



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 1)

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ . Заме-  
тим, что если в разложении  
 $a$  на простые множители при-  
сутствует простой множитель  
 $p \neq 2, 3, 5$ , то выкинув его  
делимость не нарушится, а  
 $a$  и  $b$  уменьшится  $\Rightarrow a$  только  
на  $2, 3, 5$ .  $a$  представимо  
в виде  $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ . Аналогично,  
для  $b$  и  $c$ :  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ ,  
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \Rightarrow$

для произведения  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \end{cases}$$

Аналогично для  $b$  и  $c$ :

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 14 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 21 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача N 1) (продолжение)

Сложим все 1-ые ур-я системы,  
все 2-ые и все 3-и!

$$\begin{cases} 2d_1 + 2d_2 + 2d_3 \geq 34 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 55 \\ d\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 \geq 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 \geq 17 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 27,5 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34 \end{cases}$$

Т.к.  $a, b, c$  - натуральные  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  рациональные!  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 -$

- целое  $\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 28$

$$\begin{aligned} \Rightarrow abc &= 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \\ &\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \end{aligned}$$

Пример:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$$

Ответ!

$$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

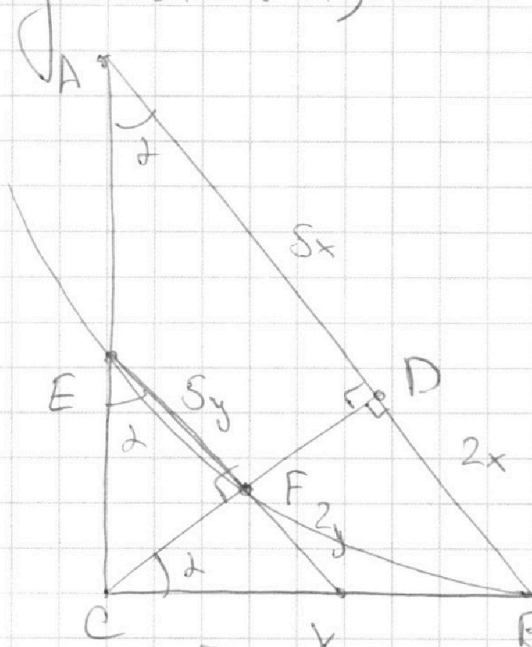
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2)



$AB \parallel EF$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

1. Пусть  $AD = 5x$   
 $\Rightarrow DB = 2x$

Т.к. параллельные прямые высекают на

узле подобные треугольники  $\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Пусть  $EF = 5y$ ,  $FK = 2y$

2. Из подобия  $\triangle CDA$  и  $\triangle BDC$ :  $\angle CDA = \angle CBD$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB \Rightarrow CD = \sqrt{10} \cdot x$$

3. По т-ме Пифагора для  $\triangle CDB$ :

$$CB^2 = 4x^2 + 10x^2 = 14x^2 \Rightarrow CB = \sqrt{14} \cdot x$$

4. Степень т-ки к отн. окр:

$$KB^2 = KF \cdot KE \Rightarrow KB^2 = 2y \cdot 7y = 14y^2$$

$$\Rightarrow KB = \sqrt{14} \cdot y$$

5. В силу того, что  $\frac{CF}{CD} = \frac{FK}{DB}$  ( $\triangle CFK \sim \triangle CDB$ )

$$\frac{CK}{CB} = \frac{y}{x} \Rightarrow CK = \sqrt{14} \cdot x \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow CK = \sqrt{14} \cdot y = KB$$

$\Rightarrow K$  - центр  $CB \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle ECK$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2 (продолжение)

$$\text{коэф. } 2 \Rightarrow S_{ECK} = \frac{1}{7} S_{ABC}$$

т.к. CF делит EK в отношении

$$5 \llcorner 2 \Rightarrow \frac{S_{ECF}}{S_{CFK}} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{ECF} = \frac{5}{2} S_{CFK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ECK} = S_{ECF} + S_{CFK} = \frac{7}{2} S_{CFK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ECK} = \frac{7}{2} S_{ECF} \Rightarrow S_{ECF} = \frac{2}{7} S_{ECK} =$$

$$= S_{ECF} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} S_{ABC} = S_{ECF} = \frac{2}{49} S_{ABC}$$

Ответ:  $\frac{28}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 3

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

Область значения арксинуса!

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \pi - 2x \leq \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x \geq -4\pi \\ 2x \leq 6\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{array}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

Рассмотрим все случаи раскрытия аркосинуса на промежутке.

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

1)  $-2\pi \leq x \leq -\pi$ :

$$5\pi - 10(x + 2\pi) = \pi - 2x$$

$$-15\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -\frac{6\pi}{8} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi$$

в ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3 (продолжение)

2.  $-\pi \leq x \leq 0$

$$5\pi - 10(-x) = \pi - 2x$$

$$5\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} - \text{в ответ}$$

3.  $0 \leq x \leq \pi$

$$5\pi - x = \pi - 2x$$

$$8x = 4\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \text{в ответ}$$

4.  $\pi \leq x \leq 2\pi$ :

$$5\pi - 10(2\pi - x) = \pi - 2x$$

$$-15\pi + 10x = \pi - 2x$$

$$12x = 16\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi - \text{в ответ}$$

5.  $2\pi \leq x \leq 3\pi$ :

$$5\pi - 10(x - 2\pi) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi = \pi - 2x$$

$$24\pi = 8x - \text{в ответ}$$

$$x = 3\pi - \text{в ответ}$$

$$x \in \left\{ -2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi, 3\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

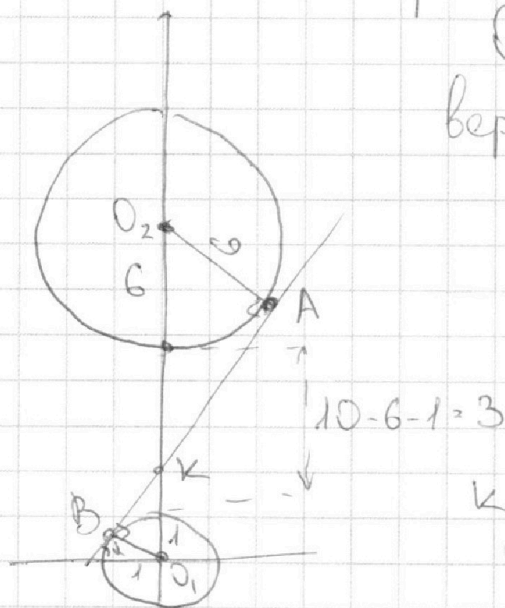
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4) (продолжение)  
(предельный случай)

касательной то находится  
т.к. внешн. касат. имеет наклон меньше внутр. касат. и можно  
решение, т.к. коэф. 0 отвечает

за наклон пересечения с одной  
прямой. Наблюдим наклон из  
внутр. касат. другая будет  
сзади, оти. прямой  $x=0$ .



$O_1, O_2$  - центры  
верхней и нижней окр.  
соответ.

A, B - т.к. касания  
прямой верхней  
и нижней окр.

K - пересечение  
касат. и прямой  $x=0$

Пусть  $\angle BO_1K = \alpha$ ,

а  $O_2K = 6 + a$ . В силу подобия  $\Delta$

$\Delta O_1BK$  и  $\Delta O_2AK$   $\angle KO_2A = \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{BO_1}{O_1K} = \frac{O_2A}{O_2K} = \frac{1}{4-a} = \frac{6}{6+a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+6 = 24-6a \Rightarrow a = \frac{18}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4 (продолжение №2)

⇒ Наклон прямой  $\tan \alpha = \frac{KO_1}{SO_1}$

где S - точка пересечения касат.

с прямой  $y = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \tan \angle BO_1K$

в силу высоты в прям. треуго. ⇒

$$\Rightarrow \tan \angle BO_1K = \frac{BK}{BO_1} = BK = \sqrt{\left(4 - \frac{18}{7}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{a}{3} \right| \geq \frac{\sqrt{51}}{7} - \text{строгий}$$

знак, так 2 решения не подходят

$$\Rightarrow \begin{cases} a > \frac{3}{7} \sqrt{51} \\ a < -\frac{3}{7} \sqrt{51} \end{cases}$$

Ответ:  $a \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{51}) \cup$

$\cup (\frac{3}{7} \sqrt{51}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

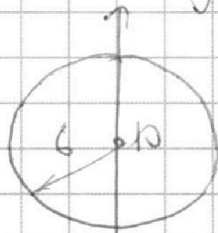
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4)

Плоскости на координатной  
плоскости множество точек,  
удовлетворяющих второму ур-ю.

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y^2 - 10) - 36) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y^2 - 10) = 36 \end{cases} \leftarrow 2 \text{ окружности}$$



центры окр. (0,0)  
и (0,10)

радиусы 1, 6  
соответственно

первое  
ур-е

Прямая должна  
пересекать каждую из окр. дважды.  
Задаёт прямую с наклоном  $\frac{a}{3}$

Заметим, что  
если наклон

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}$$

данной прямой по модулю  
превосходит наклон  $\frac{4}{3}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$2x \neq 1 \\ y \neq 1$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = a \\ \log_5 y = b$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \frac{1}{\log_5 2x} = 3 \frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

$$a^4 - 3 \frac{1}{a} - \frac{3}{a} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3} \frac{1}{a} + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 302 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 y - 3$$

$$b^4 + \frac{13}{3} b + 3 = 0$$

Ответ:  
 $xy = \frac{1}{2}$

Заметим, что функция  $f(t) = t^4 + \frac{13}{3}t + 3$

имеет ровно 1 пересечение с осью

Заменив этот корень на  $-t$  мы

получим корень  $ур-а$   $a^4 - \frac{13}{3} \frac{1}{a} + 3 = 0$

$\Rightarrow a_0 + b_0 = 0 \Rightarrow$  заменив  $\frac{13}{3}$  каждым корнем

$\rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = \log_5 xy + \log_5 2 = 0$  а получим корень  $ур-а$

$\Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$  Ответ  $\Rightarrow$   $xy$  корнем единичного



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 6)

Выберем т-ку внутри паралл. Множество т-чек подтод к ней в пару элемент на прямой

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

т.к  $OPQR$  - парал., для каждой

выбраной разности подтодит 4 ра



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad 10 \operatorname{arcsinh}(\cos x) = \pi - 2x \quad \begin{matrix} 39 \\ + 17 = \\ \hline 56 \\ + 12 \\ \hline 68 \end{matrix}$$

$$\operatorname{arcsinh}(\cos x) = a$$

$$\sinh a = \cos x$$

$$\operatorname{arccos}(\sinh x)$$



$$1) \quad ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

abc

34

$$a = 2^{d_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{s_1}$$

$$2d_1 = 2d_2 + 2d_3$$

$$b = 2^{d_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{s_2}$$

$$c = 2^{d_3} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{s_3}$$

$$d_1 + d_2 \geq 8$$

$$d_2 + d_3 \geq 12$$

$$d_1 + d_3 \geq 14$$

$$b_1 + b_2 \geq 14$$

$$b_2 + b_3 \geq 20$$

$$b_1 + b_3 \geq 21$$

$$s_1 + s_2 \geq 12$$

$$s_2 + s_3 \geq 17$$

$$s_1 + s_3 \geq 39$$

$$d_1 + d_2 + d_3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

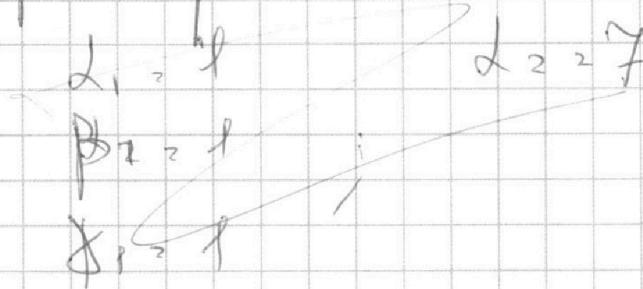


1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пример!



$$\alpha_1 = 5$$

$$\beta_1 = 8$$

$$\gamma_1 = 12$$

$$\alpha_2 = 3$$

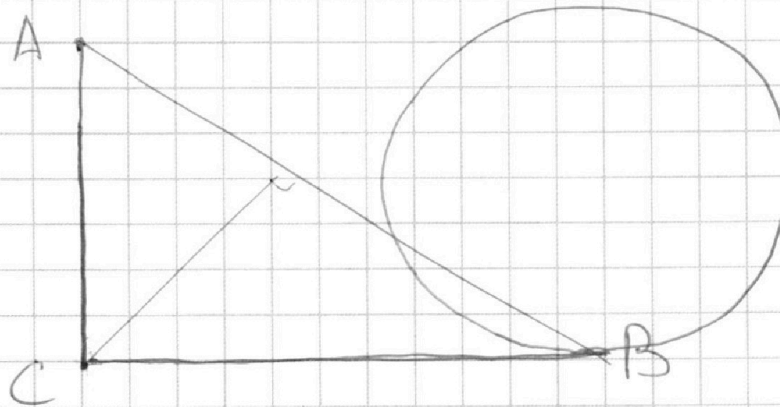
$$\beta_2 = 6$$

$$\gamma_2 = 4$$

$$\alpha_3 = 9$$

$$\beta_3 = 14$$

$$\gamma_3 = 17$$



$$5 \quad 13$$

$$18$$

$$23$$

$$28$$

$$34$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 3)

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

Область определения значения арккосинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \pi - 2x \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \geq -4\pi \\ 2x \leq 6\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{cases}$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

1.  $-2\pi \leq x \leq -\pi$

$$5\pi - (x + 2\pi) = \pi - 2x$$

$$3\pi - x = \pi - 2x$$

$$x = -2\pi \text{ - в ответ}$$

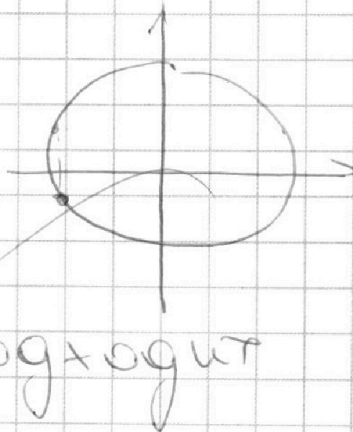
2.  $-\pi \leq x \leq 0$

$$5\pi - (x + \pi) = \pi - 2x$$

$$5\pi - (-x) = \pi - 2x$$

$$3x = -4\pi$$

$$x = -\frac{4}{3}\pi \text{ - не подходит}$$



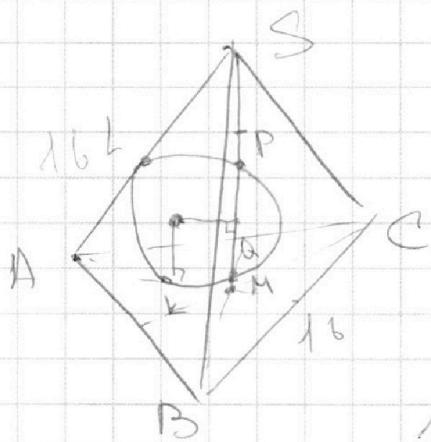
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 100$$

$$AA_1, BB_1, CC_1$$

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

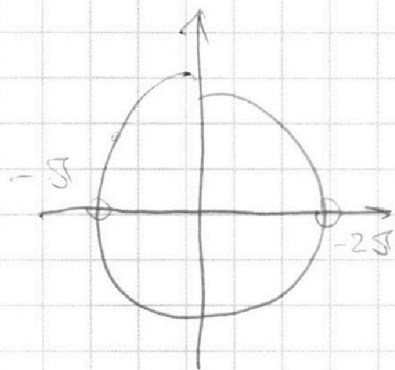
$$\Rightarrow 5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$2x \geq -4\pi$$

$$2x \leq 6\pi$$

$$x \geq -2\pi$$

$$x \leq 3\pi$$





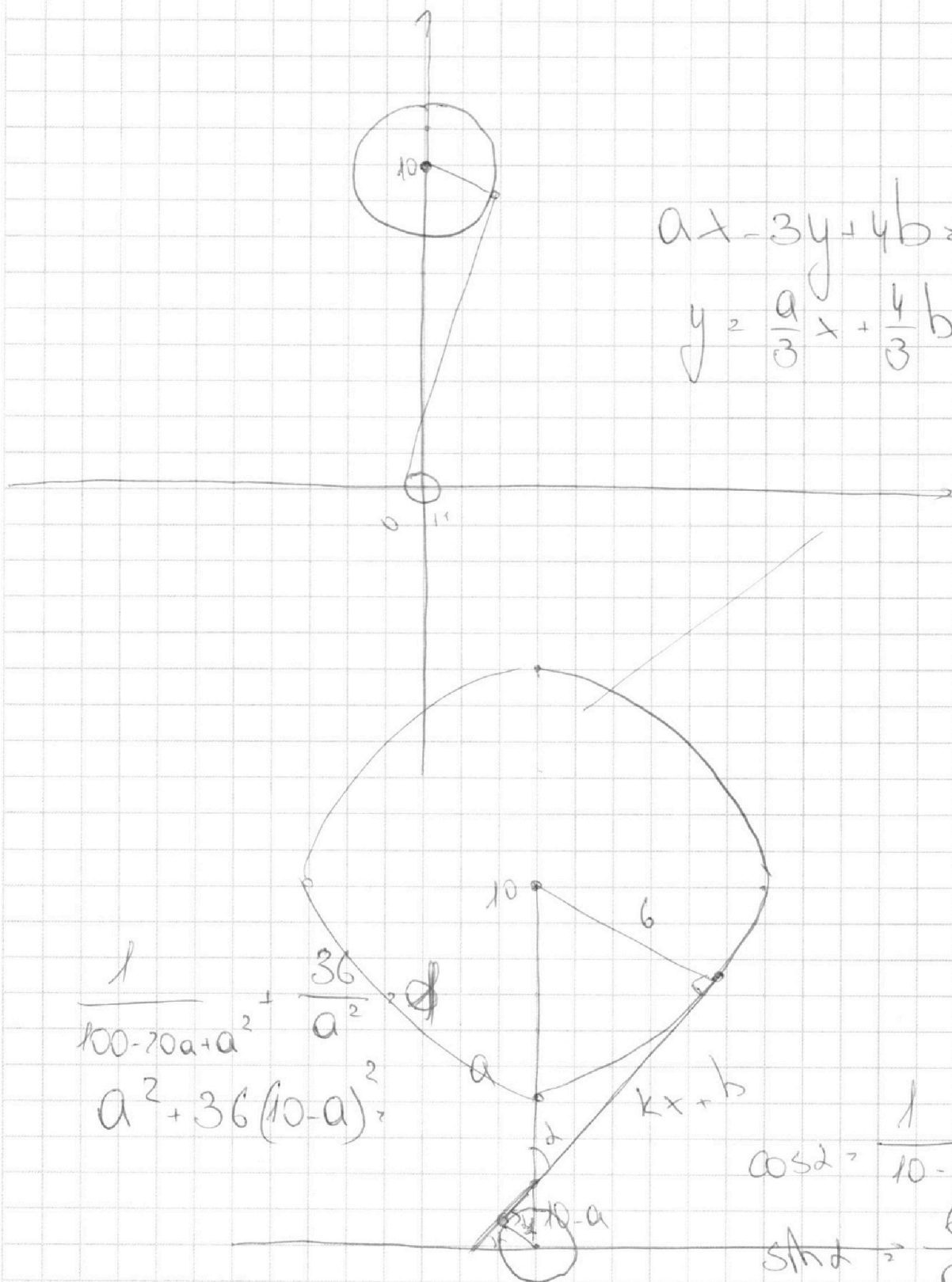
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

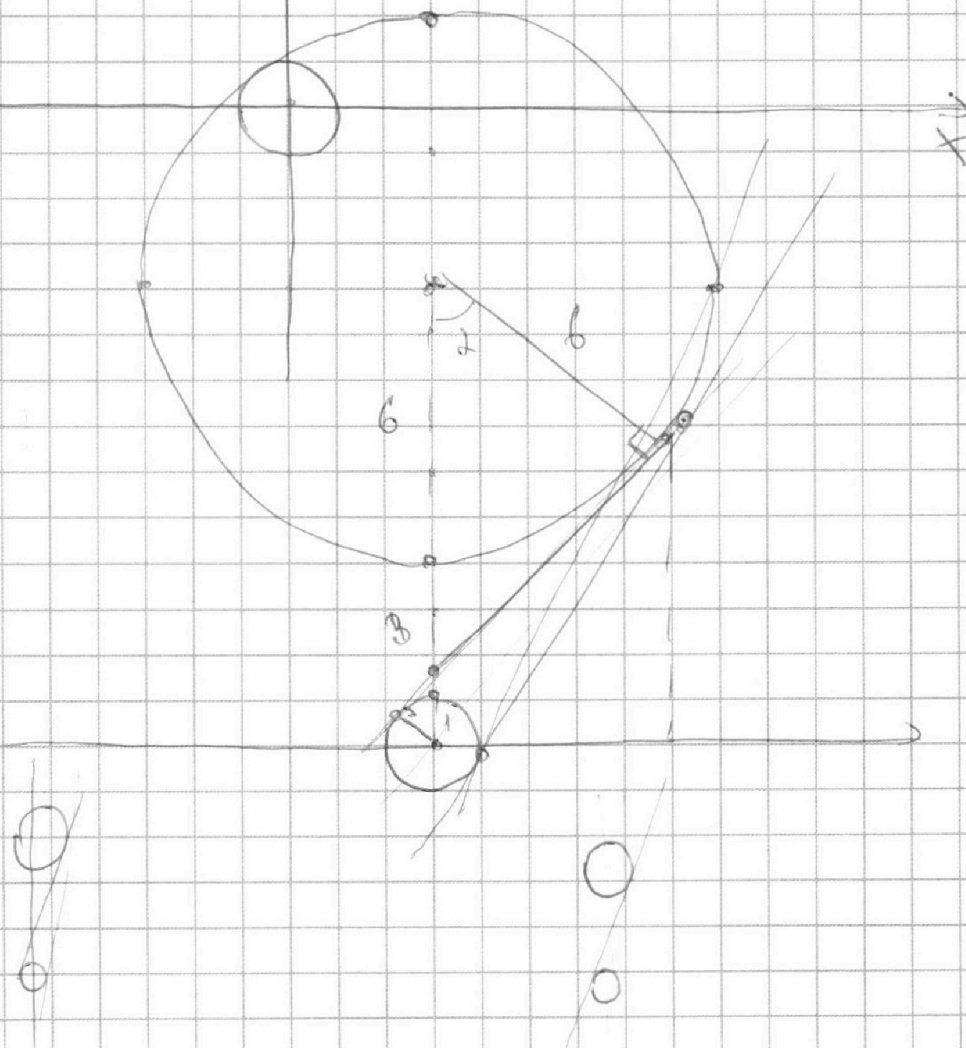
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4)  $(x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y^2 - 20y + 100) - 36) = 0$



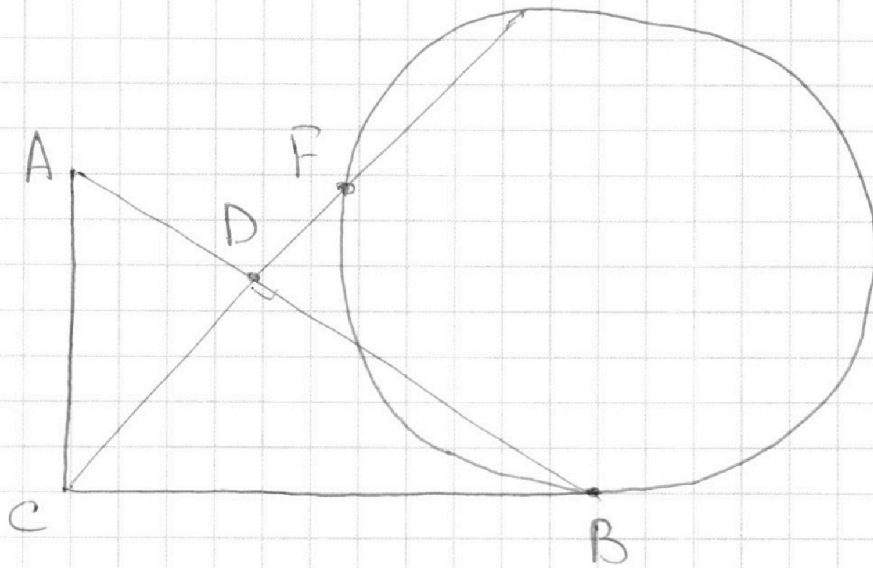
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

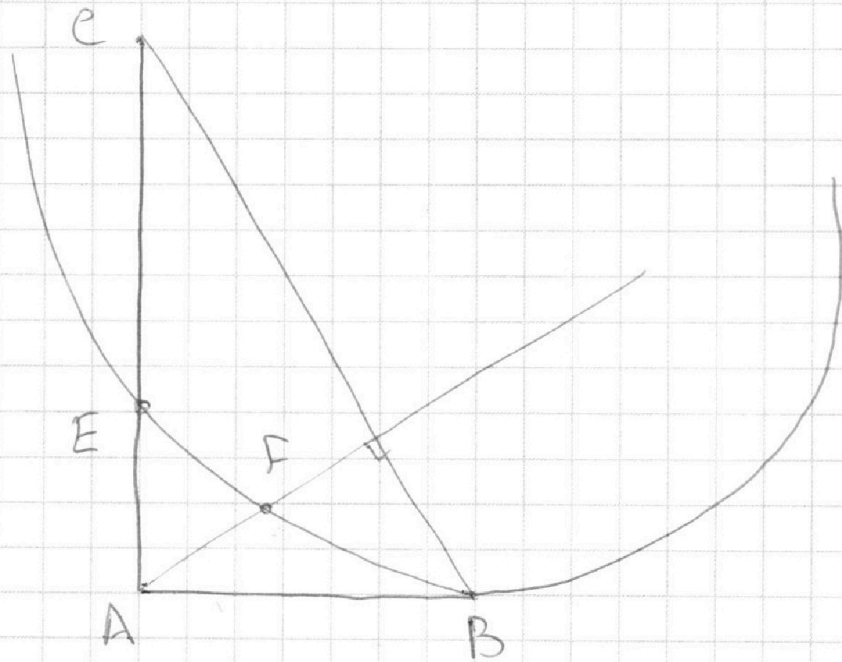
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{EF} =$$





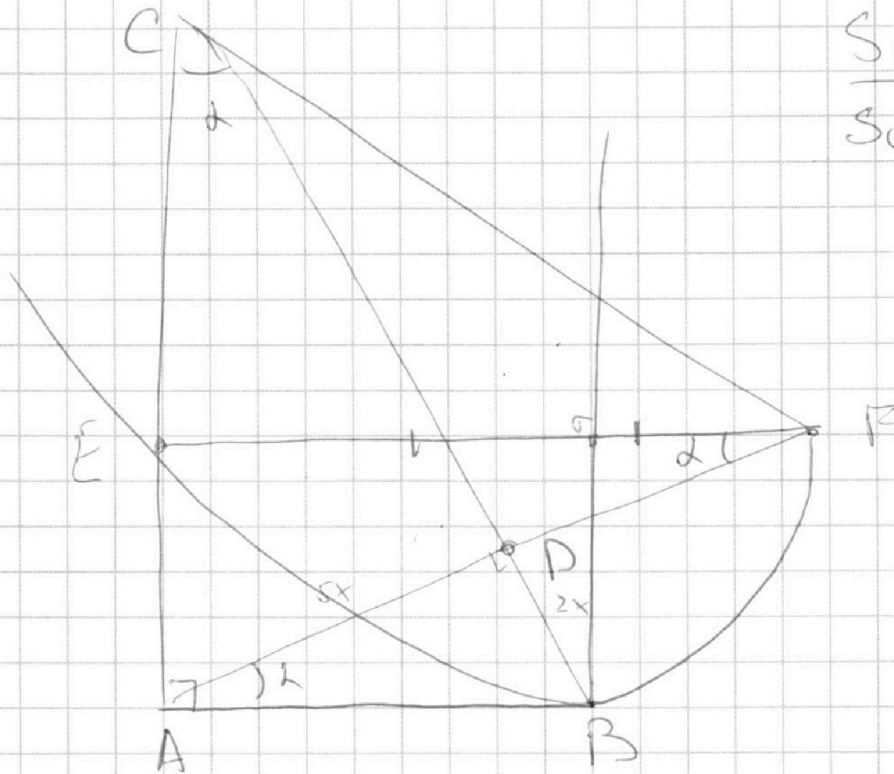
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

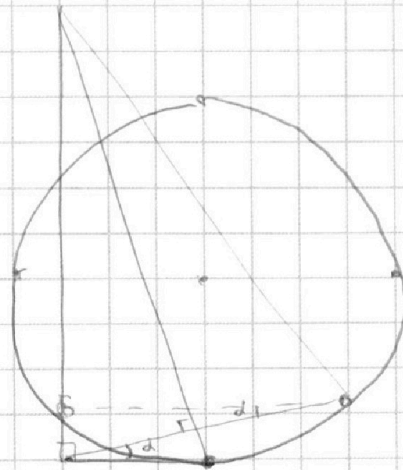
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABCE} ?$   
 $S_{CEBF}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$$





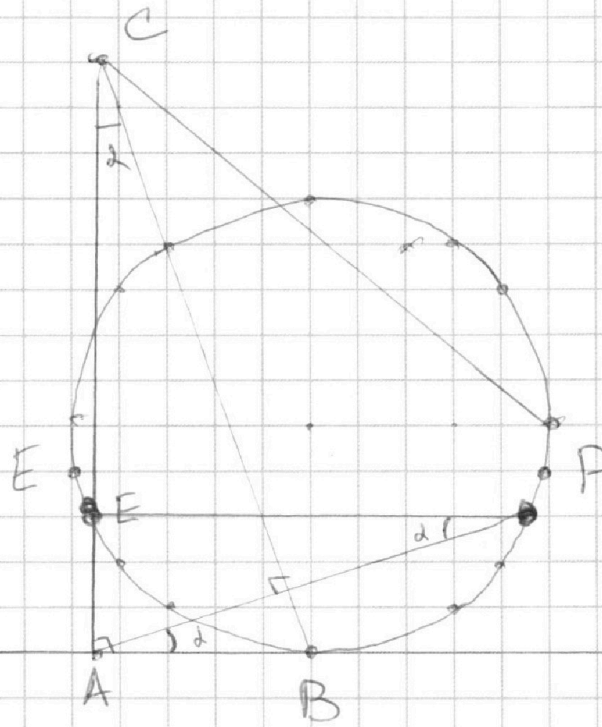
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

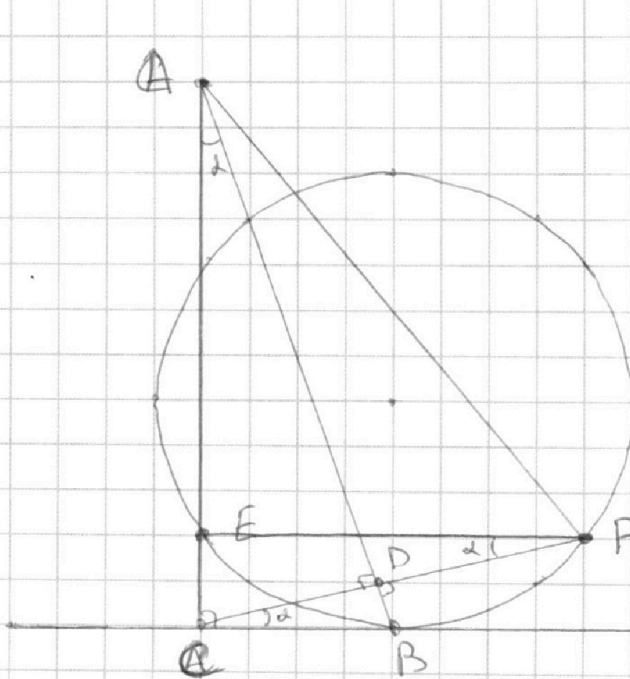
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{ABE}}{S_{CEG}}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{5}$$



$$\frac{S_{ABE}}{S_{CEG}}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\operatorname{arccos}(a) + \operatorname{arcsin}(a) = \frac{\pi}{2}$$

$$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10 \operatorname{arccos}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} 5\pi - 10x = \pi - 2x \\ -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4\pi = 8x \\ 2x \leq 6\pi \\ 2x \geq -4\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{array} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_{8x^3} 625 \quad 5^4$$

$$t^4 - 3 \frac{1}{t} = \frac{4}{3} \cdot t - 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^4 - 3 \frac{1}{t} - \frac{4}{3} t + 3 = 0 \\ k^4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{3} k + 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$xy = ?$$

$$t + k = \log_5(2x \cdot y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^4 - \frac{3}{t} - \frac{4}{3} t + 3 = 0 \\ k^4 + \frac{4}{k} + \frac{1}{3} k + 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t^5 - \frac{4}{3} t^2 + 3t + 3 = 0 \\ k^5 + \frac{1}{3} k^2 + 4 + 3k = 0 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x} 3625 - 3$$

$$\log_5(2x) = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y 3025 - 3$$

$$\log_5 y = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{4}{3}a - \frac{3}{a} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{1}{3}b + \frac{4}{b} + 3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 &= 0 \\ b^5 + \frac{1}{3}b^2 + 3b + 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + \frac{4}{3}b^2 + 3b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$3a^5 - 4a^2 + 9a - 9 = 0$$

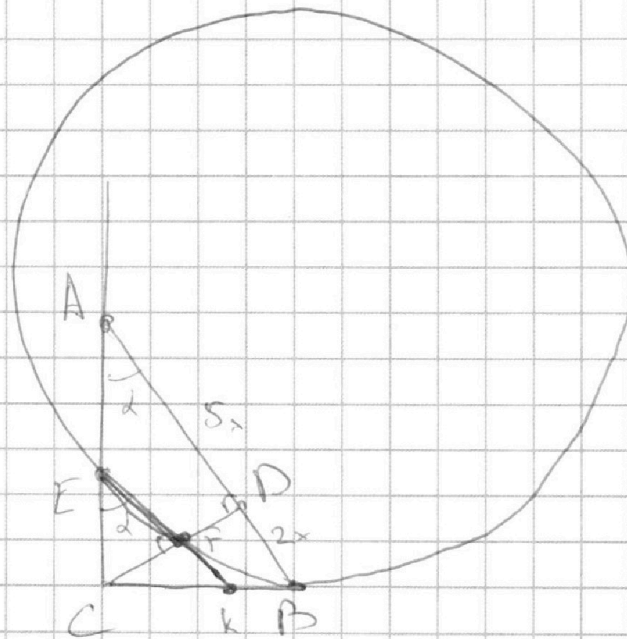
$$3a^5 - 4a^2 + 9a - 9 = 0$$

$$\frac{\sqrt{6x} - \sqrt{4y}}{\sqrt{6x}} = \frac{y}{x}$$

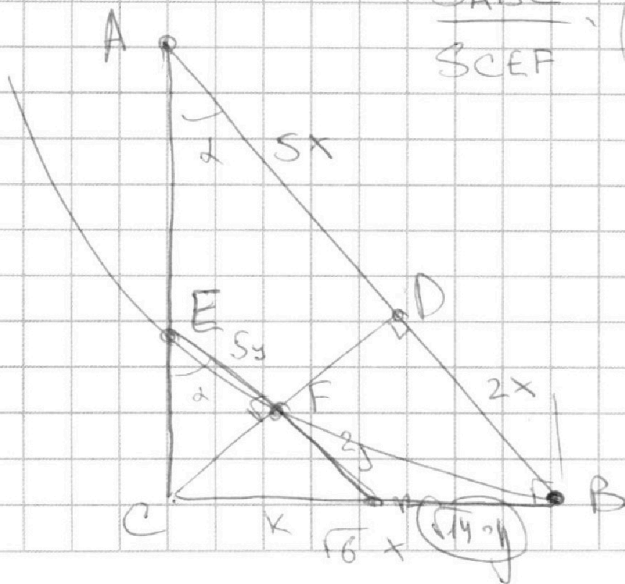
$$\sqrt{6x^2} - \sqrt{4y \cdot x} = \sqrt{6x \cdot y}$$

$$\sqrt{6x^2} = (\sqrt{4y} + \sqrt{6})x + y$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{DK}{DB}$$



$$\frac{S_{ABCE}}{S_{CEFD}} = \left(\frac{CB}{CF}\right)^2 = \frac{CB^2}{CF^2} = \frac{CE \cdot CA}{CF^2}$$



$$\frac{S_{ABCE}}{S_{CEFD}} = \frac{CB^2}{CF^2} = 6x^2$$

$$CD^2 = 10x$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{DK}{CB}$$

$$CD^2 = AD \cdot DK$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

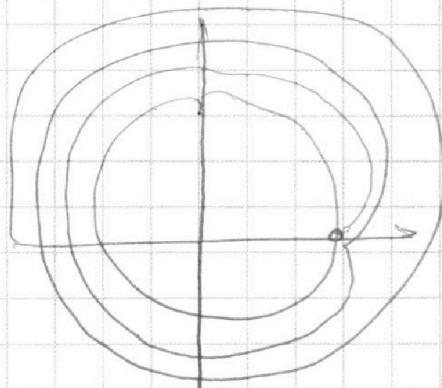
$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 10 \frac{\pi}{2}$$

$$2x \geq -4\pi$$

$$x \leq 6\pi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -2\pi \\ x \leq 3\pi \end{array} \right.$$



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x}^3 625 - 3$$

$$\log_5(2x) = a$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$$

$$\log_5 b = b$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$\log_5 2x$        $a+b = \log_5(2x^4)$

$$\left(\frac{1}{\log_{2x} 5}\right)^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{3}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$\frac{1}{a^4} - 3a - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{13}{3}a + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$\frac{1}{b^4} + \frac{13}{3}b + 3 = 0$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{13}{3}a + 3 = 0$$

$$a \rightarrow b$$

$$a \rightarrow -a$$

$a \rightarrow -a$   
 $b \rightarrow -b$   
 $k \rightarrow a$   
 $k \rightarrow b$

$$\frac{13}{3}b^5 + 3b^4 + 1 = 0$$

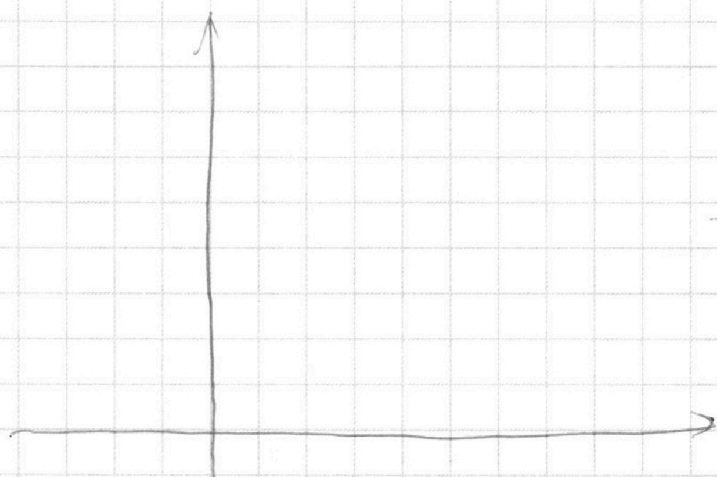
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} -4a &= b \\ -\frac{3}{a} &= \frac{4}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3b &= 4a \\ -4a &= b \end{aligned}$$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3}a - 3$$

$$\frac{1}{625} - \frac{1}{25} - 3\sqrt{5} = \frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3}a + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{4}{b} + \frac{1}{3}b + 3 = 0$$

$$a+b$$

$$(b^4 - a^4) + \left(\frac{4}{b} - \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{1}{3}b - \frac{4}{3}a\right) = 0$$

$$= \frac{4a-3b}{ab} + \frac{4a-b}{3} = 0$$

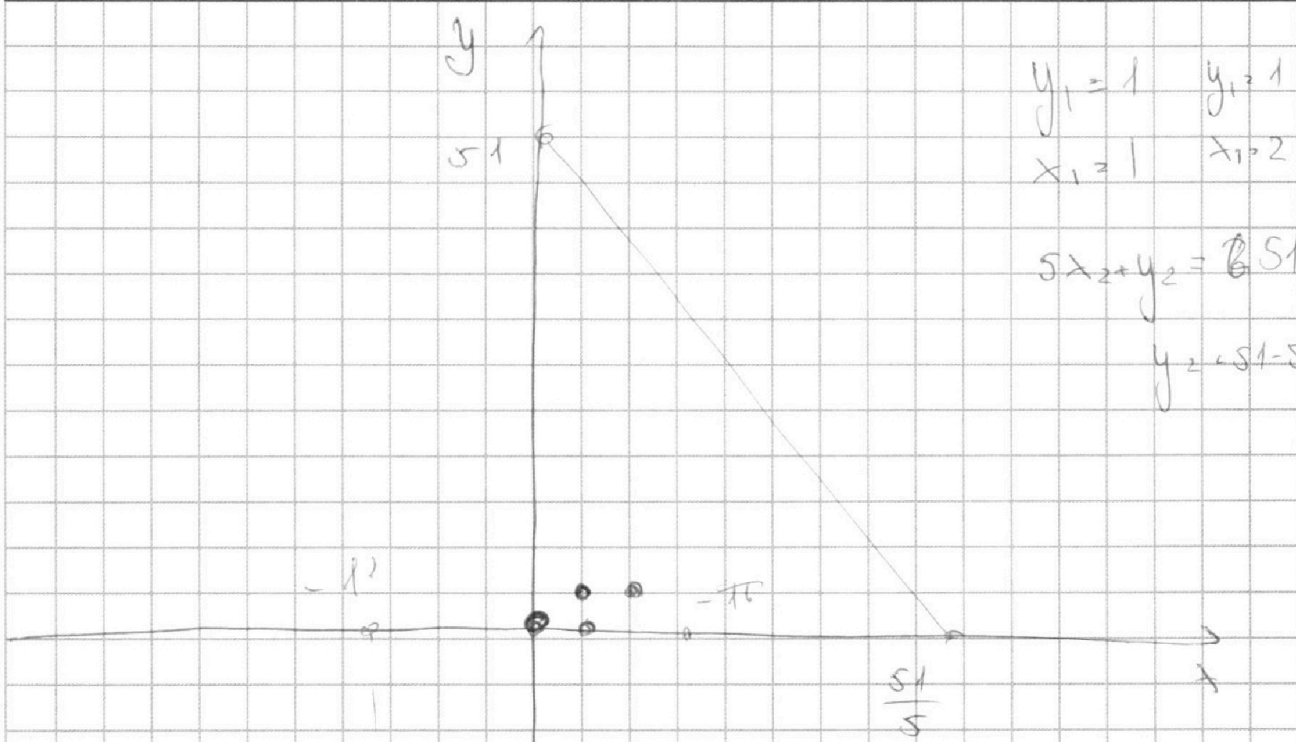
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

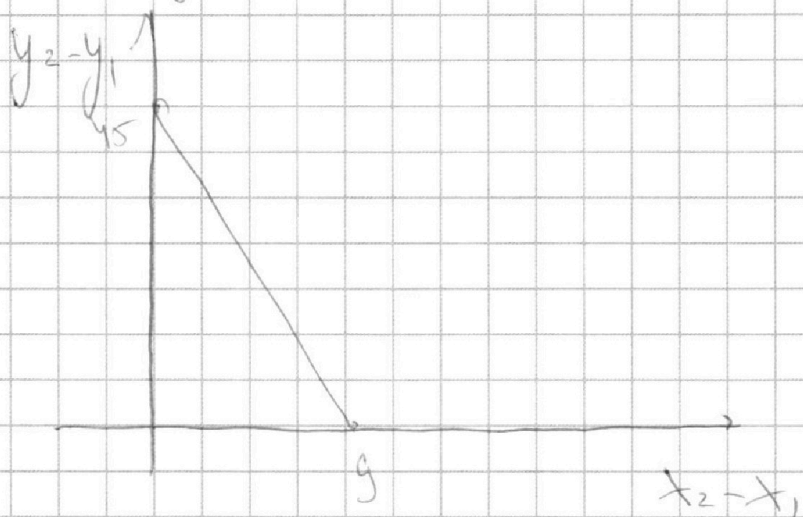
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} y_1 &= 1 & y_2 &= 1 \\ x_1 &= 1 & x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x_2 + y_2 &= 51 \\ y_2 &= 51 - 5x_2 \end{aligned}$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0 \\ b^5 + \frac{1}{3}b^2 + 3b - 4 = 0 \end{cases}$$

$a+b = ?$

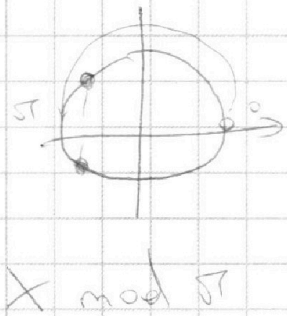
$$b^5 - \frac{4}{3}b^2 + 3b - 3 + \left(\frac{5}{3}b^2 - 1\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$5x_1 + y_1$   
 $(-5x_1 + y_1) +$   
 $(5x_2 + y_2) + (5x_1 + y_1) = 45$   
 $-25 \leq X \leq 35$

$$a^5 - \frac{4}{3}a^2 + 3a - 3 = 0$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$      $a^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$   
 $\frac{3^2}{16}$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) = 4\pi + 2x$$

$$5 \arccos(\cos x) = 2\pi + x$$



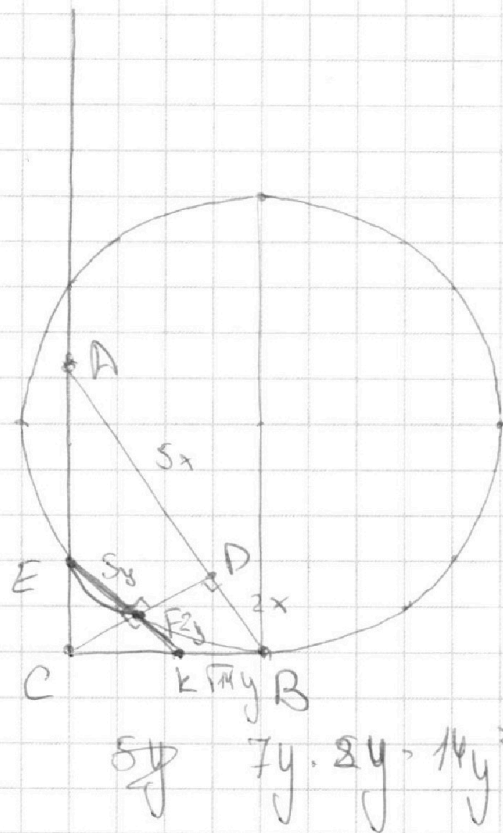
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



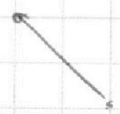
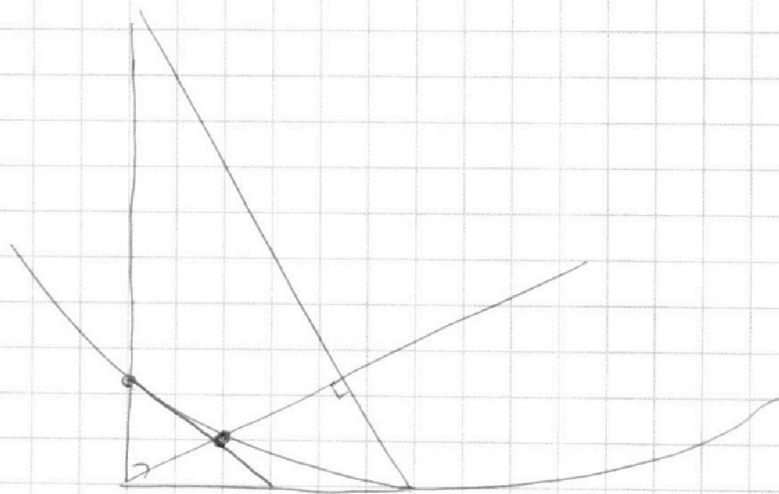
$AB \parallel EF$

$$\frac{CF}{CK} = \frac{CD}{CB}$$

$$CF \cdot CD = CB^2$$

$$= \left( \frac{CD}{CF} \cdot CK \right)^2$$

$$8y \cdot 7y \cdot 2x = 14y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



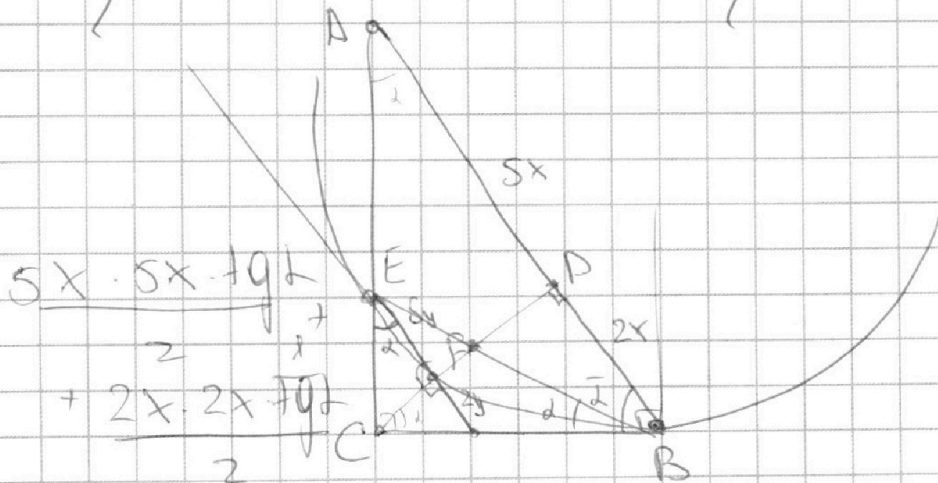
3) Задача 3)

$$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\left. \begin{aligned} 10 \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos}(\cos x) \cdot 10 &= \pi - 2x \\ -\frac{\pi}{2} \cdot 10 \leq \pi - 2x \leq \frac{\pi}{2} \cdot 10 \end{aligned} \right\}$$

область значений  $10 \operatorname{arcsin}(\cos x)$

$$\left. \begin{aligned} 5\pi - \pi &= \pi - 2x \\ 2x &\geq \pi - 5\pi \\ 2x &\leq \pi + 5\pi \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x &\geq -2\pi \\ x &\leq 3\pi \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{5x \cdot 5x + 9x^2}{2} + \frac{2x \cdot 2x + 9x^2}{2}$$

$$\frac{5y \cdot 5y + 9x^2}{2} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD} \Rightarrow CD = 10x^2$$





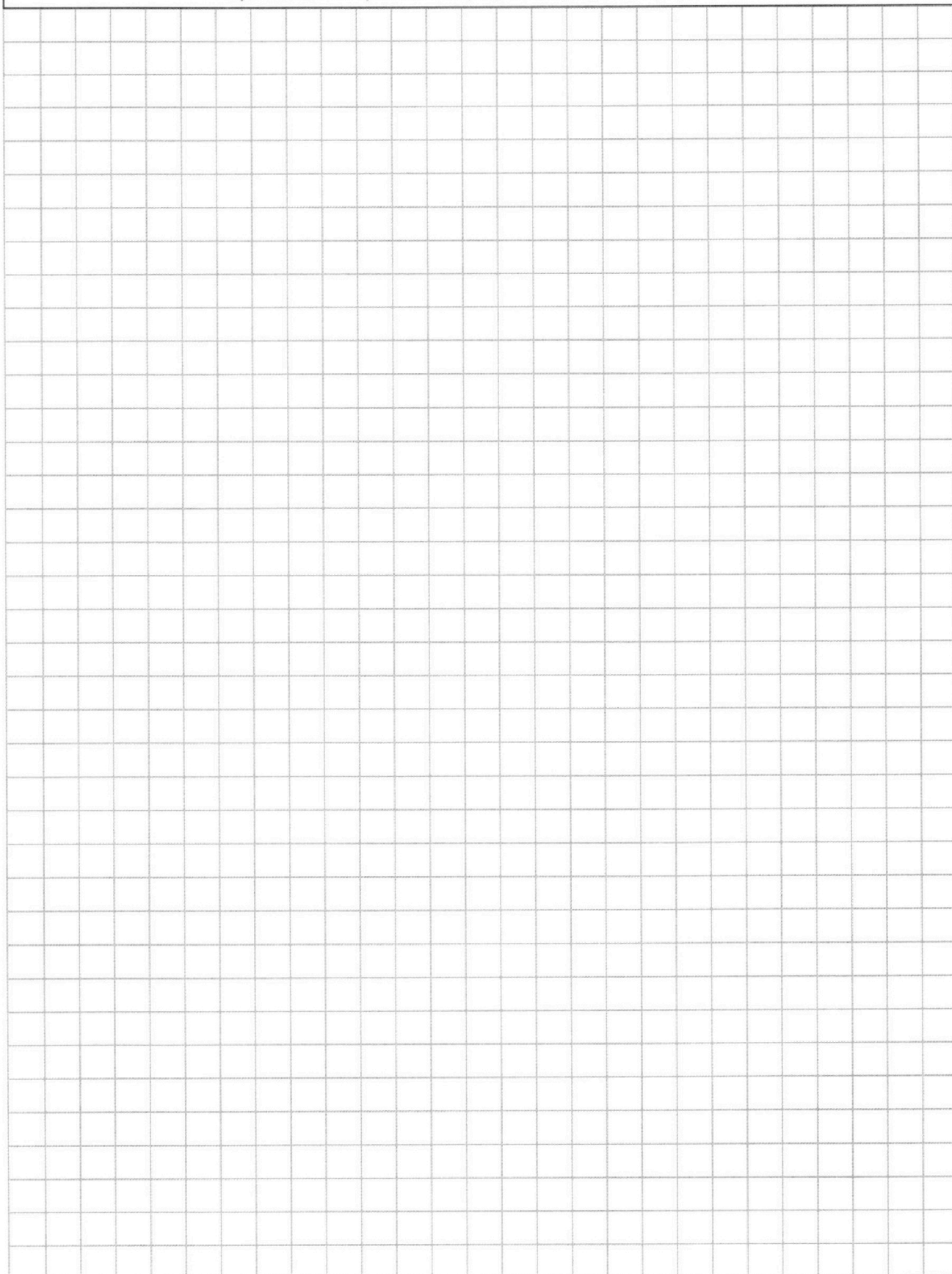
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



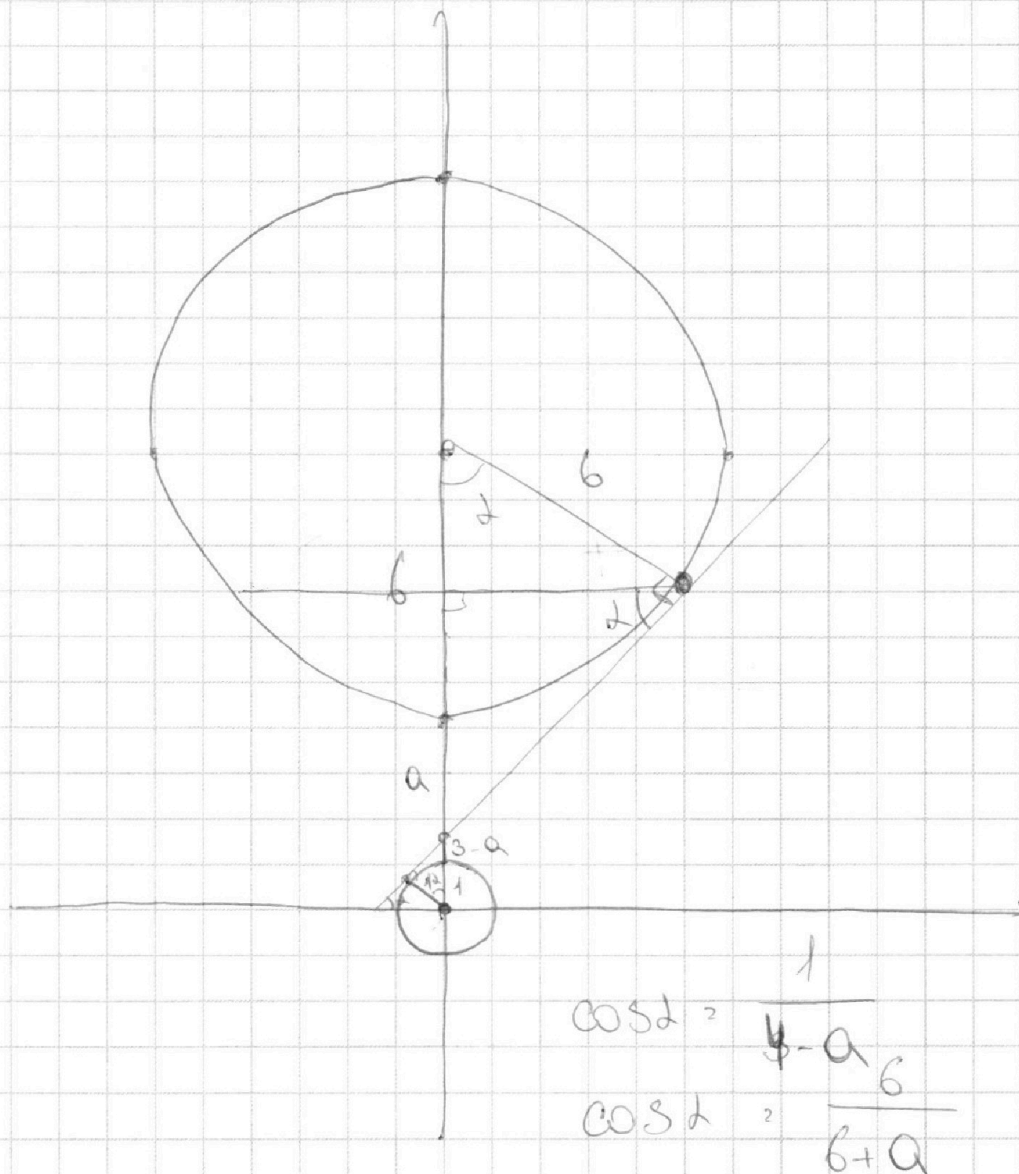
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \alpha = \frac{1}{4-a}$$
$$\cos \alpha = \frac{6}{6+a}$$

$$6+a = (4-a) \cdot 6$$

$$6+a = 24-6a$$

$$7a = 18$$

$$a = \frac{18}{7} \approx 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5)

Решите первое ур-е

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{5x+3} 625 - 3$$

Пусть

$$(\log_{2x+5})^4 - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 - 3$$

$$2x + 1$$

$$1$$

$$\log_{2x} 5$$

$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{3a} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{1}{a} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$$

$$b^4 + \frac{1}{b} \cdot \frac{13}{3} + 3 = 0$$

$$(a^4 - b^4) + \frac{13}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^4 - b^4) + \frac{13}{3} \left( \frac{a+b}{ab} \right) = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a - b) + \frac{13}{3} (a + b)$$

$$(a^2 + b^2)(a - b) = -\frac{13}{3ab}$$

$$a^3 + ab^2 - ba^2 - b^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача №3 (продолжение)~~

~~3.  $0 \leq x \leq \pi!$~~

~~$5\pi - x = \pi - 2x$~~

~~$x = -4\pi$  - не подходит~~

~~4.  $\pi \leq x \leq 2\pi!$~~

~~$5\pi - (2\pi - x) = \pi - 2x$~~

~~$3\pi + x = \pi - 2x$~~

~~$x = -\frac{2\pi}{3}$  - не подходит~~

~~5.  $2\pi \leq x \leq 3\pi!$~~

~~$5\pi - (x - 2\pi) = \pi - 2x$~~

~~$7\pi - x = \pi - 2x$~~

~~$x = -6\pi$  - не подходит~~

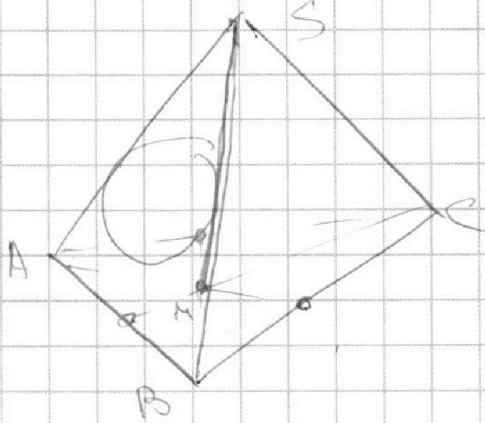
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



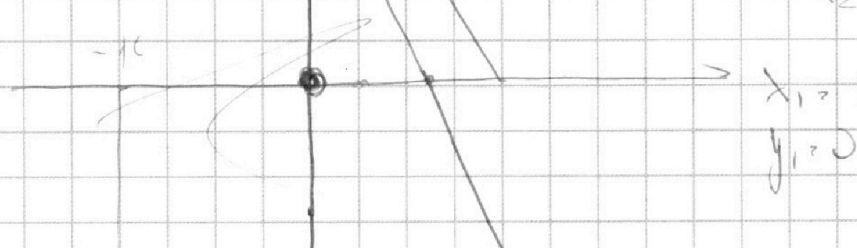
$$0 \leq \leq 5$$

$$2x_2 + y_2 = 7$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 5$$

$$x_1 = 1$$
$$y_1 =$$

$$2x_2 + y_2 = 5$$



00 0

$$5x_1 =$$
$$(5x_2 + y_2) = 45 + (5x_1 + y_1)$$

$$x_1 <$$

