



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1 \quad ab: 2^7 3^{11} 5^{14}, \quad bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}, \quad ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

Умножим эти числа: $ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

Тогда $a^2 b^2 c^2 = 2^{34} 3^{43} 5^{75} \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$.

$$abc = \sqrt{2^{34} 3^{43} 5^{75} k} = 2^{17} 3^{21} 5^{37} \sqrt{15k}$$

Наименьшее возможное значение $\sqrt{15k}$ достигается при $k=15$, так как $abc \in \mathbb{N}$.

Тогда $abc = 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot 15 = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$ac: 5^{43}$, поэтому окончательный ответ $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

Наименьшее возможное окончательное значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N3 \quad 5 \arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

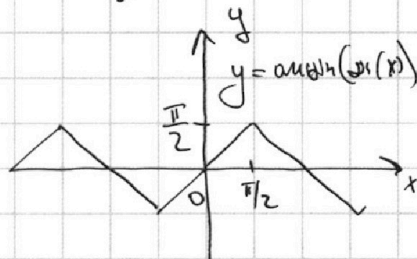
Поскольку $\arccos(\alpha) + \arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2}$, где $\alpha \in [-1; 1]$, то,

поставив $\alpha = \sin(x)$, получим, что

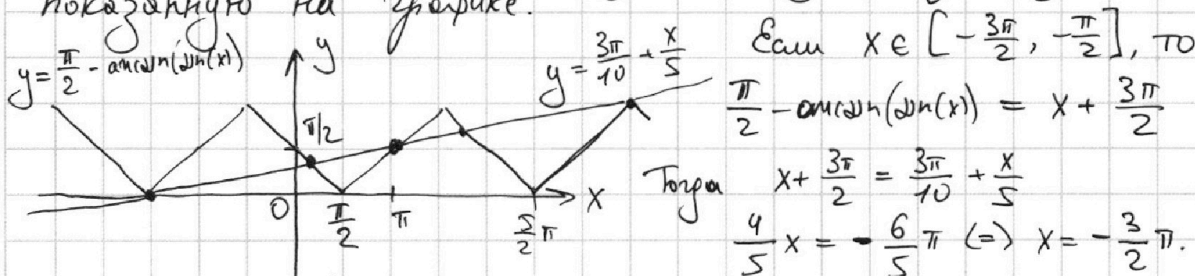
$$\arccos(\sin(x)) + \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)).$$

$$\text{Итого: } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

Построим график функции $y = \arcsin(\sin(x))$
 $y = x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, примем $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.



Тогда получим следующую кусочно-линейную периодическую функцию,
показанную на графике.



$$\text{Если } x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = x + \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Тогда } x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \\ \frac{4}{5}x = -\frac{6}{5}\pi \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi.$$

Заметим, что при $x < -\frac{3}{2}\pi$ корней нет, поскольку тогда $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} < 0$.

$$\text{Если } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Если } x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = -\frac{\pi}{2} + x = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \pi$$

$$\text{Если } x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = -x + \frac{5}{2}\pi = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{Если } x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}], \text{ то } \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x)) = x - \frac{5}{2}\pi = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi$$

Заметим, что все $x > \frac{7}{2}\pi$ не подходят, поскольку тогда $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} > \pi$, что не имеет пересечения с $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin(x))$.

Таким образом, есть всего 5 корней.

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11}{6}\pi; \frac{7}{2}\pi \right\}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

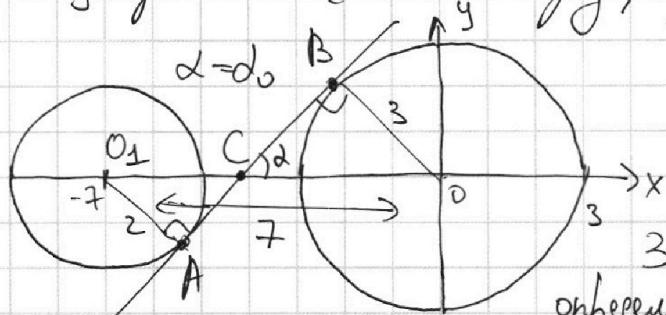
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и)
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$
 Решу систему уравнений графически:

$x + 3ay - 7b = 0$ - уравнение прямой (в координатах x, y).

$x^2 + y^2 - 9 = 0$ - уравнение окружности с центром в $(0,0)$ и радиусом 3.

$x^2 + 14x + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = 0$ - уравнение окружности с центром в $(-7; 0)$ и радиусом 2.



Таким образом, 2-е уравнение в исходной системе - это две окружности, изображенные на рисунке.

Заметим, что параметр a определяет наклон прямой $x + 3ay - 7b = 0$, b - ее сдвигение.

$$y = \frac{3b - x}{3a} = \frac{b}{a} - \frac{x}{3a}$$

Заметим, что ответом на задачу является $a \in (-d_0; d_0)$, где d_0 - крайний случай, когда прямая является общей касательной 2-х окружностей.

Рассмотрим этот случай. α - угол, наклон прямой ($\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$).

α максимален, если $x + 3ay - 7b = 0$ - общее внешнее

касательная (при внешнем касательном угле будет меньше).

Пусть O_1 - центр окружности меньшего радиуса, A и B - точки касания прямой и окружностей.

C - точка пересечения AB с осью абсцисс.

По свойству касательных $O_1A \perp AB$, $AB \perp BO$. Тогда $\triangle CAO_1 \sim \triangle CBO$,

поскольку $\angle O_1CA = \angle BCO$.

Тогда $\frac{O_1A}{BO} = \frac{2}{3} = \frac{O_1C}{CO}$. Поскольку $O_1C + CO = 7$, то $O_1C = \frac{14}{5}$, $CO = \frac{21}{5}$

По теореме Пифагора в $\triangle BOC$ получаем $CB = \sqrt{CO^2 - BO^2} = \frac{6}{5}\sqrt{6}$

$\tan(\alpha_0) = \frac{BO}{BC} = \frac{3 \cdot 5}{6\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ Итого: $\alpha = -\frac{1}{3a} \in (-\frac{5}{2\sqrt{6}}; \frac{5}{2\sqrt{6}})$, $a \neq 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2}(343) - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_y(7) = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

Пусть $a = 6x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$(\log_7(a))^4 - 2 \log_a(7) = \log_{a^2}(7^3) - 4$$

$$(\log_7(a))^4 - \frac{2}{\log_7(a)} = \frac{3}{2} \log_a(7) - 4 \Leftrightarrow (\log_7(a))^4 - \frac{2}{\log_7(a)} = \frac{3}{2 \log_7(a)} - 4$$

Пусть $b = \log_7(a)$.

$$b^4 - \frac{2}{b} = \frac{3}{2b} - 4 \Leftrightarrow 2b^5 + 8b - 7 = 0$$

Пусть $c = \log_7(y)$ Тогда $c^4 + \frac{6}{c} = \frac{5}{2} \frac{1}{c} - 4$

$$\Leftrightarrow 2c^3 + 8c + 7 = 0$$

Заметим, что искомое $xy = \frac{7^b \cdot 7^c}{6} = \frac{7^{b+c}}{6}$

✶, b, c - корни $(2b^5 + 8b - 7)(2b^5 + 8b + 7) = 0$. Получаем

$$4b^{10} + 64b^2 + 32b^6 - 49 = 0$$

По теореме Виета сумма корней $b+c=0$

Тогда $xy = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

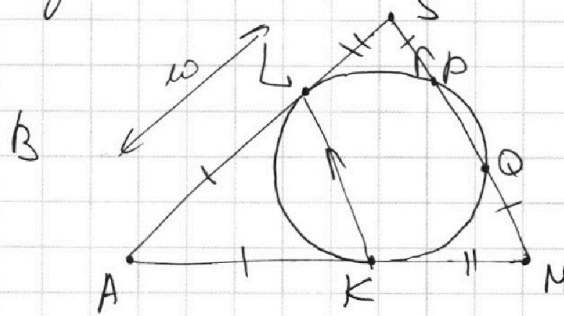
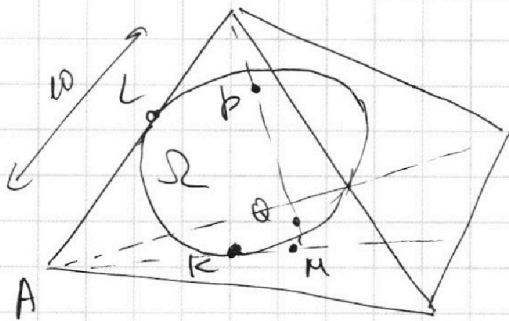
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 7 а) Рассмотрим **вращение** **плоскости** (SAM).



Поскольку $\Omega \cap (SAM) = \{K\}$, то окружность $\omega = \Omega \cap (SAM)$ ~~касается~~ касается AM в точке K .

По свойству дуги о касательной: $MK^2 = MQ \cdot MP = MQ(MQ + PQ)$

$SL^2 = SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$ (будем считать, что точки P, Q

расположены так, как на рисунке). Поскольку $SP = QM$, то $SL = MQ$, дуга PQ — дуга.

По свойству касательной $AK = AL$

Итого: $\frac{AL}{LS} = \frac{AK}{KM} \Rightarrow \triangle ALK \sim \triangle ASM \Rightarrow LK \parallel SM$.

По условию $AS = 10 \Rightarrow AM = 10$. Тогда радиус окружности, вписанной из точки A , равен 15 . Пусть $AH \perp BC$, $H \in (BC)$.

Рассмотрим $\triangle AHA_1$: $AH \cdot BC = 120$ (площадь $\triangle ABC$), $BC = 10 \Rightarrow AH = 12$.

$AA_1 = 15$. По теореме Пифагора $HA_1 = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9$.

$\sin(\angle AA_1B) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{AH}{AA_1} \Rightarrow \cos(\angle AA_1B) = \sqrt{1 - (\sin(\angle AA_1B))^2} = \frac{3}{5}$

По теореме косинусов $\triangle ABA_1$: (не угадали дуги, считаем косинус положительным).

$$\frac{3}{5} = \frac{AA_1^2 + A_1B^2 - AB^2}{2 \cdot AA_1 \cdot A_1B} = \frac{15^2 + 5^2 - AB^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Rightarrow 150 - AB^2 = 90 \Leftrightarrow AB = \sqrt{60}$$

Аналогично по $\triangle AA_1C$

$$-\frac{3}{5} = \frac{15^2 + 5^2 - AC^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Leftrightarrow 150 - AC^2 = -90 \Leftrightarrow AC = \sqrt{240}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По формуле Гиния меряной ($\triangle ABC$)

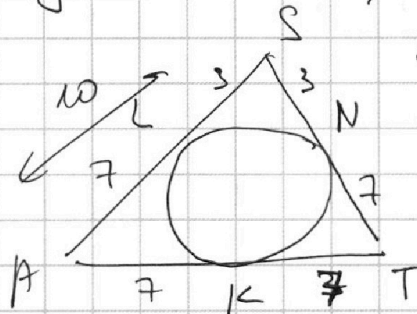
$$BB_{\perp} = \sqrt{\frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{60}{2} + \frac{100}{2} - \frac{240}{4}} = \sqrt{20}$$

$$CC_1 = \sqrt{\frac{BC^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{100}{2} + \frac{240}{2} - \frac{60}{4}} = \sqrt{155}$$

$$\text{Искомая величина } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15\sqrt{20} \cdot 155 = 150\sqrt{31}$$

б) Определим величину угла:

Пусть $ST \perp BC$, где $T \in (BC)$, рассмотрим $\triangle AST$.



Поскольку $SN = 3$, то $SL = 3$ (касательные)

Тогда $AL = 7 = AK$, $KT = 3$

$$MT = \frac{AA_1}{3} = 4 \Rightarrow AT = 14$$

Тогда $\triangle AST$ равнобедренный $\Rightarrow \angle STA = 60^\circ$.

Это и есть величина искомых углов.

Ответ: а) $150\sqrt{31}$
б) 60°

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{15}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \quad ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$34 - 14 = 20$$

$$a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + a_1 + c_1 = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 34$$

$$a = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 17$$

$$a_1 = 17 - (b_1 + c_1) = 17 - 14 = 3$$

$$a_2 = 21 - 17 = 4$$

$$a_3 = 37 -$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ - 225 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\sqrt{\left(\frac{2x^2}{5}\right) - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5}$$

$$\left| \frac{1}{3a} \right| < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad \frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad | \cdot 6\sqrt{6}a$$

$$\frac{2\sqrt{6}a}{3a} < \frac{5 \cdot \sqrt{6}a}{\sqrt{6}a}$$

$$2\sqrt{6} < 15a \quad a \geq \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$\frac{1-5}{2\sqrt{6}} \quad b^4 - \frac{2}{b} = \frac{3}{2b} - 4 \quad | \cdot 2b$$

$$2b^5 - 4 = 3 - 8b$$

$$\begin{aligned} b &= \log_7(6x) \\ 7 &= \log_7 b \\ 6x &= 7 \end{aligned}$$

$$2b^5 + 8b - 7 = 0$$

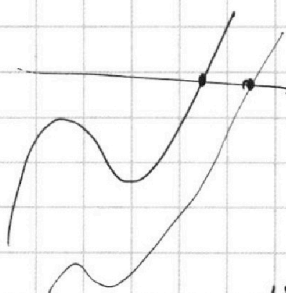
$$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

$$y = 7^c$$

$$c^4 + \frac{6}{c} = \frac{5}{2c} - 4 \quad | \cdot 2c \Leftrightarrow 2c^5 + 12 = 5 - 8c$$

$$2c^5 + 8c + 7 = 0$$

$$xy = \frac{7^b \cdot 7^c}{6} = \frac{7^{bc}}{6}$$



$$4p^{10} + 64p^2 + 32c^6 - 4q = 0$$

$$4q^5 + 64q + 32c^3 - 4q = 0 \quad 150\sqrt{31}$$

$$15\sqrt{20 \cdot 155} = 15\sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 21} = 15 \cdot 2 \cdot 5 \sqrt{21}$$

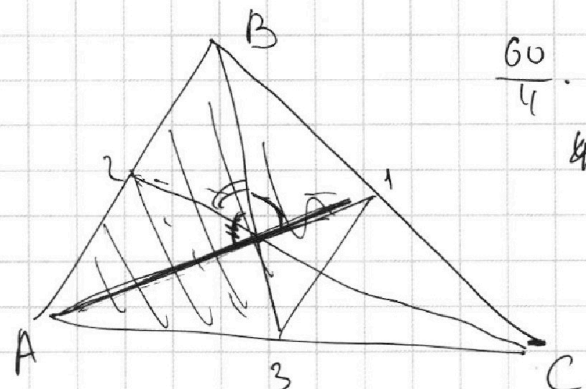
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{60}{4} \cdot 3 = 45$$

$$m_1 = 15$$

$$45 = \frac{1}{2} m_2 m_3 \sin(\alpha)$$

$$90 = m_2 m_3 \sin(\beta)$$

$$90 = m_1 m_3 \sin(\gamma)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$m_1 = 15$$

$$\sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$S = \frac{m_1 m_2 m_3}{4R}$$

$$S = 2R^2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$$

$$2R = \frac{m_1}{\sin(\beta)} \quad \sin(\varphi) = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{15^2 + 5^2 - AB^2}{2 \cdot 15 \cdot 5} \Rightarrow 3 = \frac{125 + 25 - AB^2}{2 \cdot 5 \cdot 3}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \cdot 10 \\ \hline 150 \\ - 72 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$90 = 150 - AB^2 \Rightarrow AB^2 = \sqrt{60}$$

$$-\frac{3}{5} = \frac{125 + 25 - AC^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \Rightarrow -90 = 150 - AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{240}$$

$$\angle BAC: \cos = \frac{60 + 240 - 100}{2 \cdot \sqrt{60} \cdot 60 \cdot 4} = \frac{200}{2 \cdot 2 \cdot 60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$$

$$\sin = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{36 - 25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Wow: $m_1 m_2 m_3$

$$m_2 = \sqrt{\frac{60}{2} + \frac{240}{2} - 25} = \sqrt{30 + 120 - 25} = 15$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{60}{2} + \frac{100}{2} + \frac{240}{4}} = \sqrt{30 + 50 + 60} = \sqrt{140} = \sqrt{20}$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{240}{2} + \frac{100}{2} - \frac{60}{4}} = \sqrt{120 + 50 - 15} = \sqrt{155}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

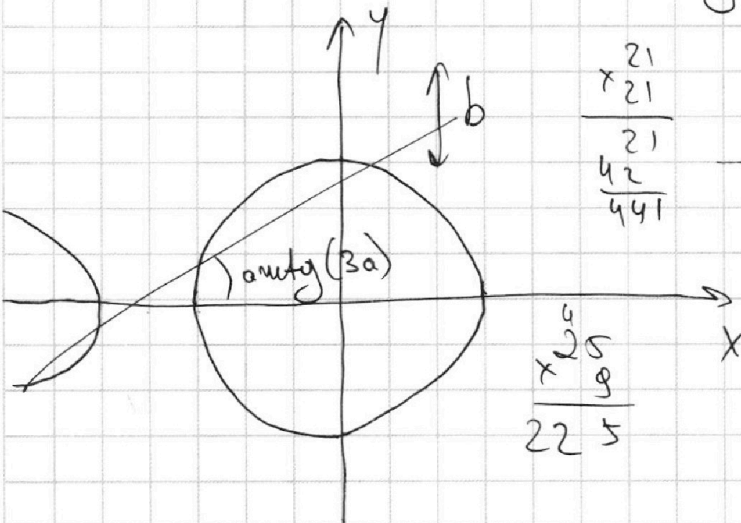
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

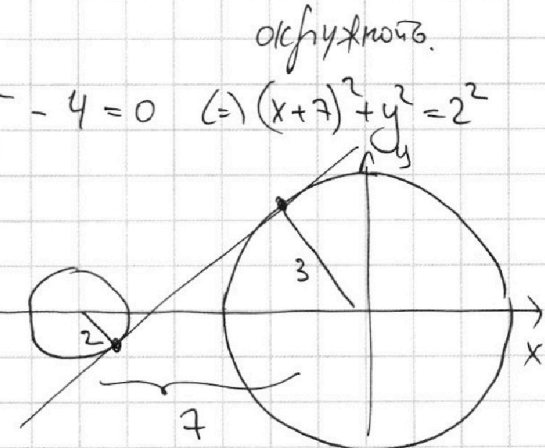
уч $\left. \begin{aligned} x+3ay-7b &= 0 && - \text{прямая} \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9) &= 0 && \leftarrow \text{окружности} \end{aligned} \right\}$

$$x^2+14x+y^2+45=0$$

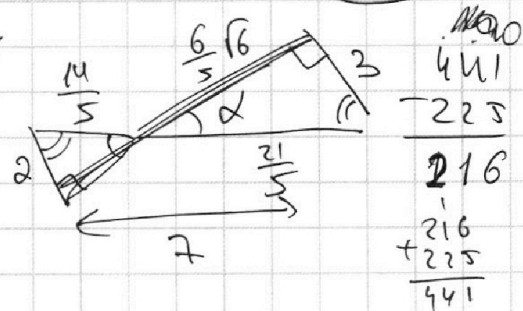
$$(x+7)^2 = x^2+14x+49 \Rightarrow (x+7)^2+y^2-4=0 \Leftrightarrow (x+7)^2+y^2=2^2$$



$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 25 \\ 125 \\ \hline 625 \end{array}$$



$$\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9} = \sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \frac{6}{5} \sqrt{6}$$

$$3a_0 = \frac{3}{\frac{6}{5} \sqrt{6}} = \frac{15}{6 \sqrt{6}} = \frac{15 \sqrt{6}}{36} \Rightarrow a_0 = \frac{5 \sqrt{6}}{36}$$

$$a \in \left(-\frac{5 \sqrt{6}}{36}; \frac{5 \sqrt{6}}{36}\right) - \text{оба.}$$

$$NS) \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2}(343) - 4$$

$$t = 6x$$

$$\log_7^4(y) + 6 \log_y(7) = \log_{y^2}(7^3) - 4$$

$$t > 0$$

$$t \neq 1$$

$$\log_7^4 t - 2 \log_t 7 = \log_{t^2}(7^3) - 4$$

$$\log_7(t) - \frac{\log_7(t)}{\log_7(t)} = \frac{3}{2} \log_7(t) - 4$$

$$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3/2}{\log_7(t)} + 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(t) - \frac{2}{\log_7(t)} = \frac{3/2}{\log_7(4)} + 4 \quad k_2 = \log_7(t)$$

$$k_2 - \frac{2}{k_2} = \frac{3/2}{k_2} + 4 \rightarrow \text{получить } k_2$$

$$\log_7^4(y) + 6 \log_7(y) = \frac{5}{2} \log_7(7) - 4$$

$$\log_7^4(y) + \frac{6}{\log_7(y)} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_7(y)} - 4 \rightarrow \text{получить } \log_7 y$$

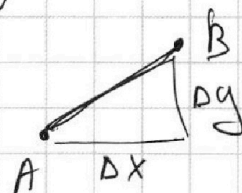
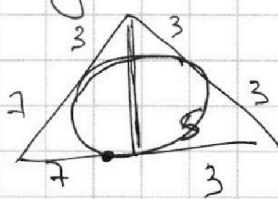
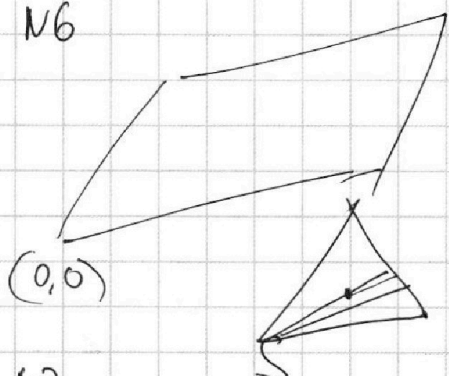
N6

$$4x_2^2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

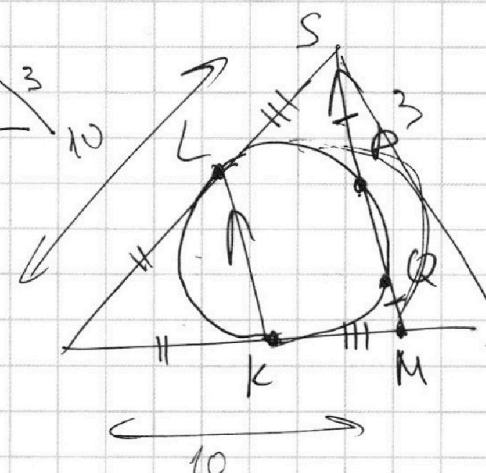
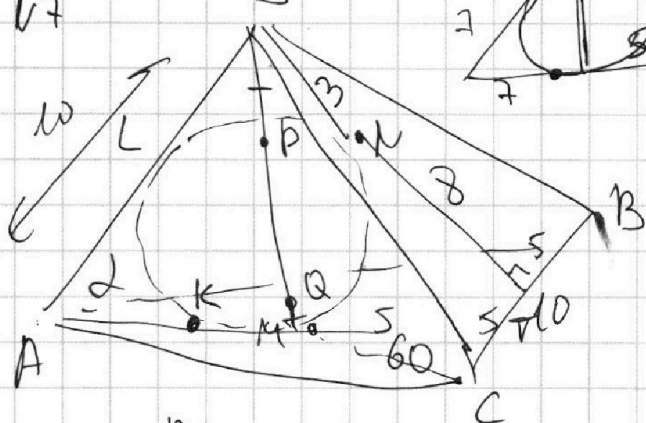
$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$4\Delta x + \Delta y = 40$$

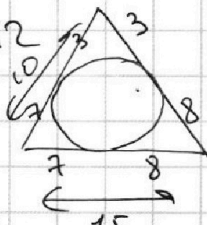
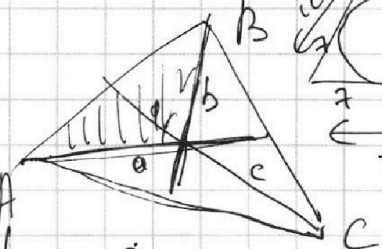
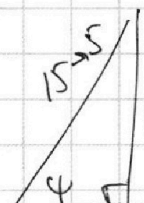
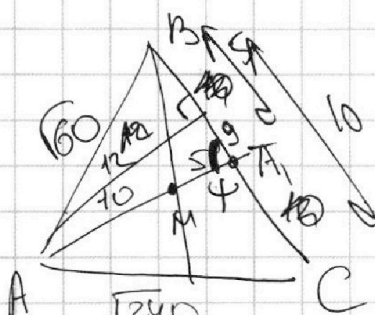
$$\Delta y = 40 - 4\Delta x$$



N7



$$60 = \frac{1}{2} h \cdot 10 \Rightarrow h = 12$$



$$S = \frac{ab \sin \alpha + bc \sin \beta + ca \sin \gamma}{2} = 60$$

$$2\sqrt{3} + 8 = 2\pi \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

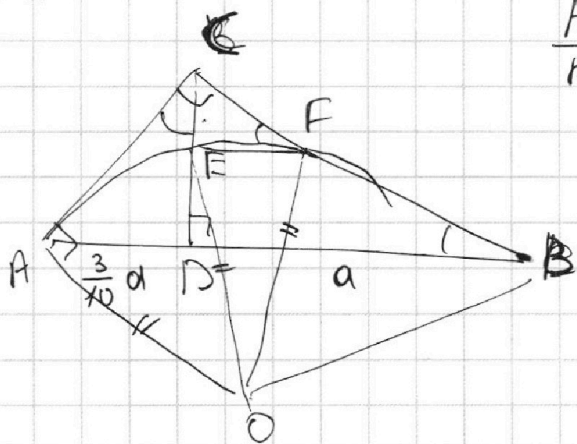
N1 $ab = 2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc = 2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac = 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 \Rightarrow abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} =$

$= \sqrt{2^{34} 3^{43} 5^{75}} = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$ - ответ.
 $a=1$, $b=2^7 3^{11} 5^{14}$, $c=2^6 3^4 5^4$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 26 \\ \hline 17 \\ \hline 43 \\ + 14 \\ \hline 57 \\ + 18 \\ \hline 75 \end{array}$$

N2



$\frac{AB}{BC} = 1,3$

$cb = \sqrt{\frac{3}{10} a \cdot a} = a \sqrt{\frac{3}{10}}$

$a = 2^{20} \cdot 3^{28} \cdot 5$

$$\begin{array}{r} 43 \\ + 14 \\ \hline 57 \\ + 18 \\ \hline 75 \end{array}$$

N3

$\text{arccos}(\sin(x)) = \frac{3\pi}{2} + x$
 $x \in [-5; 5]$

$\text{arccos}(\sin(x)) + \text{arcsin}(\sin(x)) = \frac{\pi}{2}$
 $x + 2\pi k$

$5 \text{ arccos}(\sin(x)) = \left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \right) = \frac{3\pi}{2} + x$
 $-x'$

$5 \left(\frac{\pi}{2} - x' \right) = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x' = \frac{3\pi}{2} + x$

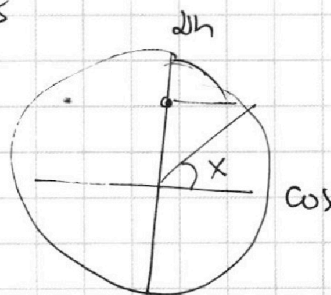
$x + 5x' = \pi$

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $x' = x \Rightarrow 6x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Если $x < -\frac{\pi}{2}$, то $x' > x \Rightarrow x + 5x' > 6x \Rightarrow 6x > \pi \Rightarrow x > \frac{\pi}{6}$

Если $x > \frac{\pi}{2}$, то $x' < x \Rightarrow x + 5x' = \pi < 6x \Rightarrow$

$5 \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ $x = \frac{\pi}{6}$ - ответ.



Пусть:

$\frac{3\pi}{2} + x \leq 5$
 $x \leq 5 - \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{2} + x \geq -5$
 $x \geq -5 - \frac{3\pi}{2}$

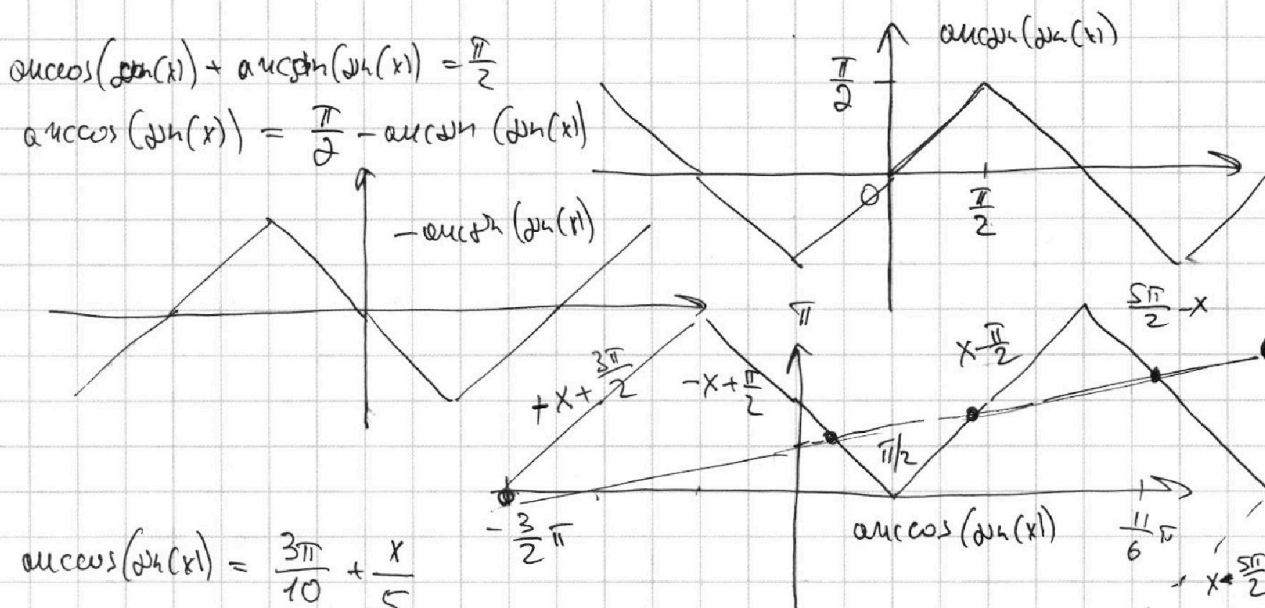
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\sin(x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow x = \pi$$

$$\frac{5\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} = \frac{22\pi}{10} = \frac{11\pi}{5}$$

$$x = \frac{11\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$-x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi - 3\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$x + \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi + 25\pi}{10} = \frac{14\pi}{5}$$

$$x = \frac{14\pi}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7\pi}{2} \quad \text{— некорректное решение}$$

$$+x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi - 15\pi}{10} = -\frac{6\pi}{5}$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{6\pi}{5} \Rightarrow x = -\frac{6\pi}{5} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

всего 5 решений.