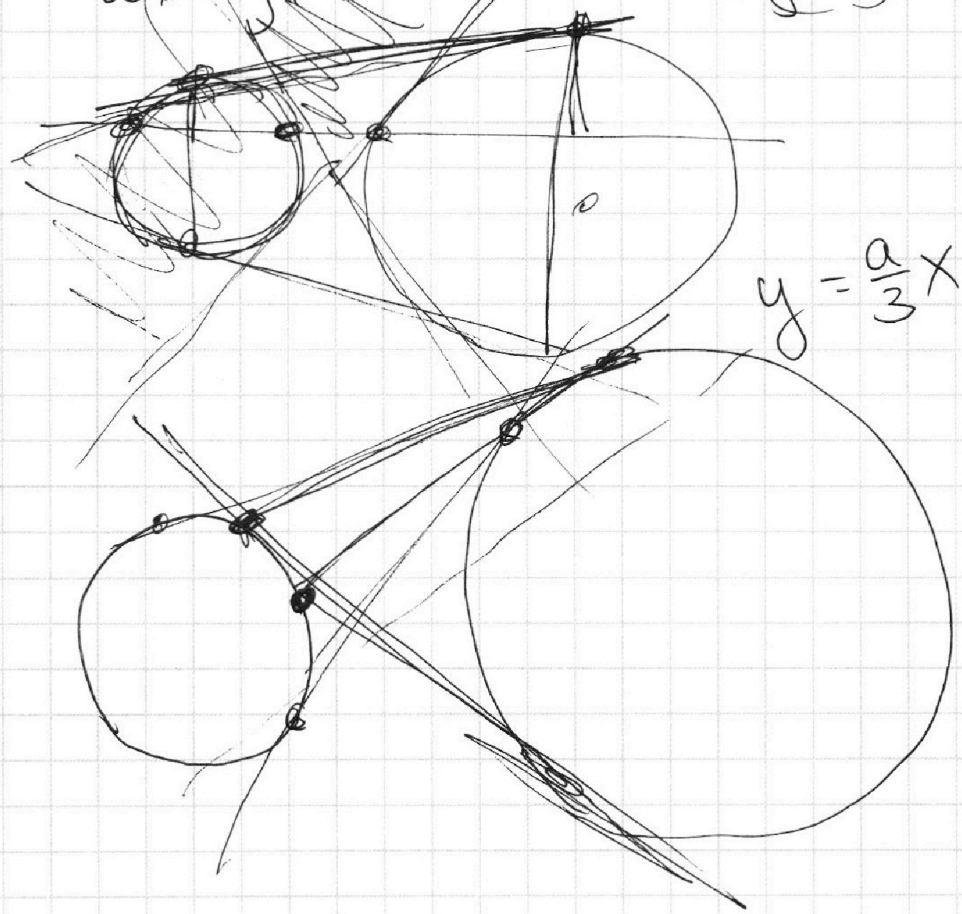
$$0 < l + k < 3$$

$$-1 < k < 2$$

$$0 \leq k \leq \frac{1}{2}$$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$x^2 + (y-10) = 6$$



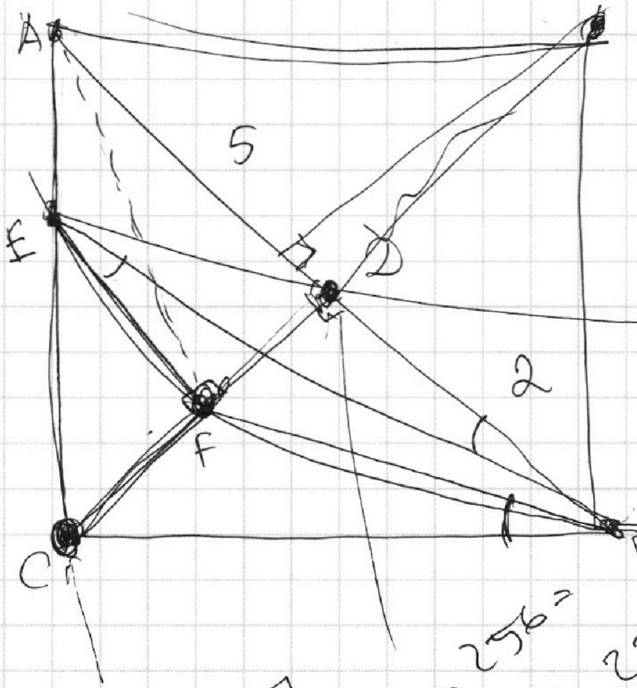
$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

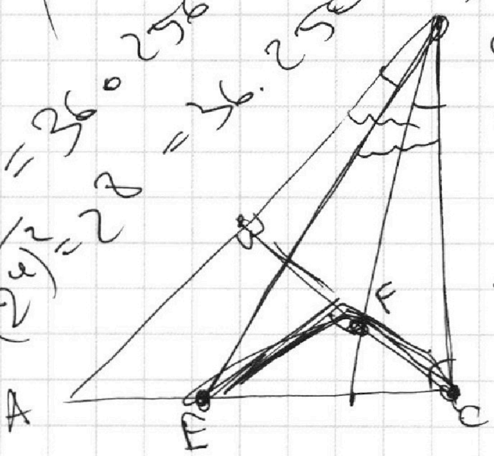


$S_{ABC} : S_{CEF}$

$S_{ADC} : S_{ABC} = \frac{5}{7}$

$10 \cdot 17^2 = 289 \cdot 10$

2890



$\sqrt{10}$

$36 \cdot 16^2 = 36 \cdot 256 = 36 \cdot 250$

$(2^4)^2 = 2^8$

36000

$9000 + 216$

9216

2890

2106

$t = \log_5(2x)$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$

$\frac{3t^5 - 3 - 4 + 9t}{3t} = 0$

$\frac{3t^5 + 9t - 7}{3t} = 0$

$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$

$\frac{3b^5 + 9b + 11}{3b} = 0$

$\frac{3b^5 + 12 - 1 + 9b}{3b} = 0$

$3t^5 + 9t - 7 = 0$

$b + t = \log_5 2xy$

$\log_5 2x$

$\log_5 y$

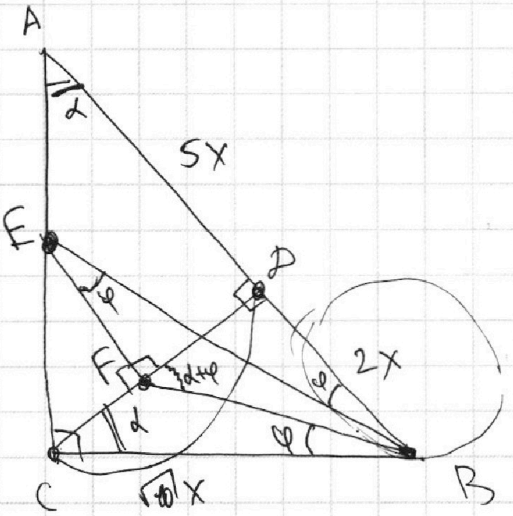
$\cancel{3 \cdot 7^7 + 9 - 1 = 0}$

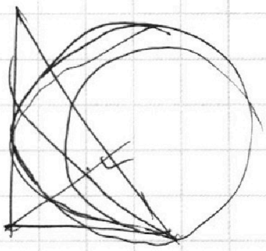
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

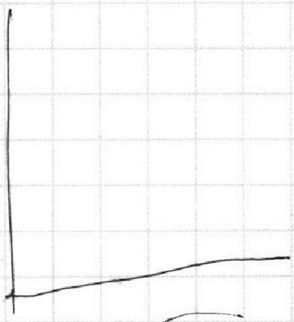
1 2 3 4 5 6 7

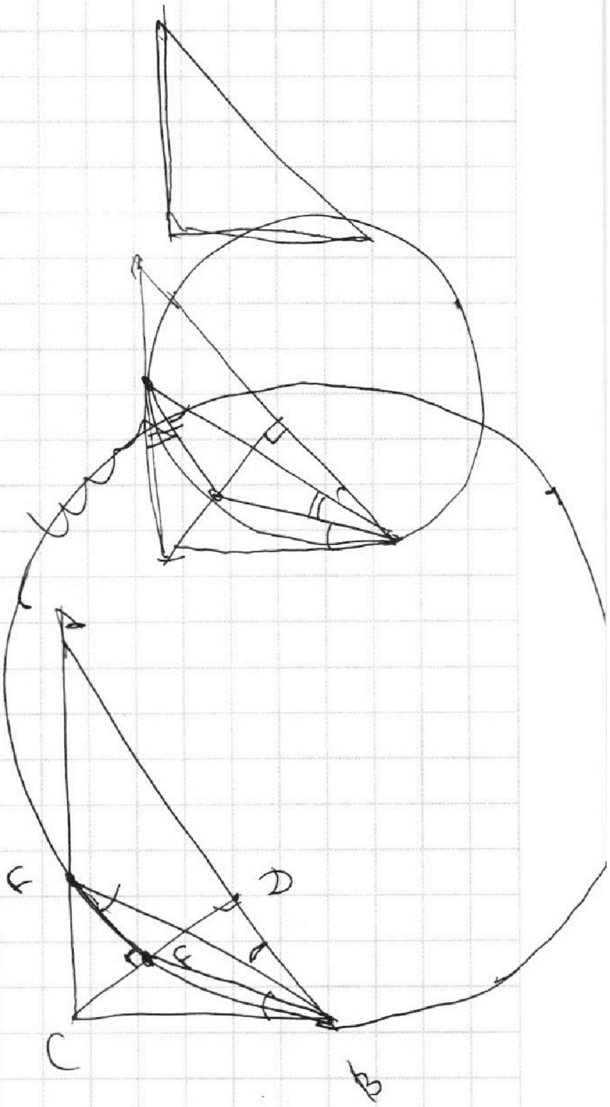
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

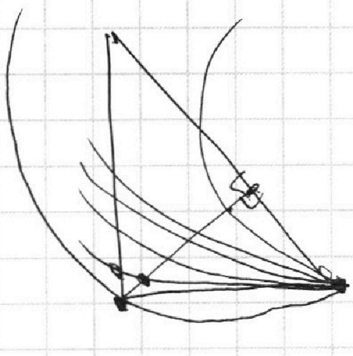
$180^\circ - \cancel{\varphi} - 90^\circ - \alpha \cancel{+\varphi} + \varphi + \cancel{\varphi} =$
$= 90^\circ - \alpha$

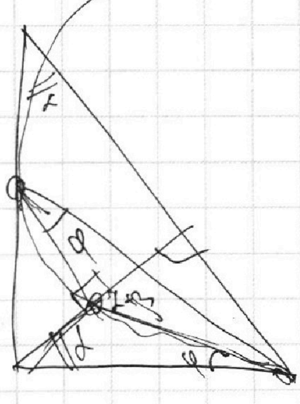


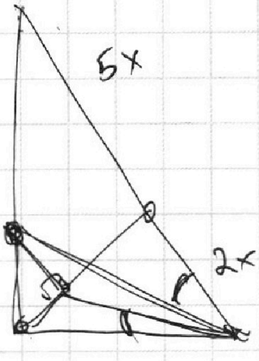










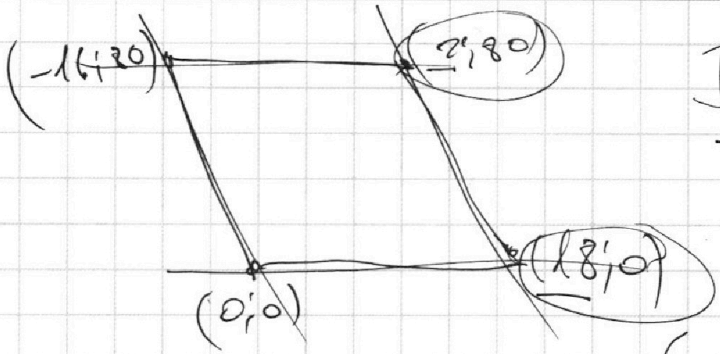


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\boxed{0 \le y \le 80}$

$-5x \le y \le -5x+90$

$0 \le 5x+y \le 90$

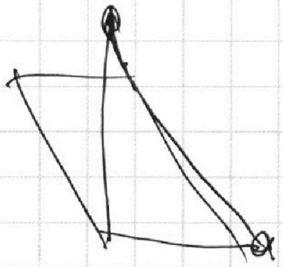
$(5x_2+y_2)-(5x_1+y_1)=$

$=45.$

$5x_1+y_1=0,\ 5x_2+y_2=45$

$\vdots$

$5x_1+y_1=45,\ 5x_2+y_2=90.$



$5x_1+y_1=k \qquad 5x_1=k-y_1$

$0 \qquad k\ [5m \ \ 5m+4] \qquad \boxed{y_1 \equiv k}$

16

$16^2 \cdot 36 + \underbrace{17^2 \cdot 10}_{2890} =$

$= \cancel{3}$

$\frac{36}{72} \qquad 36 \cdot 256 =$

$= \frac{36000}{4} + 216 =$

$= 9000 + 216 = 9216$

$2890 + 9216 = \boxed{12106}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

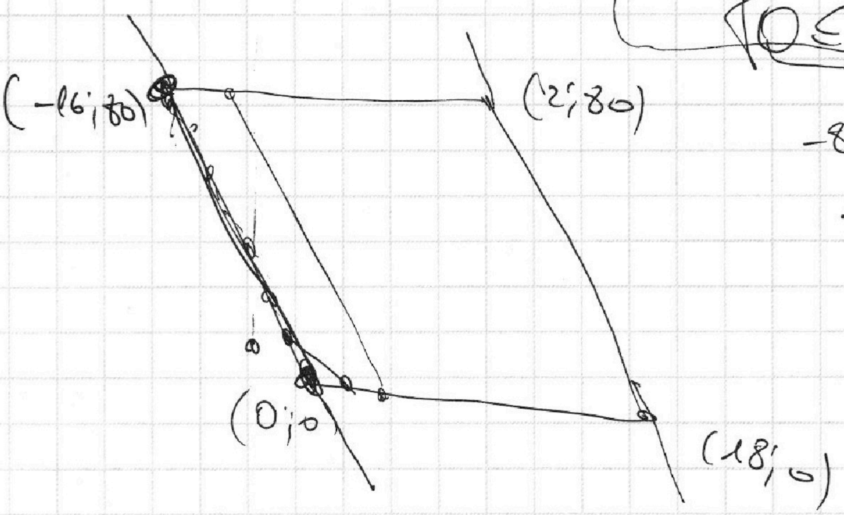
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~$0 \le x+5y \le 90$~~

$\boxed{0 \le 5x+y \le 90}$

$\boxed{0 \le y \le 80}$



$-80 \le 5x \le 90$

$-16 \le x \le 18$

~~$(5x_1+y_1)+5x_2=$~~

$(5x_2+y_2)-(5x_1+y_1)=45$

$\boxed{5x_1+y_1=0}$

80 17

x_1 −16

0·5 5·0 17

5·16

$5x_2+y_2=45$

16

0 80

5·0

5·0+4

5·15

5·15+4

5·16

2(0 17·17 45

1 16·16 46

45 90

$5x_1$

5·0 17·16

5·0+1 16·16

5·0+4 16·16

$11 \cdot 90 \cdot (17 \cdot 16 + 4 \cdot 16 \cdot 16) +$

$+ 17 \cdot 16)$

5·8+...

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$ $\quad 3a^5 - 9 = 4 - 9a$

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$ $\quad 3a^5 + 9a - 13 = 0$

$3b^5 + 12 = 1 - 9b$

$3b^5 + 9b + 11 = 0$

$\cancel{a+b - ? \quad a+b = \log_5(2xy)}$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$3b^5 + 9b + 11 = 0$

$\cancel{3(a^5+b^5) + 9(a+b) - 2 = 0}$

$\cancel{(a+b)(3(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 9) = 2}$

$3a^5 - 9 = 4 - 9a \quad 3a^5 + 9a - 13 = 0$

$3b^5 + 12 = -1 - 9b$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

$(a+b)(\cancel{3a^4 - 3a^3}$

$3(a^4 - a^3b + \ldots + b^4) + 9) = 0$

$\log_5 2xy = 1 \quad xy = \frac{1}{2}$

$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -3$

$a^2b^2 - ab(a^2+b^2)$

$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

$(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 = \quad ab(a^4+b^4)$

$= (a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3a^4$ $\quad \underbrace{a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4} + 3 = 0$

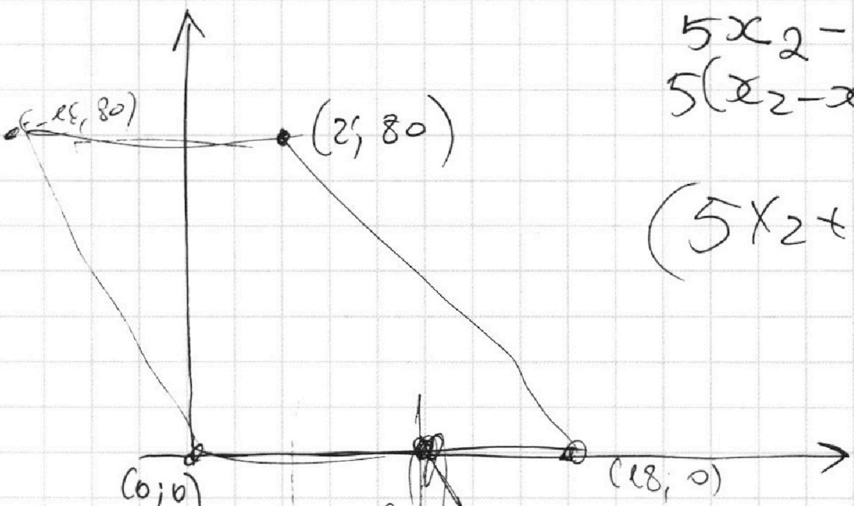
$1 - 1 + 1 - 1 + 1$ $\quad ab(a^4+b^4)$

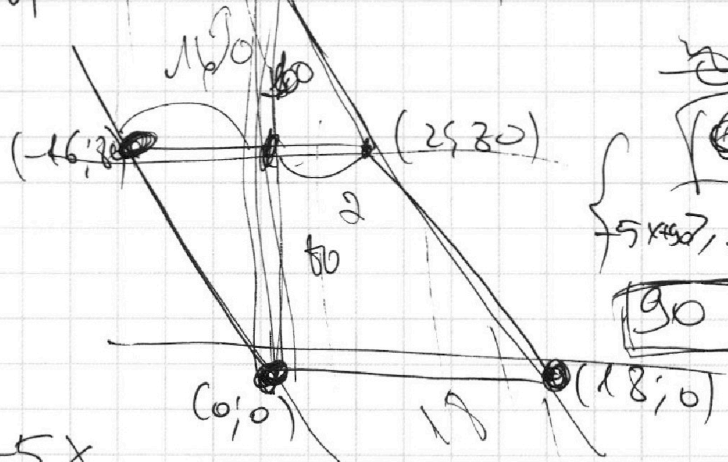
$\frac{a^5+b^5}{a+b} = \frac{a^5-(-b)^5}{a-(-b)} > 0$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$

$(5x_2 + y_2) - (5x_1 + y_1) = 45$





~~$0 \le x \le 80$~~

$$\begin{cases} \boxed{0 \le y \le 80} \\ 5x+90 \ge y \ge -5x \end{cases}$$

$\boxed{90 \ge x + 5y \ge 0}$

$\boxed{y = -5x}$

$y \ge -5x$ $\quad \frac{y}{90} + \frac{x}{18} = 1$

$y = -5x + 90$

~~$t(t+80)$~~

$\frac{t}{t+8} + \frac{t}{9}$

$9t = t + 80$

37

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a}$

$\begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 8 \\ \beta_a + \beta_b \geq 14 \\ \gamma_a + \gamma_b \geq 12 \end{cases}$ $\alpha_b + \alpha_c \geq$

$\alpha_a + \alpha_b = 8$
$\alpha_b + \alpha_c = 12$
$\alpha_a + \alpha_c = 14$

$\alpha_a - \alpha_c = -4$
$\alpha_a + \alpha_c = 14$

$\alpha_a = 5$
$\alpha_c = 9$
$\alpha_b = 3$

$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{8+12+14}{2} = \frac{34}{2} = 17$

$\beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{14+20+21}{2} = \frac{55}{2} \geq \frac{56}{2} = 28$

$\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c \geq \frac{12+17+39}{2} = \frac{68}{2} = 34$

$abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{34} = \cancel{3^{27} 5^{17} \cdot 10^{17}}$

$\begin{cases} \beta_a + \beta_b = 14 \\ \beta_b + \beta_c = 20 \\ \beta_a + \beta_c = 22 \end{cases}$ $\beta_a - \beta_c = -6$, $\beta_a + \beta_c = 22$

$\beta_a = 8$
$\beta_c = 14$
$\beta_b = 6$

$\begin{cases} \gamma_a + \gamma_b = 12 \\ \gamma_b + \gamma_c = 17 \\ \gamma_a + \gamma_c = 39 \end{cases}$ $\gamma_a - \gamma_c = -5$, $\gamma_a + \gamma_c = 39$

$\gamma_a = 17$
$\gamma_c = 22$
$\gamma_b = -5$

35 $\cancel{29}$

$\gamma_a + \gamma_c \geq 39$

$\gamma_a + \gamma_b = 12$
$\gamma_b + \gamma_c = 17$
$\gamma_a + \gamma_c = 39$

$\gamma_a - \gamma_c = -3$
$\gamma_a + \gamma_c = 39$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2^{17}\ 3^{28}$

$$\begin{cases} r_a + r_b \geq 12 \\ r_b + r_c \geq 17 \\ r_a + r_c \geq 39 \end{cases}$$

$39 \leq r_a + r_c \leq (r_a + r_b) + (r_b + r_c)$

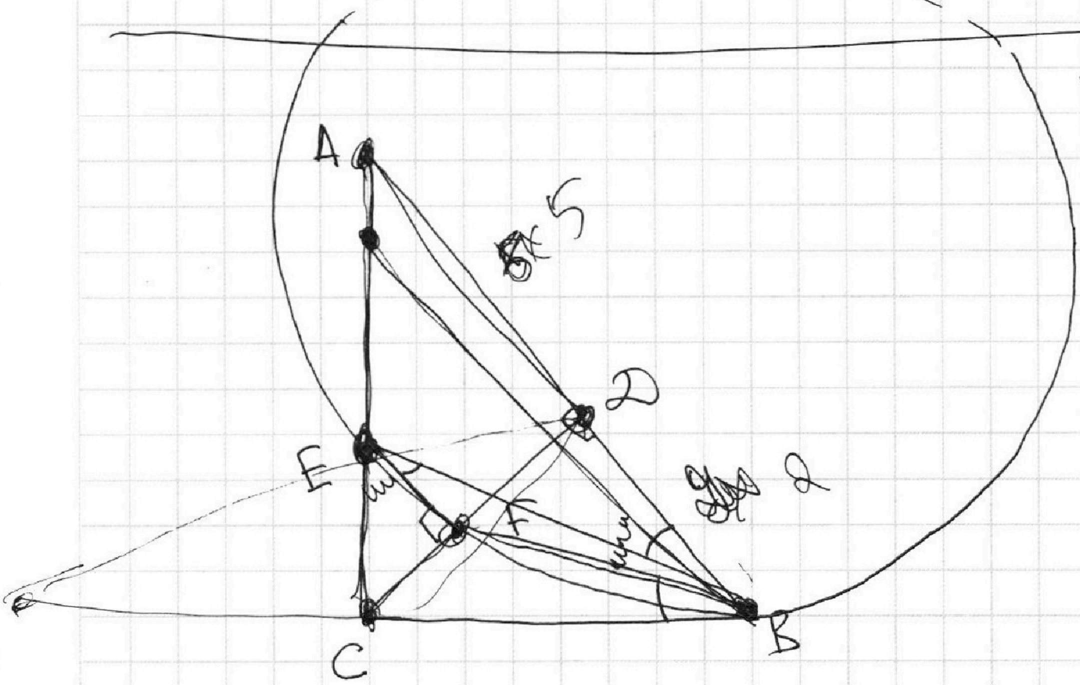
$r_a + r_b = 12 + k$
$r_b + r_c = 17 + n$
$r_a + r_c = 39 + m$

$12 + k + 17 + n \geq 39 + m$
$k + n - m \geq 10 \qquad k + n \geq 10 + m$
$68 + k + n + m \geq 78 + 2m \geq 78$

39

$r_a + r_b = 17$
$r_b + r_c = 22$
$r_a + r_c = 39$

$r_b = 8$
$r_a = 17$
$r_c = 22$



$\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

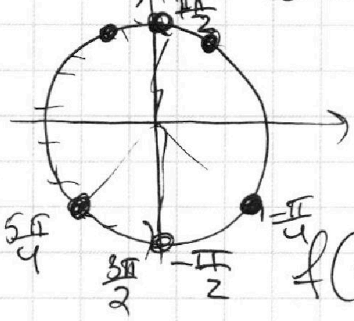
$10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}-x}$, $0 \le x \le \pi$.

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - x \le \frac{\pi}{2}$

$-\pi \le -x \le 0$

$0 \le x \le \pi$



$f(x) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - \frac{\pi}{2} + x = \boxed{x + \frac{\pi}{2}}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x < \frac{3\pi}{2}$

$-\pi < x < 0$

$0 < -x < \pi$

$\boxed{-\pi < x < 0}$

$2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k$

$0 \le x - 2\pi k \le \pi$

$x + y = \pi$ $\quad y = \pi - x$

$\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \le \pi + 2\pi k$

$-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$

$\pi + 5\pi k \le 2\pi + 4\pi k$

$\boxed{k \le 1}$

~~$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$~~

$-1, \le k = 1$

$2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k$

$f(x) = f(x - 2\pi k) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$f(x) = x + \frac{\pi}{2} - 2\pi k$, $\quad -\pi + 2\pi k \le x \le 2\pi k$.

$10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = \pi - 2x$ $\quad 5\pi - 10x + 20\pi k =$

$= \pi - 2x$

$x = -$

$8x = 4\pi + 20\pi k$

$\boxed{k \ge -1}$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$4\pi k \le \pi + 5\pi k$

~~$-\pi + 2\pi k$~~ $\quad 2\pi k \le \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \Leftrightarrow$ ~~$4\pi k \le \pi + 5\pi k$~~

$5k \le 1$ $\quad \boxed{k \le 0}$

$\pi + 5\pi k \le 2\pi + 4\pi k$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x+2\pi k\right)=\pi-2x$ $\quad$ $5\pi-10x+20\pi k=\pi-2x$

$8x=4\pi+20\pi k$

$5\pi+10x-20\pi k=\pi-2x$ $\quad$ $12x=-4\pi+20\pi k$

$2\pi k\le\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi k}{2}\le\pi+2\pi k$

$0\le\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2}\le\pi$ $\quad$ $0\le\pi+\pi k\le2\pi$

$-1\le k\le1$

$-\pi+2\pi k<-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi k}{3}<2\pi k$

$-\pi<-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi k}{3}<0$ $\quad$ $-3<-1-k<0$

$-2<-k<1$

$-1<k<2$

$0\le k<1$

$\frac{\pi(1+5k)}{2}$ $\quad$ $-2\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{3}(5k-1)$ $\quad$ $-2\pi,\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$