



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



VI. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

VII. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

VIII. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

IX. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

X. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{15}, \quad bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}, \quad ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Рассмотрим } ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow$$

$$abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \quad (\text{каждый простой множитель } a, b, c$$

входит в $(abc)^2$ дважды, т.е. четное кол-во раз,

$$\text{поэтому если } ord_2((abc)^2) \geq 36 \Rightarrow ord_2(abc) \geq 18,$$

$$ord_3((abc)^2) \geq 59 \Rightarrow ord_3(abc) \geq 30, \quad \text{и т.д.}$$

$$\text{но поскольку } ac: 5^{28}, \quad abc: 5^{26} \Rightarrow abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot$$

$$5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

приведем пример

$$\text{Тогда } a, b, c: \begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14} \end{cases} \text{ Тогда } abc =$$

$$= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \quad \text{и} \quad ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} \cdot 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11};$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}; \quad ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\Rightarrow \text{но так как } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} - \text{мин возможное } abc$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

Решение:

Окружность описана около $\triangle AEF$

касается $AC \Rightarrow \angle AFE = \angle FAC$,

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle BAF = \angle AFE = \alpha$.

CD - высота $\triangle ABC$ - $\beta/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CAD \Rightarrow \angle CAA = \angle CBD = \beta \Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle BAF$

(по двум углам) $\Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB}$, ~~по двум сторонам~~ $(EF \parallel BD)$

~~по двум сторонам~~ $\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow CE = BF \cdot \frac{AC}{AB} = DF \cdot \sin \beta$

$\frac{CF}{CE} = \sin \angle CFE = \sin \beta \Rightarrow CE = CF \cdot \sin \beta = BF \cdot \sin \beta \Rightarrow F$ -

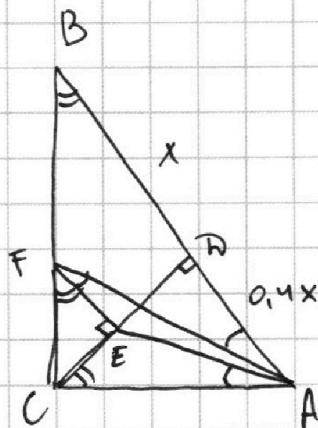
середина $BC \Rightarrow \frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{4}{1} = 4$

Поскольку $\frac{AB}{BD} = 1,4$ $\frac{S_{\triangle CBD}}{S_{\triangle CFA}} = 0,4 = \frac{1}{2}$ (CD - высота,

AD ; BD - основаниями) $\Rightarrow \frac{S_{\triangle CFA}}{S_{\triangle CFE}} = \frac{4}{5} \cdot 2 =$

$= \frac{8}{5}$.

Ответ: $\frac{8}{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.
 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$ ОДЗ:

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$$

$$9\pi - 2x \in [0; 10\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi\right].$$

Рассмотрим случаи, когда x принадлежит различным интервалам $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, $[\pi; 2\pi]$, $[2\pi; 3\pi]$, $[3\pi; 4\pi]$.

1) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$$\Rightarrow 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = -4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

2) $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Leftrightarrow x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7}{6}\pi$$

3) $x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(-x + 2,5\pi) = 9\pi - 2x$

$$\Rightarrow -10x + 25\pi = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 16\pi, x = 2\pi$$

4) $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(x - 2,5\pi) = 9\pi - 2x$

$$10x - 25\pi = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 12x = 34\pi \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}\pi$$

5) $x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow 10 \arccos(\sin x) = 10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$$\Rightarrow 45\pi - 10x = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 8x = 36\pi \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}\pi$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 14y + 77) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Покажем на графике на плоскости xOy :

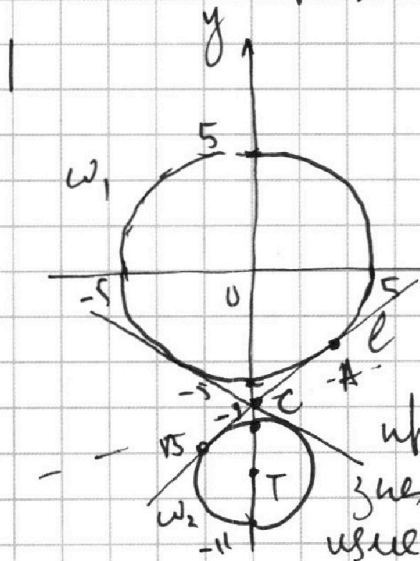
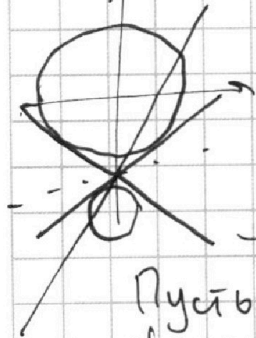


График второго ур-я - это две окр-ти радиусов $r_1 = 5$ и $r_2 = 2$ и центры $O(0;0)$ и $T(0;-9)$,

линия l график первого ур-я - это прямая, в зависимости от значения параметра a , имеет или наклон, который может равняться

с нулю. Если система ур-я имеет 4 решения, это значит что данная прямая является секущей для двух окр-ей. Из геометрического соображения ясно, что для семейства таких прямых, для которых существует прямая параллельная и являющаяся касательной, является множество прямых, касательных к y у которых наклон меньше больше или равно по модулю, чем у внутренней касательной к двум окр-ям; из рисунка видно, что все такие прямые удовлетворяют этому условию, и ни одна другая не удовлетворяет.



Найдём коэффициент наклона внутренней касательной l . ~~Видно, что она проходит через $T(0; -9)$ т.к. касается этой~~

Пусть ω_1 касается l в т. А, а ω_2 в т. В. и пересекает ось симметрии Oy в т. С

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

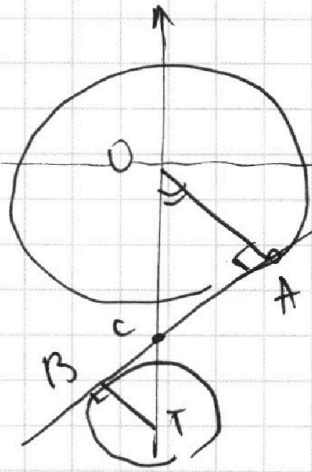
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 - продолжение



Тогда $\triangle AOC \sim \triangle TBC$; $\frac{OA}{TB} = \frac{5}{2}$

$$\begin{cases} OC + CT = 9 \\ \frac{OC}{CT} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow OC = \frac{45}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle OCA = \frac{OA}{OC} \quad AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 25} = \sqrt{\frac{800}{49}} = \frac{10\sqrt{2}}{7}$$

$\Rightarrow \text{tg} \alpha$ - коэф наклона l :

$$\therefore \text{tg} \alpha = \text{tg} \angle OCA = \frac{AC}{OA} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{7}}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$$

или симметрич коэф наклона второй прямой $-\frac{10}{7}\sqrt{2}$. Если $\text{tg} \alpha < \frac{2\sqrt{2}}{7}$ коэф наклона прямой

$y = -\frac{5}{6a}x + b$ если $\left|-\frac{5}{6a}\right| < \frac{10}{7}\sqrt{2}$ нулевой

b не существует, а если $\left|-\frac{5}{6a}\right| > \frac{10}{7}\sqrt{2}$, тогда

всегда найдёт b - абсцисса т.с. Если $a = 0, b = 0$, прямая $x = 0$ не подходит. Теперь можно найти, удовлетворяющие нас a :

1) $-\frac{5}{6a} > \frac{10}{7}\sqrt{2}$ $a < 0$
 $-\frac{5}{6a} > \frac{10}{7}\sqrt{2} \Rightarrow -\frac{5}{6} > \frac{10}{7}\sqrt{2}a \Rightarrow a < -\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{12}$

2) $-\frac{5}{6a} < -\frac{10}{7}\sqrt{2}$
 $-\frac{5}{6a} < -\frac{10}{7}\sqrt{2} \Rightarrow -\frac{5}{6} < -\frac{10}{7}\sqrt{2}a \Rightarrow a < \frac{5}{6\sqrt{2}}$

3) $a = 0$

Ответ: $-\frac{7\sqrt{2}}{12} < a < \frac{5}{6\sqrt{2}}$

или $-\frac{5}{6a} > \frac{10}{7}\sqrt{2}, a < 0$
 $-\frac{5}{6a} < -\frac{10}{7}\sqrt{2}, a \geq 0 \Rightarrow -\frac{7}{24\sqrt{2}} < a < \frac{7}{24\sqrt{2}}$

Ответ: $-\frac{7}{24\sqrt{2}} < a < \frac{7}{24\sqrt{2}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\log_{x^3} 121 - 5$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{1}{\log_{11} x} \cdot \frac{2}{3} + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - \frac{16}{3} = 0 \quad (1) \quad x > 0$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} + 13 \log_{(0,5y)^3} 11 + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} + \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^5(0,5y) + 5 \log_{11}(0,5y) + \frac{16}{3} = 0 \quad (2); y > 0$$

Свойства логарифмов:

Рассмотрим $f(x) = \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x$. Если $f(x) = a$

то $f(\frac{1}{x}) = -\log_{11}^5 x - 5 \log_{11} x = -f(x)$, тогда

если $f(x) = \frac{16}{3}$, $f(0,5y) = -\frac{16}{3} \Rightarrow 0,5y =$

$= \frac{1}{x}$, тогда $x \cdot y = 2 \quad (x, y \neq 0)$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



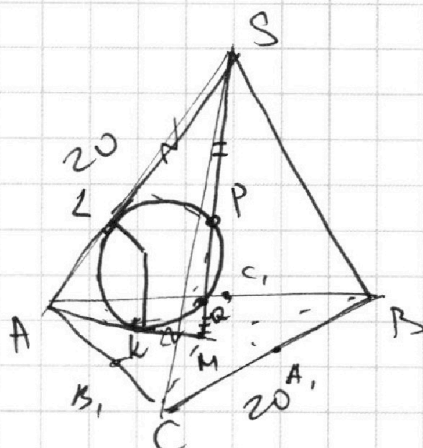
Задача 7.

Решение.

Соединяем точки M отн. Ω
набрав $MQ \cdot MP = SP \cdot SQ \Rightarrow$

$\Rightarrow SL = MK$ (отрезки
касательных из τ S и M)

и \perp им $\Rightarrow AL = AK \Rightarrow$



$\Rightarrow AM = 20 \Rightarrow AA_1 = 30$ (медиа), $S_{\triangle ABC} = 180 \Rightarrow$

\Rightarrow высота AK из A на BC : $AK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{180}{18} = 18$

$= AK$ в $\triangle ABC$. Рассмотрим $\triangle ABC$:

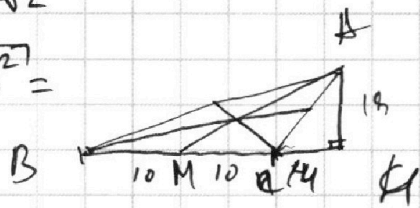
по т. Пифагора $AK = \sqrt{30^2 - 18^2} = 24$

$\Rightarrow \# \text{ } \textcircled{A}$ (пусть K лежит
на продолжении BC) \Rightarrow

$\Rightarrow AC = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520} = 2\sqrt{130}$

$AB = \sqrt{30^2 + 18^2} = 2\sqrt{130}$; $AB = \sqrt{34^2 + 18^2} =$

$= \sqrt{324 + 1156} = \sqrt{1480} = 2\sqrt{370}$.



так как $\angle C_1 = 90^\circ$ в $\triangle ABC_1$ можно найти $\sin C$ по медиане

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \cdot \sin C = \frac{18}{2\sqrt{130}} \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1 =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a+b \geq 6 \\ b+c \geq 14 \\ a+c \geq 16 \end{cases} \Rightarrow a+b+c \geq 19$$

28

S:

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b &= 0 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 5^{14} \cdot 3^9 \\ b &= 5^0 \cdot 3^5 \\ c &= 5^{14} \cdot 3^{16} \end{aligned}$$

2¹⁴

$$\begin{aligned} bc &: 2^{14} \\ ac &: 2^{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 14 \\ c &= 59 \end{aligned}$$

2³⁰

bc 8 8 6

19

$$\begin{aligned} b &= 15 \\ c &= 15 \end{aligned}$$

15 10

6

$$\begin{aligned} 12 & 2 \\ 21 & 4 \end{aligned}$$

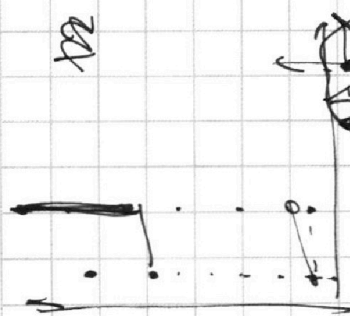
15 9 6

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 42 \\ c &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 6 \\ b+c &= 14 \\ a+c &= 25 \end{aligned}$$

9 5 16

$$10x - 5\pi = 9\pi - 2x \Rightarrow 12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$



$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{3}{16} + \frac{t}{16} \\ f(t) &= \frac{3}{16} + \frac{t}{16} \\ f(t) &= \frac{3}{16} + \frac{t}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{3}{16} + \frac{t}{16} \\ f(t) &= \frac{3}{16} + \frac{t}{16} \\ f(t) &= \frac{3}{16} + \frac{t}{16} \end{aligned}$$

$$\log_5 x + 5 \log_5 x = \log_5 x^5 + \log_5 x^5 = \log_5 x^{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

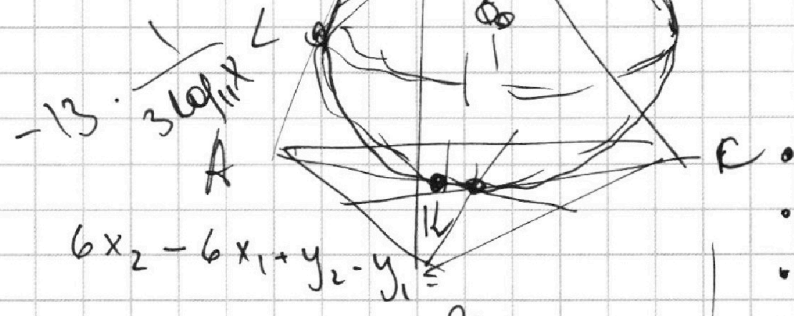
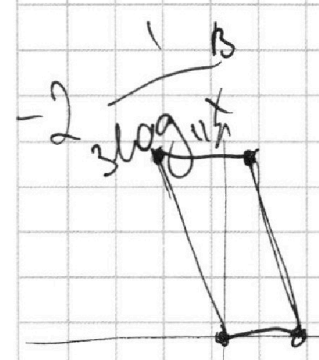
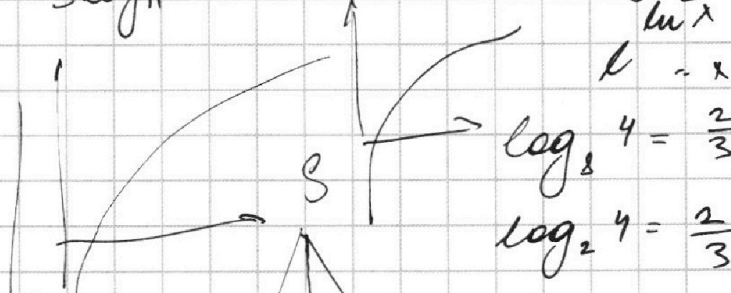
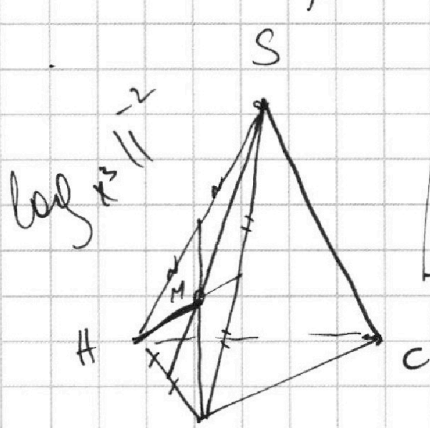
$$\log_{11}^4 x - \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \quad c=1 \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{1}{\log_{11} x} = \log_{x^3} 1 - \log_{x^3} 121 \quad \log_a b = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{1}{\log_{121} x^3} + 5 = 0 \quad \log_{121} 11 = \frac{1}{2}$$

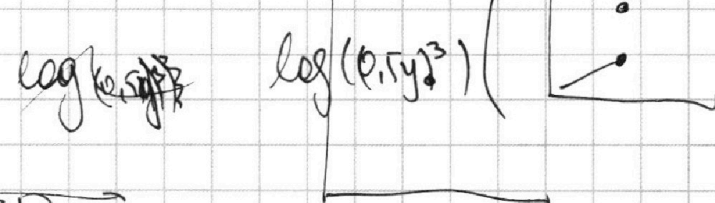
$$\log_{11}^4 x - \frac{1}{\log_{11} x} + \frac{2}{3 \log_{11} x} + 5 = 0$$

$$\log_{11} a = \frac{\log_{11} a}{\ln a} \cdot \frac{1}{2}$$



$$t^5 + t - 5 = 0$$

$$t(t^4 + 1) = 5$$



$$\log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{11}^5 (0,7y) + 5 \log_{11} (0,7y) + \frac{16}{3} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving circles and lines.

Equations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 11y + 81 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (y-9)^2 = 2^2 - x + 2\pi \frac{\pi}{2}$$

$$y = \frac{6-5x}{6a} = \frac{6}{6a} - \frac{5}{6a}x$$

$$5x + 6ay$$

$$y = -\frac{5}{6a}x$$

Algebraic Solution:

$$x(x+4) = (2-x)(2-x)$$

$$x^2 + 4x = 24 - 2x - 2x + x^2$$

$$14x = 24$$

$$x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$$

Other Calculations:

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{y}$$

$$x + y = 9$$

$$y = \frac{5}{2}x$$

$$x + \frac{5}{2}x = 9$$

$$\frac{7}{2}x = 9$$

$$x = \frac{18}{7}$$

Diagrams:

- Top left: A coordinate system showing two circles of radius 5 centered at (0, 5) and (0, -5). A line passes through their centers.
- Top middle: A circle with center O and radius 5. A line is tangent to it at point A. The distance from O to the line is 5.
- Top right: A coordinate system showing a circle centered at (0, 9) with radius 2. A line is tangent to it.
- Middle: A large circle with radius 10 and center O. A vertical line passes through O. A smaller circle is tangent to the vertical line and the large circle.
- Bottom left: A horizontal line with points marked at 4, 2, and 10.
- Bottom middle: A circle with center O and radius 9. A line is tangent to it.
- Bottom right: A coordinate system showing a circle centered at (0, 9) with radius 2. A line is tangent to it.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

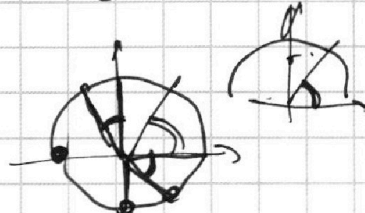
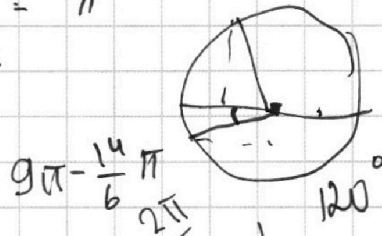


10/12 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad x \in \left[\frac{4,5\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

11/12 $\arccos(\sin x) = \pi$
 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$

$-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi$

13/12

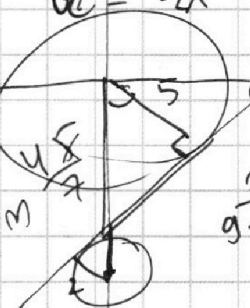


$y = -2 \times 54$
 $0,5y = -x$
 $y = -2x^2$

$\arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2}$

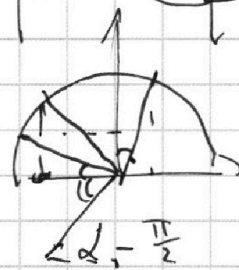
$\arccos(-1) = \pi$

16/12

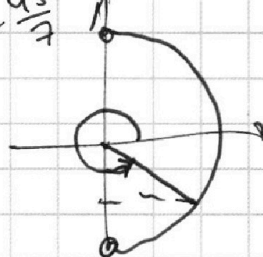
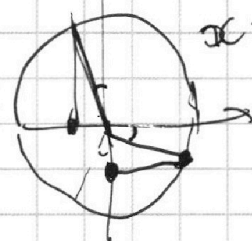


$g - x = \frac{5}{x} \pm 1$
 $2x = 45 - 5x$
 $x = \frac{45}{7}$

$\pi - x$

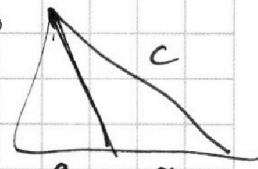
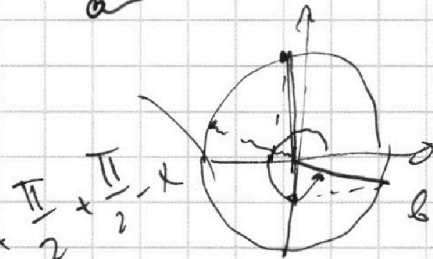


$2\pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$
 $\Delta = \frac{3\pi}{2} - 2\alpha$



$25x^2 = 2025 - 1225x$
 $25x^2 + 1225x - 2025 = 0$
 $x = \frac{\pi}{2}$

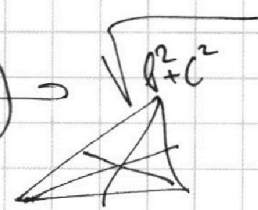
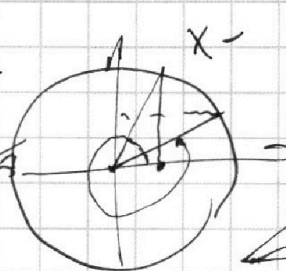
$x = \frac{\pi}{2}$



17/12

$2025 - 25 \cdot 49 = 3x$
 $\frac{2025 - 1225}{49} = 3x$
 $\frac{800}{49} = 3x$

$\frac{225}{49}$
 $\frac{1225}{49}$
 $\frac{1450}{49}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

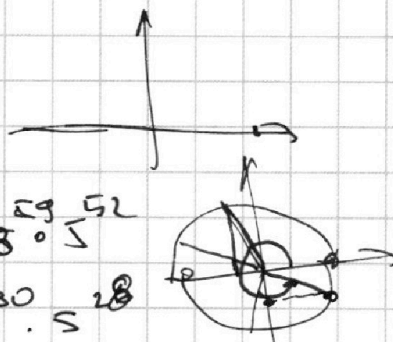
$$10 \left(\arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right) = 9\pi - 2x$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$\arccos \in [0; \pi]$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3^{29} \cdot 5^{52}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \sin B$$

x c

x

$$x + y + z = 18$$

$$x + y = 6$$

$$y + z = 14$$

$$x + z = 16$$

$$x - y = 2$$

$$x + y = 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$z = 12$$

$$x = 4$$

$$y = 0$$

$$a = 2^7$$

$$b = 2^{10}$$

$$c = 2^{14}$$

$$a = 2^7$$

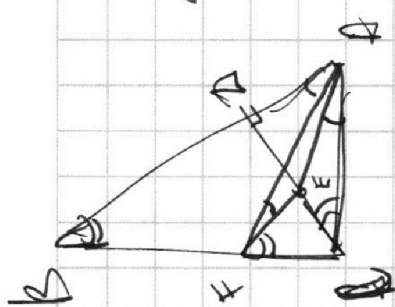
$$b = 2^{10}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{CF}$$

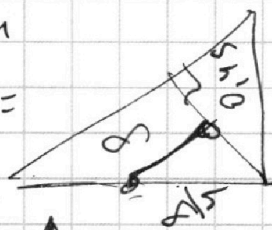
$$\frac{BF}{CE} = 1$$

$$\frac{CE}{CF}$$



$$\log_{10} \frac{1}{10^x} =$$

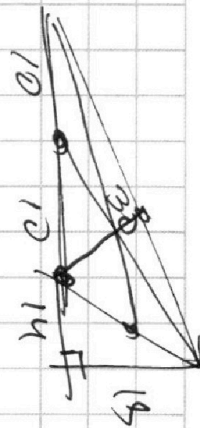
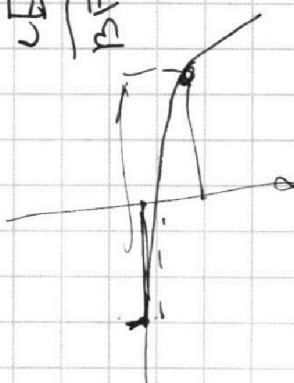
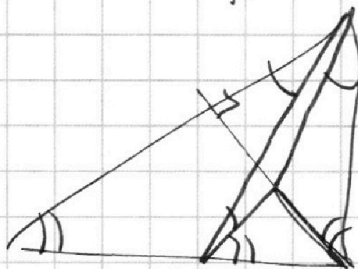
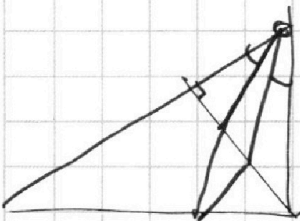
$$= -\log$$



$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{BA}$$

$$CE = BF \cdot \sin d$$

$$CE = CF \cdot \sin d$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{22}$$

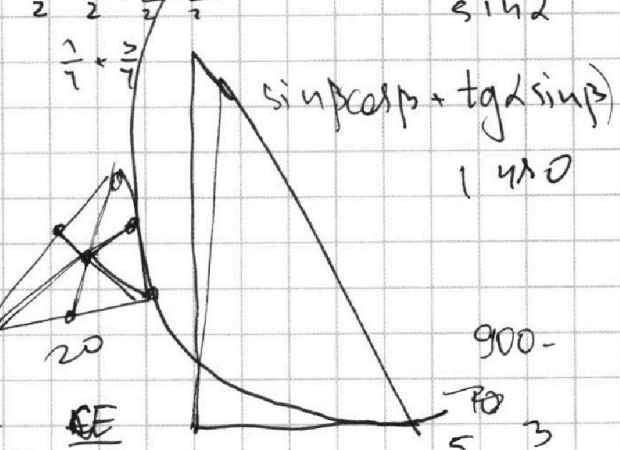
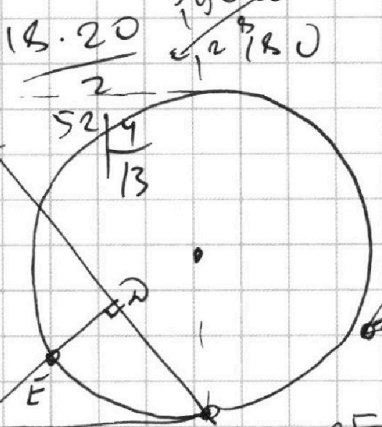
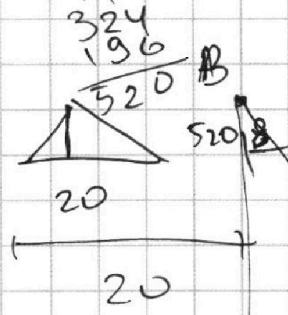
$$\frac{16 \cdot 20}{2} = 160$$

$$\frac{324 \cdot 14}{81} = 56$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 2}{1156 - 324}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha}$$



$$\frac{7}{24\sqrt{2}}$$

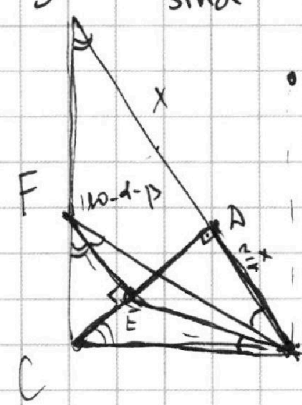
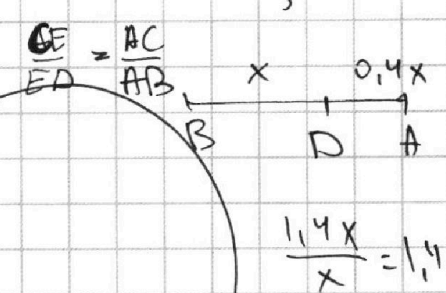
$$\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\frac{AB}{BF} = \frac{BF}{BC}$$

$$\frac{AB}{BF} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CF}{BF} = \frac{CE}{EN}$$

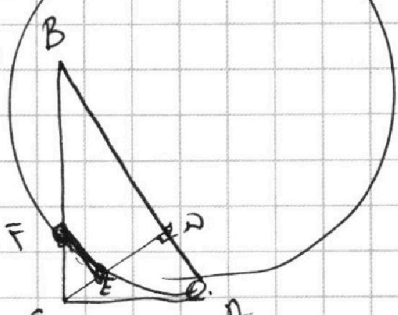
$$\frac{CE}{AE} = \frac{BF}{AB}$$



$$\frac{CE}{ED} = \frac{AC \cdot CE}{AB \cdot d}$$

$$CE = EA \cdot \sin \beta$$

$$CE = (CD - CE) \cdot \sin \beta$$



$$\frac{AB}{BA}$$

$$\frac{CE^2}{AB}$$

$$\frac{BF \cdot AC \cdot CE \cdot ED}{AB \cdot BF}$$

$$h = \sqrt{AB \cdot BF}$$

$$\sqrt{x \cdot \frac{2}{5}x} = \frac{\sqrt{2}}{5}x$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BF}{AB} \Rightarrow CE = \frac{AC \cdot BF}{AB}$$

$$S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$$

$$\frac{FE}{AA} = \frac{CE}{AB} = \frac{AC \cdot BF}{AB \cdot AD}$$

$$\frac{2}{5}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{5}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}x^2}{5\sqrt{5}}$$

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot BF} = \frac{\sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{AC}{AF} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BF}$$