



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

$$\begin{aligned}
 a, b, c \text{-кат: } & ab: 2^9 3^{10} 5^{10} \\
 & bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\
 & ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим степень входящая 3-и в a, b и c  
 пусть в b она входит в 0 степени  $\Rightarrow$  в a хотя бы в 10 (из ab:  $3^{10}$ )  
 в c хотя бы в 13 (из bc:  $3^{13}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 3 \quad 0 + 10 + 13 = 23$$

пусть в 1 степен  $\Rightarrow$  в a хотя бы в ~~10~~ 9 (10-1=9 из ab:  $3^{10}$ )  
 в c хотя бы в 12 (13-1=12 из bc:  $3^{13}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 3 \quad 1 + 9 + 12 = 22$$

пусть в 2 степен  $\Rightarrow$  в a хотя бы в 8 (10-2=8 из ab:  $3^{10}$ )  
 в c хотя бы в 11 (13-2=11 из bc:  $3^{13}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 3 \quad 2 + 8 + 11 = 21$$

пусть в  $\geq 3$  степен  $\Rightarrow$  в a и c хотя бы в 18 (из ac:  $3^{18}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 3 \geq 3 + 18 = 21$$

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 3 - 21$$

Рассмотрим степень входящая 2

пусть в b она входит в 0 степени  $\Rightarrow$  в a хотя бы в 9 (из ab:  $2^9$ )  
 в c хотя бы в 14 (из bc:  $2^{14}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 2: 0 + 9 + 14 = 23$$

пусть в 1 степени  $\Rightarrow$  в a хотя бы в 8 (9-1=8 из ab:  $2^9$ )  
 в c хотя бы в 13 (14-1=13 из bc:  $2^{14}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 2: 1 + 8 + 13 = 22$$

пусть в 2 степени  $\Rightarrow$  в a хотя бы в 7 (9-2=7 из ab:  $2^9$ )  
 в c хотя бы в 12 (14-2=12 из bc:  $2^{14}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 2: 2 + 7 + 12 = 21$$

пусть в  $\geq 3$  степени  $\Rightarrow$  в a и c хотя бы в 19 (из ac:  $2^{19}$ )

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 2 \geq 3 + 19 = 22$$

$$\Rightarrow \min \text{ степеней входящих } 2 - 21$$

min степень входящая 5 в ac = 30 т.е. ac:  $5^{30} \Rightarrow$

$$\text{для abc min ст. входящая } 2 = 21 \Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{где } \begin{cases} \text{в } a: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ \text{в } b: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ \text{в } c: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases}$$

$$\text{Пример: } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10} \quad b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{30} \quad c = 2^{17} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \quad ac = 2^{19} \cdot 3^{19} \cdot 5^{30} \quad bc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

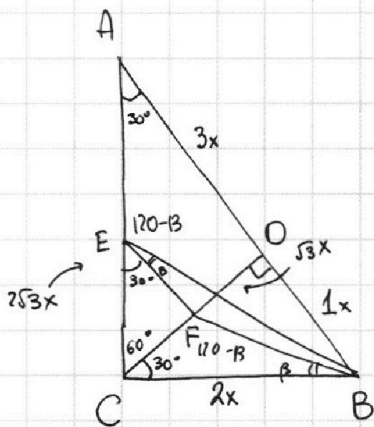
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

**Чистовик**



$AD:DB = 3:1$

CD - высота в пр. тр  $\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$

в пр.  $\triangle OBC$   $CB^2 = DB^2 + DC^2 = 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CB = 2x$

в пр.  $\triangle ADC$   $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 9x^2 + 3x^2 = 12x^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}x$

$\angle BAC = \angle FEC$  ( $AB \parallel EF$ )

$\angle BAC = \angle DCB$  ( $\angle BAC + \angle ACD = 90^\circ$  в  $\triangle ADC$ )  
 $\Rightarrow \angle DCB + \angle ACD = 90^\circ$  в  $\triangle ACB$ )

$\angle BAC = \angle FEC = \angle DCB = \alpha$

в  $\triangle DBC$   $\sin \alpha = \frac{DB}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

CB - касат  $\Rightarrow \angle FBC = \beta$  - угол между хордой FB и касат CB

$\angle FBC = \angle FEB$  ( $\angle FEB$  описывается на хорду FB)

$\Rightarrow \angle FEB = \beta \Rightarrow$

$\angle AEB = 180 - \angle CEB = 180 - (30 + \beta) = 120 - \beta$

$\triangle CFB$ :  $\angle CFB = 180 - \angle FCB - \angle FBC = 180 - 30 - \beta = 120 - \beta$

$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB$  по 3-м углам:  $\angle FCB = \angle EAB = 30^\circ$

$\angle AEB = \angle CFB = 120^\circ$

$\angle ABE = \angle FBC$

$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CF} = \frac{4x}{2x} = 2$

пусть  $EC = y \Rightarrow AE = AC - EC = 2\sqrt{3}x - y$

в  $\triangle CEF$   $\cos 60 = \frac{CF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{EC}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow$

$\frac{AE}{CF} = \frac{2\sqrt{3}x - y}{y/2} = 2 \Rightarrow$

$2\sqrt{3}x - y = y \Rightarrow 2\sqrt{3}x = 2y \Rightarrow y = \sqrt{3}x \Rightarrow$

$EC = \sqrt{3}x \Rightarrow$   
 в  $\triangle ECF$   $CF = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$   
 $EF = \frac{3}{2}x$

$S_{ABC} = \frac{CB \cdot AC}{2} = \frac{2x \cdot 2\sqrt{3}x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$

$S_{CEF} = \frac{CF \cdot EF}{2} = \frac{\frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2}$

$= \frac{16}{3}$   
**Ответ  $\frac{16}{3}$**

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

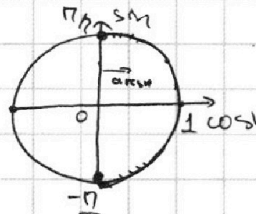
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Rightarrow$$

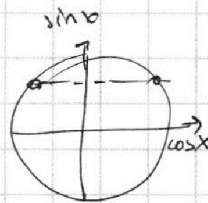


$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{x}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right]$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \quad | \sin$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$



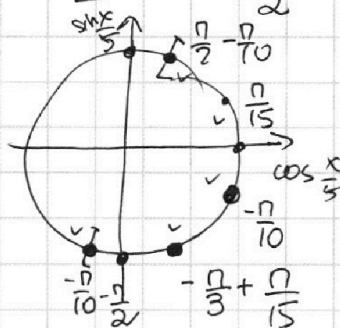
$$\left[ \begin{aligned} \frac{\pi}{2} - x &= \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - x &= \pi - \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + 2\pi k \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{6x}{5} &= \frac{4\pi}{10} + 2\pi k \\ \frac{4x}{5} &= -\frac{4\pi}{10} + 2\pi k \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} \\ x &= -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{3} \\ \frac{x}{5} &= -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{3} \\ \frac{x}{5} &= -\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{2} \end{aligned} \right.$$



~~Проверка:~~ Проверка:

$$\frac{\pi}{15} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{10} - \frac{5}{10}$$

$$-\frac{9}{15} = -\frac{6}{10}$$

$$-90 = -90$$

$$\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{15}$$

$$= \frac{2\pi}{5}$$

$$x = -\frac{6\pi}{10} = -\frac{3\pi}{5}$$

$$x = -\frac{4\pi}{15}$$

$$x = -\frac{\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{15}$$

$$x = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

Ответ:  $-\frac{3\pi}{5}; -\frac{4\pi}{15}; -\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{15}; \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

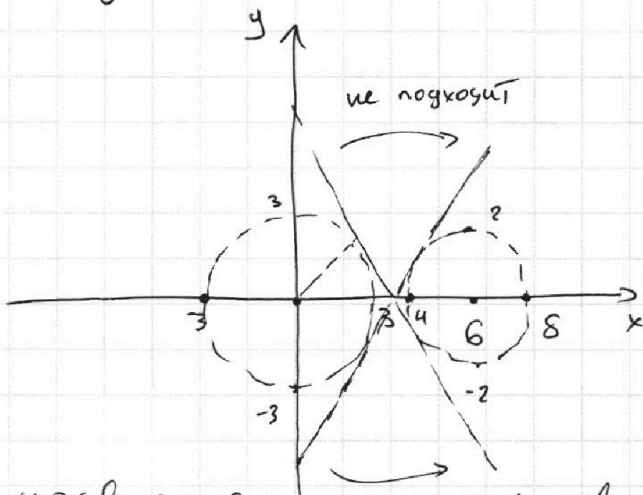


№4

1ая страница

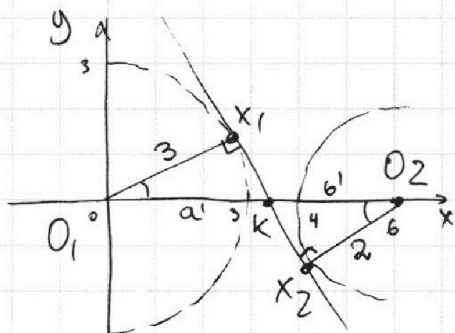
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 = 3^2 \text{ ур-ие окружности} \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \\ &\text{ур-ие оуп.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ax + 2y - 3b = 0 &\leftarrow \text{прямая} \\ y &= -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \\ &\uparrow \\ &\text{наклон} \end{aligned}$$

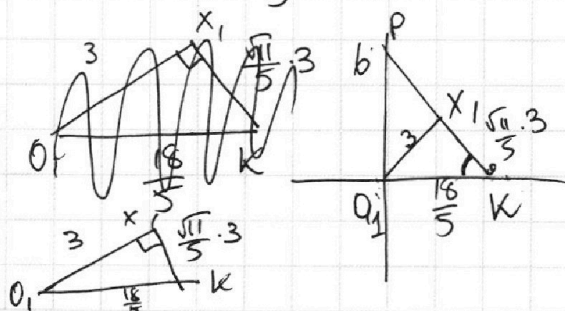
уравнение может иметь ровно 4 решения, когда прямая пересекает две окружности в 2-х точках  $\Rightarrow$  касаясь одну окружность в 2-ух точках



треугольнички подобны  $\Rightarrow$   
 $(\triangle O_1 X_1 K \text{ и } \triangle K O_2 X_2)$  по 2 углам  $\angle O_1 X_1 K = \angle O_2 X_2 K$   
 $\angle O_1 K X_1 = \angle O_2 K X_2$   
 $\frac{O_1 X_1}{O_2 X_2} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{2} \Rightarrow a' = \frac{3}{2} b'$   
 $a' + b' = 6$   
 $\frac{3}{2} b' = 6 \Rightarrow b' = \frac{12}{5} \Rightarrow a' = \frac{18}{5}$

$\Rightarrow$  прямая проходит через точку  $(\frac{18}{5}, 0) \Rightarrow$

$$0 = -\frac{a}{2} \cdot \frac{18}{5} + \frac{3}{2} b \Rightarrow \frac{18}{10} a = \frac{3}{2} b \Rightarrow a = \frac{15}{18} b$$



по 2 углам  $\angle PO_1 K = \angle O_1 X_1 K = 90^\circ$   
 $\angle PKO_1 = \angle X_1 K O_1$   
 $\triangle PKO_1 \sim \triangle X_1 K O_1 \Rightarrow$   
 $\frac{PO_1}{O_1 K} = \frac{X_1 K}{X_1 O_1} \Rightarrow$   
 $\frac{3b}{18} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{5} \cdot 3}{\frac{18}{5}} \Rightarrow a = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{75} b = \frac{3\sqrt{11}}{5} b$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

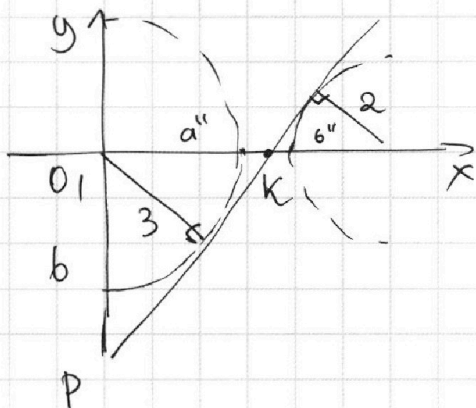
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

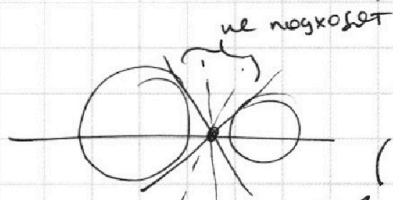


2ая страница

аналогично  $a'' = \frac{18}{5}$   $b'' = \frac{12}{5}$   
(картинка симметрична относительно оси OX)

~~$\Rightarrow b = \frac{18 \cdot \sqrt{11}}{75} \Rightarrow b = \frac{15 \cdot 18 \cdot \sqrt{11}}{75}$~~   
 ~~$-\frac{3\sqrt{11}}{5}$~~   
 ~~$a = -\frac{15}{\sqrt{11}}$~~   $b = \frac{-18}{\sqrt{11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$  не подходят прямые между касательной и могут пересечь так одну окружность



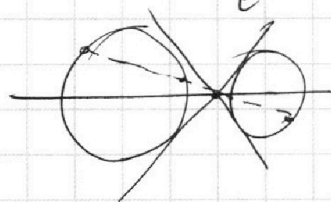
где их  $a \in [-\frac{15}{\sqrt{11}}, \frac{15}{\sqrt{11}})$   $a \in [\frac{15}{\sqrt{11}}, +\infty)$   
 $a \in (-\infty, -\frac{15}{\sqrt{11}}]$

Ответ:  ~~$(-\frac{15}{\sqrt{11}}, \frac{15}{\sqrt{11}})$~~   ~~$(\frac{15}{\sqrt{11}}, +\infty)$~~   ~~$(-\infty, -\frac{15}{\sqrt{11}}]$~~

все оставшиеся подходят

$\frac{5b}{18} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow b = \frac{18}{\sqrt{11}}$

$a = \frac{15}{18} b = \frac{15}{18} \cdot \frac{18}{\sqrt{11}} = \frac{15}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2ая страница

$$\frac{(a^2+b^2)(a-b)ab - 7}{a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - a^2b^4} = \frac{1}{b^5}$$

$$\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = t^4 - t^3 + t^2 - t = t^3(t-1) + t(t-1)$$

$$= t(t^2+1)(t-1)$$

Рассмотрим уравнение  $t^4 + 8 + \frac{7}{2} \frac{1}{t} = 0$

для него  $\log_3 x$  и  $-\log_3 y$  являются корнями

~~$\Rightarrow \log_3 x$  и  $\log_3 y$  являются корнями  $t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$~~

$\log_3 x$  и  $-\log_3 y$  являются корнями  $t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$

замечим, что при  $t \geq 0$   $t^5 \geq 0$ ,  $8t \geq 0$ ,  $\frac{7}{2} > 0 \Rightarrow$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} > 0 \Rightarrow$  не является корнем  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \log_3 x < 0 \\ -\log_3 y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x < \log_3 y \\ \log_3 y > \log_3 x \end{cases}$$

пусть  $\log_3 y = a$   $\log_3 x = b \Rightarrow$

$b < 0, a > 0$

перенесем ~~второй~~ II вар через  $a$  и  $b$

$$2(a^2 + b^2)(a-b) \cdot a \cdot b - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$(a^2 + b^2)(a-b) \cdot a \cdot b = \frac{7}{2}, \text{ но}$$

$a^2 + b^2 > 0$  т.ч.  $\begin{cases} a^2 > 0 \\ b^2 > 0 \end{cases}$

$a - b > 0$  т.ч.  $\begin{cases} a > 0 \\ -b > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$a > 0$   
 $b < 0$

$(a^2 + b^2)(a-b) \cdot a \cdot b < 0 \Rightarrow$   
не может быть равно  $\frac{7}{2} \Rightarrow$

этот вариант не имеет решений  $\Rightarrow$   
только I вар

Ответ:  $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

1ая страница

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = 0 \\ \log_3^4(5y) + 8 + 2 \log_{(5y)} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_x 3 = 0 \quad (1) \\ \log_3^4(5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

для уравнения  $t^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{t} + 8 = 0$   $\log_3 x$  и  $-\log_3 5y$  являются корнями

$t \neq 0$

$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$  по теореме Виета произведение корней =  $-\frac{7}{2}$

$$\log_3^4(5y) - \log_3^4 x - \frac{7}{2} \left( \frac{1}{\log_3 5y} + \frac{1}{\log_3 x} \right) = 0$$

$$\left( \log_3^2(5y) + \log_3^2 x \right) \left( \log_3(5y) + \log_3 x \right) \left( \log_3(5y) - \log_3 x \right) - \frac{7}{2} \frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 5y \cdot \log_3 x} = 0$$

$$\left( \log_3 5y + \log_3 x \right) \left( \left( \log_3^2(5y) + \log_3^2 x \right) \left( \log_3 5y - \log_3 x \right) - \frac{7}{2 (\log_3 5y \cdot \log_3 x)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 5y \cdot x = 0 = \log_3 1$$

$$\begin{cases} 2(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 5y \log_3 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \\ \log_3 5y \neq 0 \\ \log_3 x \neq 0 \end{cases}$$

I вар:

$$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

II вар  $\log_3 5y = a$   $\log_3 x = b \Rightarrow (a^2 + b^2)(a - b)ab - \frac{7}{2} = 0$   
 $a \neq 0$   $b \neq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

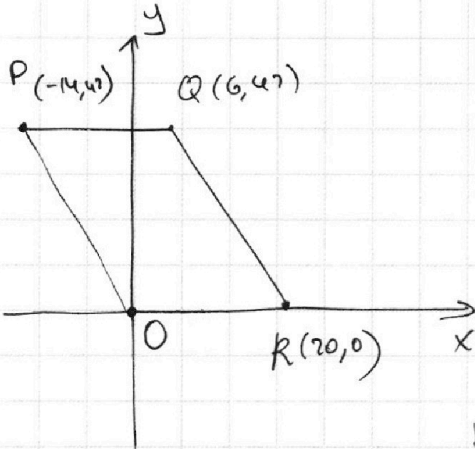
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6



две точки  $A(x_1, y_1)$   $B(x_2, y_2)$ :

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

~~42~~

~~9~~

① пусть  $y_1 = y_2 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) = 33 \Rightarrow x_2 - x_1 = 11$

на отрезке  $OR$  найдется 10 таких пар  $(0, 0)$  и  $(11, 0)$  ...  $(9, 0)$  и  $(20, 0)$

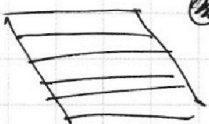
Прямая  $PO$  пересекает 15 целочисленных точек

~~$y_2 - y_1 = 0$~~

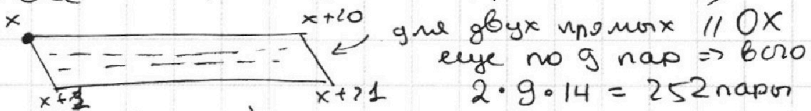
~~$x_2 - x_1 = 11$~~

~~$y_2 - y_1 = 42$~~

для прямой  $PO: y = -3x \Rightarrow$  если  $x$ -целое  $\Rightarrow y : 3 \Rightarrow$   
от 0 до 42 15 чисел  $: 3 \Rightarrow$  для каждой из таких точек  
можно построить прямую  $\parallel OX$  где которой будет  
10 подходящих пар  $\Rightarrow$  всего  $15 \cdot 10 = 150$  пар.



$\Rightarrow$  все сектора агентингов (всего 14)



$$\text{пусть } y_2 - y_1 + 0 \Rightarrow 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \Rightarrow y_2 - y_1 : 3 \Rightarrow$$

$y_2 - y_1$  может быть  $\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \dots, \pm 39, \pm 42$  (max ~~42~~)  
 $y_2 - y_1 = 42$

~~$\frac{1}{2}$~~   $\Rightarrow$  если  $y_2$  находится на одной из прямых  $\parallel OX$  из (1)  
 $\Rightarrow y_2$  тоже находится на одной из таких прямых

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

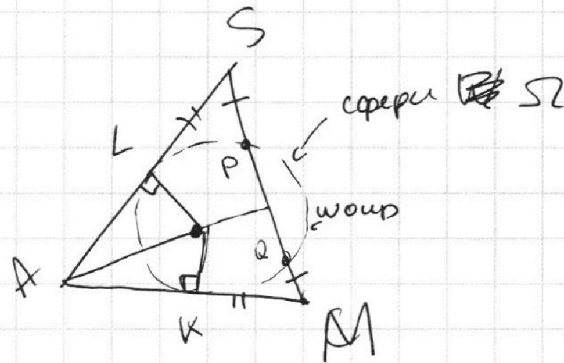
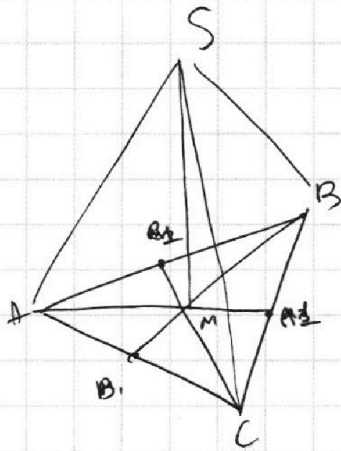
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$SABC = 90$$

$$SA = BC = 12$$

сечение точки M от оуп W :  $MQ \cdot MP = MK^2$

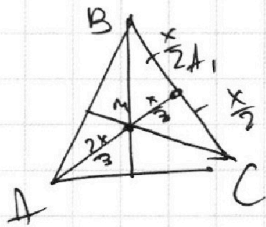
сечение точки S от оуп W :  $SP \cdot SQ = SL^2$

$$SP = MQ \Rightarrow SP + PQ = MQ + PQ \Rightarrow SQ = MP \Rightarrow$$

$$MQ \cdot MP = SP \cdot SQ \Rightarrow MK^2 = SL^2 \Rightarrow MK = SL$$

$$AK = AL \text{ (отр. касат)} \Rightarrow AK + KM = AL + LS \Rightarrow$$

$$AM = BC = X$$



медиаанта делится точкой пересечения  
в отношении 2:1

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{x}{3}, A_1C = \frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$AC = 6, MA_1 = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

a, b, c

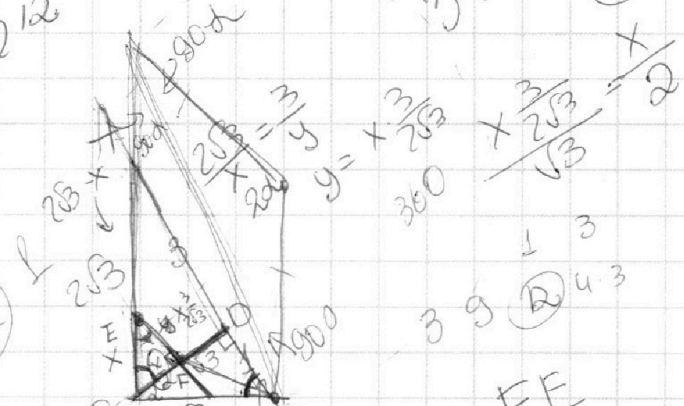
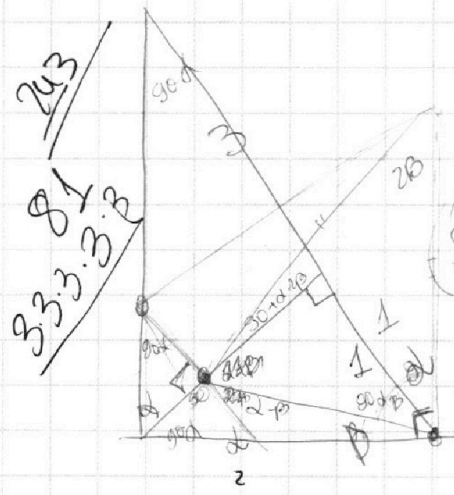
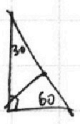
$$\begin{aligned} ab &:: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc &:: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac &:: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &:: 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot 2^{19} \\ ac &:: b \\ ae &:: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &:: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} & bc &:: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ 3^6 \cdot 3^4 & & ac &:: 3^{18} \\ 3^8 \cdot 3^2 & & 2b &:: 18 \\ 3^2 \cdot 3^8 & & 8 & \\ 3^2 \cdot 3^8 & & 3^2 \cdot 3^{11} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{14} & & 3^3 \cdot 2^2 \\ 3^{21} \cdot 5^{30} \cdot 2^{24} & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &:: 5 \\ c &:: 5 \\ 3 + \sqrt{4} - \sqrt{3x + 1} & = 4 + \sqrt{4 - 3x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} &= \frac{CD}{DB} = \frac{3x}{2} = \frac{EF}{CF} \\ CD &= \sqrt{3x} \\ \frac{x}{2} &= \frac{3x}{2} \end{aligned}$$

2700 \* 5/12

$$\sqrt{4} + 4 - \sqrt{3x + 1} = 4 + \sqrt{4 - 3x}$$

$$4 + \sqrt{4 - 3x} = 4 + \sqrt{4 - 3x}$$

$$\frac{3x}{2\sqrt{3}} = \frac{3x}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$3 \cdot 9 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{EF}{CF}$$

$$CD = \sqrt{3x}$$

$$\frac{3x}{4} = \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

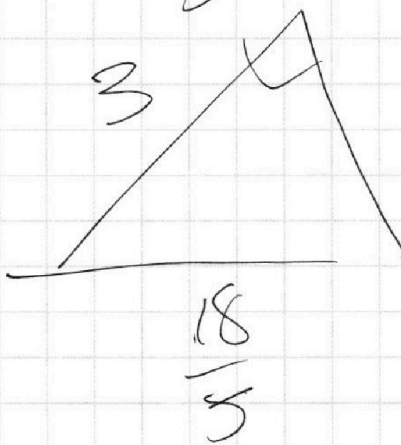
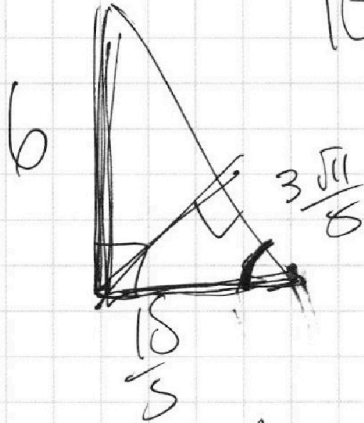
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{36}{18} = \frac{3 \cdot 12}{3 \cdot 6} = \frac{12}{6} = 2$$
$$b = \frac{18}{5}$$



$$\frac{6}{3:2}$$
$$a:b = 3:2$$

$$a = \frac{3}{2}b$$

$$5b = 6$$

$$b = \frac{6}{5}$$

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$$

$$\frac{374}{75}$$

$$\sqrt[3]{9.25}$$
$$\sqrt[3]{50}$$
$$2.25$$
$$9.9$$

$$\frac{11.9}{3011}$$
$$\frac{5}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2/100

$$2(a^2+b^2)(a-b)ab - 7 = 0$$

$$a^2+b^2(a-b)ab = \frac{7}{2}$$

$$t^4 + 8 + \frac{7}{t} = 0$$

$$t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$t < 0$$

$$\log_8 x < 0$$

$$0 < x < 1$$

$$\log_{\frac{5}{3}} 5y > 0$$

$$5y > 1$$

$$y > \frac{1}{5}$$

$$9 + \frac{11 \cdot 9}{25}$$

$$\frac{4 \cdot 25}{225}$$

$$9y +$$

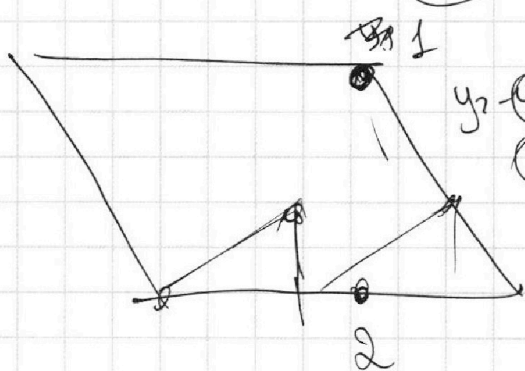
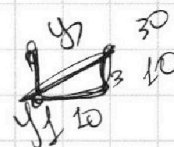
$$\frac{225}{9y}$$

$$324$$

$$\frac{18}{18}$$

$$\frac{18}{18}$$

$$y > 42 \text{ (3)}$$



$$u_2$$

$$33 + u_2$$

$$\textcircled{75}$$

$$25$$

$$\textcircled{39}$$

$$\textcircled{72}$$

$$\textcircled{24}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 8 + \frac{7}{2} \log_3 x^3 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 8 - \frac{7}{2} \log_3^3 y = 0$$

$$t^5 + 8t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3(5y) - \log_3^3 x$$

$$t^4 + 8 - \frac{7}{2} = 0$$

$$2t^5 + 16t - 7 = 0$$

полюс

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

$$x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \frac{7}{2}$$

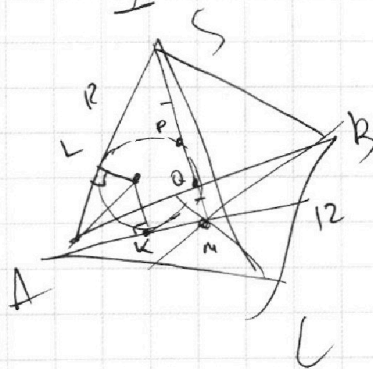
$$x_1 x_2 x_3 x_4 + \dots = 16$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\log_3 \frac{5y_1}{x_1 y_2} = 0 = \log_3 1$$

$$y_1 \dots = x_1 \dots y_2$$

$$5 y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$$



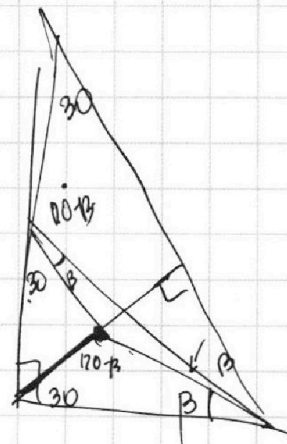
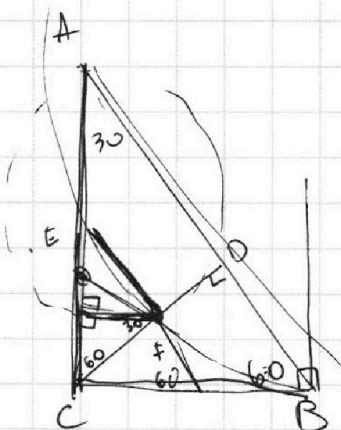
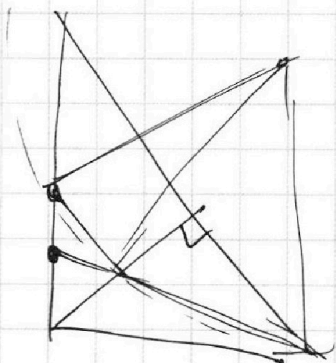
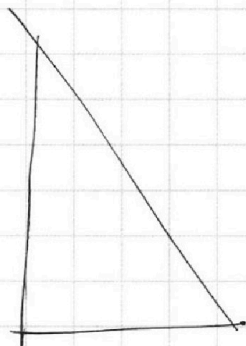
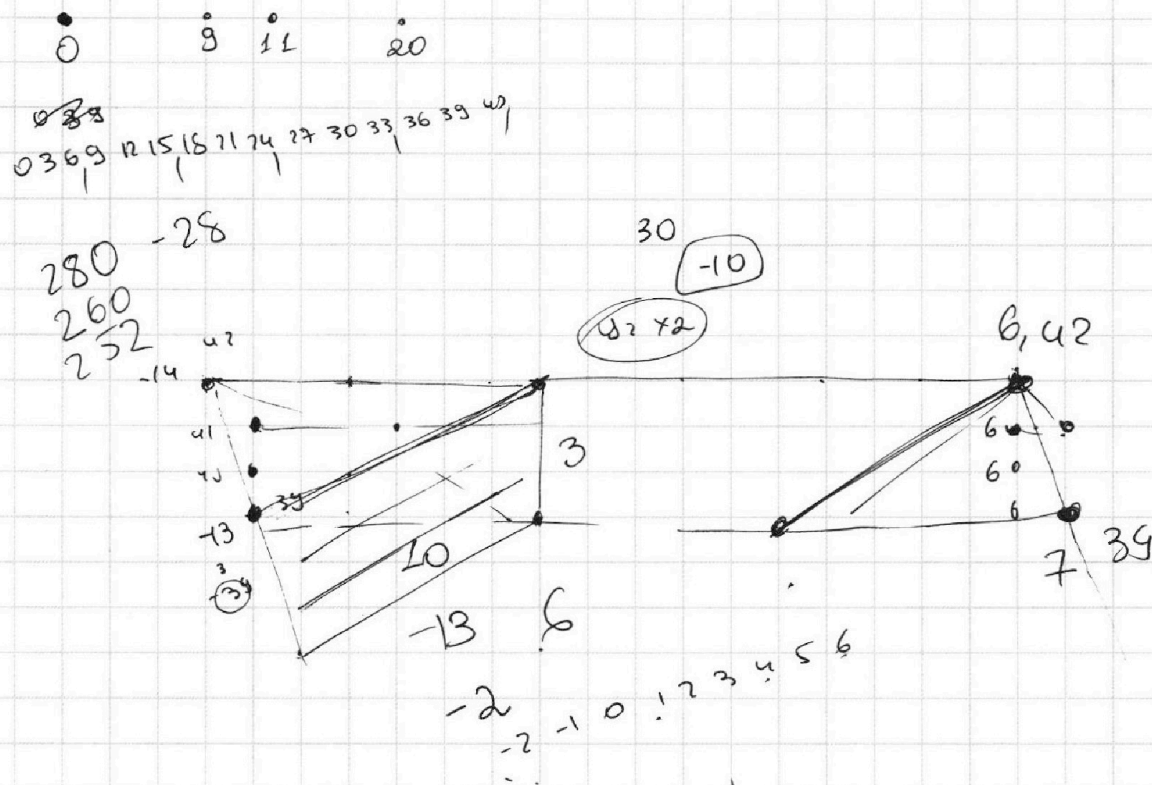
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$a, b, c - \text{натур} : \begin{aligned} ab &: 2^9 3^{10} 5^{10} \\ bc &: 2^{14} 3^{13} 5^{13} \\ ac &: 2^{19} 3^{18} 5^{30} \end{aligned} \Rightarrow ac \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$\Rightarrow$  min степень входящая  $2$  в  $abc$  это  $19$ ,  $3$  это  $18$ ,  $5$  это  $30$   
 пусть степень входящая  $3$  в  $b \neq 2 \Rightarrow$  в  $a$  она должна быть хотя бы  $10-2=8$  (из  $ab: 2^{10}$ ) в  $c$  она должна быть хотя бы  $13-2=11$  (из  $bc: 2^{14}$ )  $\Rightarrow$  в  $ac$  хотя бы  $11+8=19 > 18 \Rightarrow$

пусть степень входящая  $3$  в  $b > 2 \Rightarrow$

abc

$$2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$3^{10} 3^{13}$$

$$(5x-x)(4x-x)(3x-x)(2x-x)(1x-x)$$

~~18~~

$$0 \quad 10 + 13 \quad 25$$

$$1 \quad 9 + 12 \quad 22$$

$$2 \quad 8 + 11 \quad 21$$

$$3 \quad 7 + 10 \quad 17$$

$$18$$

$$z = (8+t) + 8$$

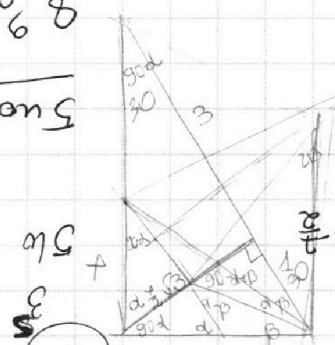
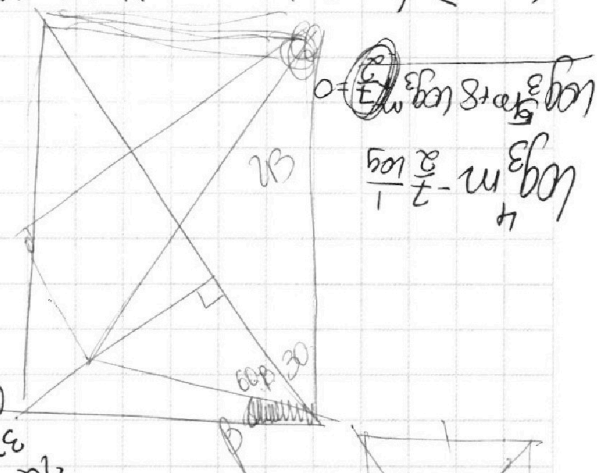
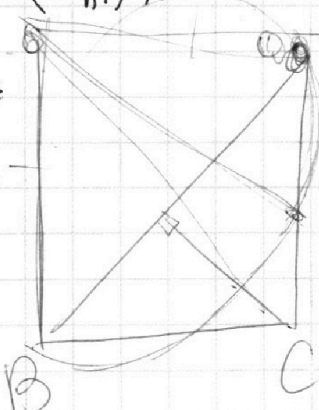
4

$$18$$

$$0 = t + 9 + 16 + 7$$

$$\frac{8}{2} + 8 + 7$$

$$8 + \frac{8}{2} + 7$$



$$0 = \frac{8}{2} + 8 + 7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + 2y - 36 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4$$

$$2(a^2 + b^2)(a - b)ab - 7 = 0$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)ab$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = 7/2 \cdot 2$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = 7$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{2} \log_3 x + \log_3 y} - \dots$$

$$\log_3^2 (xy) + \log_3^2 x$$

$$\log_3^2 (xy) - \log_3^2 x$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{2} \log_3 xy + \log_3 x}$$

$$2 = \log_3 x \cdot \log_3 y = \frac{2}{7}$$

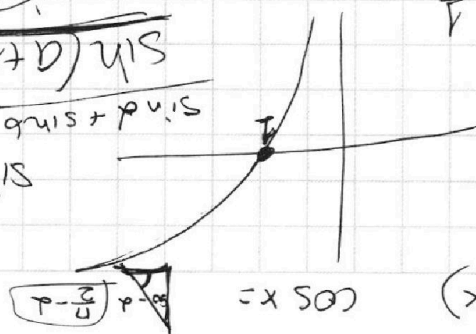
$$\frac{2}{7} = \log_3 x \cdot \log_3 y - \log_3^2 x$$

$$\sin(a+b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b}$$

$$2 \sin a \cos b = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$



$$\cos x = \sin(90 - x)$$

$$\log_3 x$$

$$-\log_3 y$$

$$y > 1$$

$$y > \frac{1}{5}$$

$$x < 1$$

$$\sin(30 + 60) = \sin 90$$

$$2 \sin 30 \cdot \cos 60 = 1$$

$$\frac{2}{6} = \frac{2}{7}$$