



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$a_4 = \frac{\sqrt{15k+6}}{(k-3)^3}$$

$$a_{10} = k+4$$

$$a_{12} = \sqrt{(15k+6)(k-3)}$$

$$a_1 \cdot q^3$$

$$a_1 \cdot q^9$$

$$a_1 \cdot q^{11}$$

$$a_1^2 \cdot q^{14} = \frac{15k+6}{k-3}$$

$$a_{10} = k+4$$

$$a_1 \cdot q^9 = k+4$$

М.к. в a_4 под корнем $15k+6$,
 М.к. в a_{10} $k+4$, в a_{12} $\sqrt{(15k+6)(k-3)}$
 Отсюда $a_1 \cdot q^4 = \frac{\sqrt{15k+6}}{k-3} = a_4 \cdot q^4 \geq 0$, следовательно

$$\frac{a_3}{a_4} = q^4 = k-3$$

$$q^2 = \sqrt{k-3}$$

Всё $k \geq 3$, из-за $a_{10} > 0, a_{12} \geq 0$

$$(k+4) \cdot \sqrt{k-3} = \sqrt{(15k+6)(k-3)}, \text{ т.е. либо } k-3=0,$$

либо возводим в квадрат, здесь $k-3$ находится в знаменателе
 под корнем в a_4 , либо $k+4 = \sqrt{15k+6}$

$$k^2 + 16k = k^2 + 8k + 16 = 15k + 6$$

$$k^2 - 7k + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9$$

$$k = \frac{7 \pm 3}{2} = 5; 2$$

Заметим, что $k=2$ не подходит, ведь $q^4 = k-3 = -1$
 невозможна.

Ответ: $k=5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$|y-20| + 2|x-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$x+4+5-x-3z - 2\sqrt{(x+4)(5-x-3z)} = 4y - 8x - 4x^2 + 4z + 36 - 12\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$12 - 3z - 2\sqrt{x-5x} = 5x - x^2 - 3xz + 35 - 4x - 12z = 4y - 8x - 4x^2 + 4z + 36 - 12\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$y \leq 20$$

$$y - 20 + 2y$$

$$20 - y + 40 - 2y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$40 - 3y = \sqrt{225 - z^2}$$

$$40$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + p$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \cos x - \\ &- 2 \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 3(\cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x = p - 3$$

$$f' = 12 \cos^2 x \cdot \sin x - 6 \cos x \cdot \sin x + 3 \cdot \sin x$$

$$4 \cos^3 x - 4 \cos^2 x + \cos x - 2 \cos^2 x + 2 \cos x$$

$$1 \cos x \cdot ((4 \cdot 2 \cos x - 1)^2 - 2 \cos^2 x + 2 \cos x) = p - 3$$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 & \quad p = 3 & x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n & \quad p = 3 + K \cdot \cos x \\ (2 \cos x - 1)^2 &= 2 \cos x + 2 = K & & \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{aligned}$$

$$2 \cos x \cdot 4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3 = K \quad K = 3 + m \cdot \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos x = m \quad m = \cos x$$

3 + 4x

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x = p - 3$$

Возьмем производную

$$12 \cos^2 x \cdot \sin x - 6 \cos x \cdot \sin x + 3 \sin x$$

$$6 \cos x \cdot \sin 2x - 6 \sin 2x + 3 \sin x$$

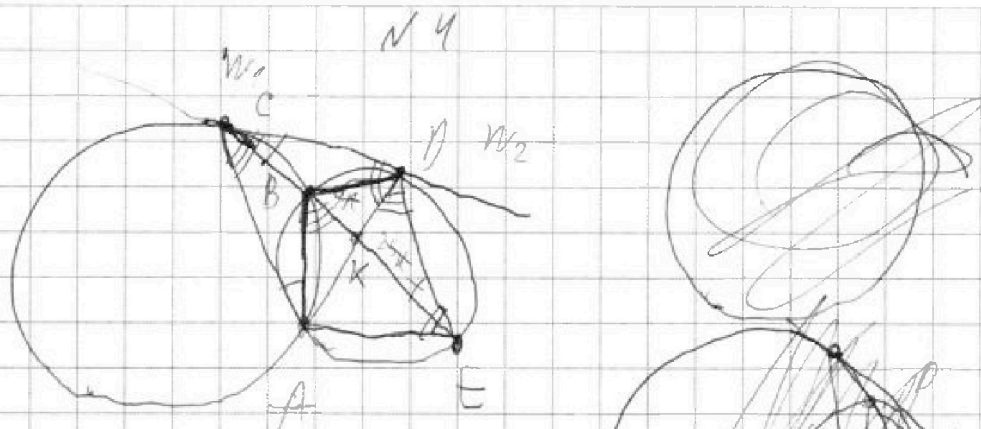


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle DCB = \angle CAB$$

$$\angle CDA = \angle CDE$$

$$\angle CDK = \angle EDA$$

$$\frac{CE \cdot DK}{SE \cdot DK} = \frac{SE \cdot DK}{S \cdot CDK} = \frac{DE \cdot \sin \angle EDK \cdot DK/2}{BCD \cdot \sin \angle CDK \cdot DK/2} = \frac{DE \cdot \sin \angle EDK}{CD \cdot \sin \angle CDK}$$

$$= \frac{25}{9} \quad \frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$$

$$\angle KDE = \angle ADE = \angle ABE = 180 - \angle CBA$$

$$\sin \angle ABE = \frac{CA}{2R}$$

~~$$\angle CDA = 180 - \angle CBA$$~~

$$\text{из треугольника } CDA: \frac{AC}{\sin \angle CDA} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$$

$$\text{из треугольника } ADE: \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{DA}{\sin \angle DEA}$$

$$AC = DA \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle CAD}$$

$$AE = DA \cdot \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle DEA}$$

$$AC \cdot AE = DA^2$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2 \angle CDA}{\sin^2 \angle DEA}$$

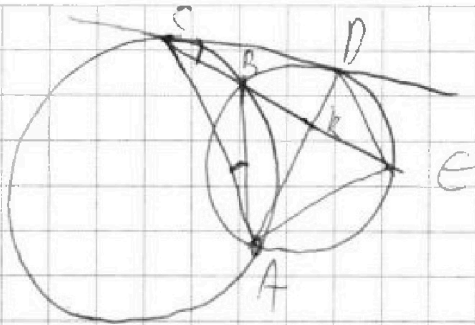


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AE} = \frac{\sin^2 \angle CDA}{\sin^2 \angle DEA}$$

~~$$\frac{AC \cdot \sin \angle ACD \cdot CD}{DE \cdot \sin \angle AED \cdot AE} = \frac{AC \cdot 9 \cdot \sin \angle CDK \cdot \sin \angle ACD}{AE \cdot 25 \cdot \sin \angle EDK \cdot \sin \angle AED}$$~~

~~$$= \frac{9}{25} - \text{отсюда же получаем отношение } \triangle ACD \text{ и } \triangle AED,$$~~

~~отношение равно 3/5, т.е. $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{5}$~~

$$\angle CAD = \angle ADE = 180 - \angle ACD - \angle CDA = 180 - \angle AED - \angle ADE$$

AK - высота в треугольнике ADE

Диаметральный угол опирающийся на хорду равен половине дуги, на которую он опирается. Значит

$$\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25} \quad \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle DEA} = \frac{3}{5} = \frac{\sin \angle CDK}{\sin \angle EDK}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{25}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$$

Ответ: $\frac{5}{3}$

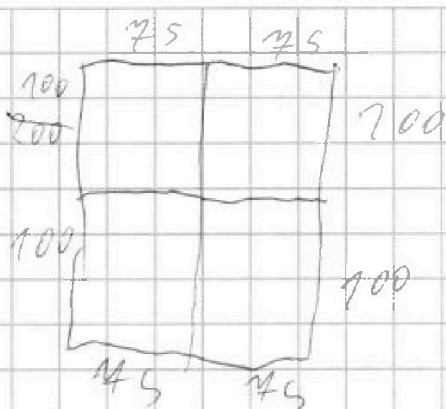


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Силами трёх работников необходимо выполнить работу объёмом $100 \times 145 = 14500$ кв. м. Работники выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м.

Если же рабочие работали вместе, тогда выполняли работу за $14500 / (3 \times 100) = 48\frac{2}{3}$ дней. В этот период выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м.

Если же рабочие работали вместе, тогда выполняли работу за $14500 / (3 \times 100) = 48\frac{2}{3}$ дней. В этот период выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м. Поочередно выполняли работу по очереди, каждый за 100 кв. м.

$3 \times 14500 - 3 \times (48 \times 100) + 48 \times 100 = 3 \times 14500 - 2 \times 48 \times 100$
 Ответ: $3 \times 14500 - 2 \times 48 \times 100$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b, \quad a - b \leq 3, \quad (a - c)(b - c) = p^2, \quad a + b^2 = 820$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$p^2 = p \cdot p = 1 \cdot p^2 = -1 \cdot (-p^2) = -p \cdot (-p)$$

$$(a - c) = b - c = p \quad a - c = b - c = -p$$

невозможны, ведь $a > b$

$$a - c = 1, \quad b - c = p^2; \quad a - c = -p^2, \quad b - c = -1$$

невозможны, ведь $a > b$

получаем, что возможны только случаи

$$a - c = p^2, \quad b - c = 1; \quad a - c = -1, \quad b - c = -p^2$$

1 случай

$$a - b = p^2 + (-1 + 1) = p^2 - 1 \text{ отсюда же можно вывести что}$$

$p = 3$, ведь в остальных случаях $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, что было бы невозможно для уравнения.

$$2 \quad a - c = 9, \quad b - c = 1$$

$$a = c + 9, \quad b = c + 1$$

$$c + 9 + c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$c^2 + 3c + 10 - 820 = 0$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 9 \cdot (1 + 40 \cdot 4) = 9 \cdot 361 = 9 \cdot 19^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 3 \cdot 19}{2} = -30; \quad 27$$

получаем решения $(-27, -29, -30), (36, 28, 27)$

2 случай

$$a - b = (c - 1) - (c - p^2) = p^2 - 1 \text{ аналогично получаем } p = 3, \text{ так}$$

$$a - c = -1, \quad b - c = -9 \quad a = c - 1, \quad b = c - 9$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 190 \\ \hline 361 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = c - 1, b = c - 9$$

$$c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c + 80 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 740 = 49 + 2960 = 3009$$

$$4 + 1 + 24 = 4 + 3 = 12$$

$$17^2 = 4 \pmod{9}$$

$$37 = 1 \pmod{9}$$

$$20 = 2 \pmod{9}$$

$$4 = 4 \pmod{9}$$

$$D = 4 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 12 = 3 \pmod{9}$$

$$17^2 = 1 \pmod{3}$$

$$37 = 1 \pmod{3}$$

$$20 = 2 \pmod{3}$$

$$4 = 1 \pmod{3}$$

$$D = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3 = 0 \pmod{3}$$

~~некорректно, так как дискриминант не полный квадрат, следовательно делится на 3, но не делится на 9, значит решением этого уравнения являются иррациональные числа, а не целые~~

$$\text{Ответ: } \{-21, -29, -30\}, \{36, 28, 27\}$$

$$17^2 + 37 \cdot 80 = 17 \cdot 17 + 17 \cdot 80 + 20 \cdot 80 = 17 \cdot 97 + 20 \cdot 80 =$$

$$= 100 \cdot 17 + 100 \cdot 16 - 17 \cdot 3 = 100 \cdot 33 - 51 =$$

$$= 3300 - 51 = 3249 = 57^2$$

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 399 \\ 2850 \\ \hline 3249 \end{array}$$

$$c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20, 37$$

$$a = -21$$

получаем решения $(-21, -29, -30), (36, 28, 37)$

$$\text{Ответ: } (-21, -29, -30), (36, 28, 27), (-21, -29, -30), (36, 28, 37)$$

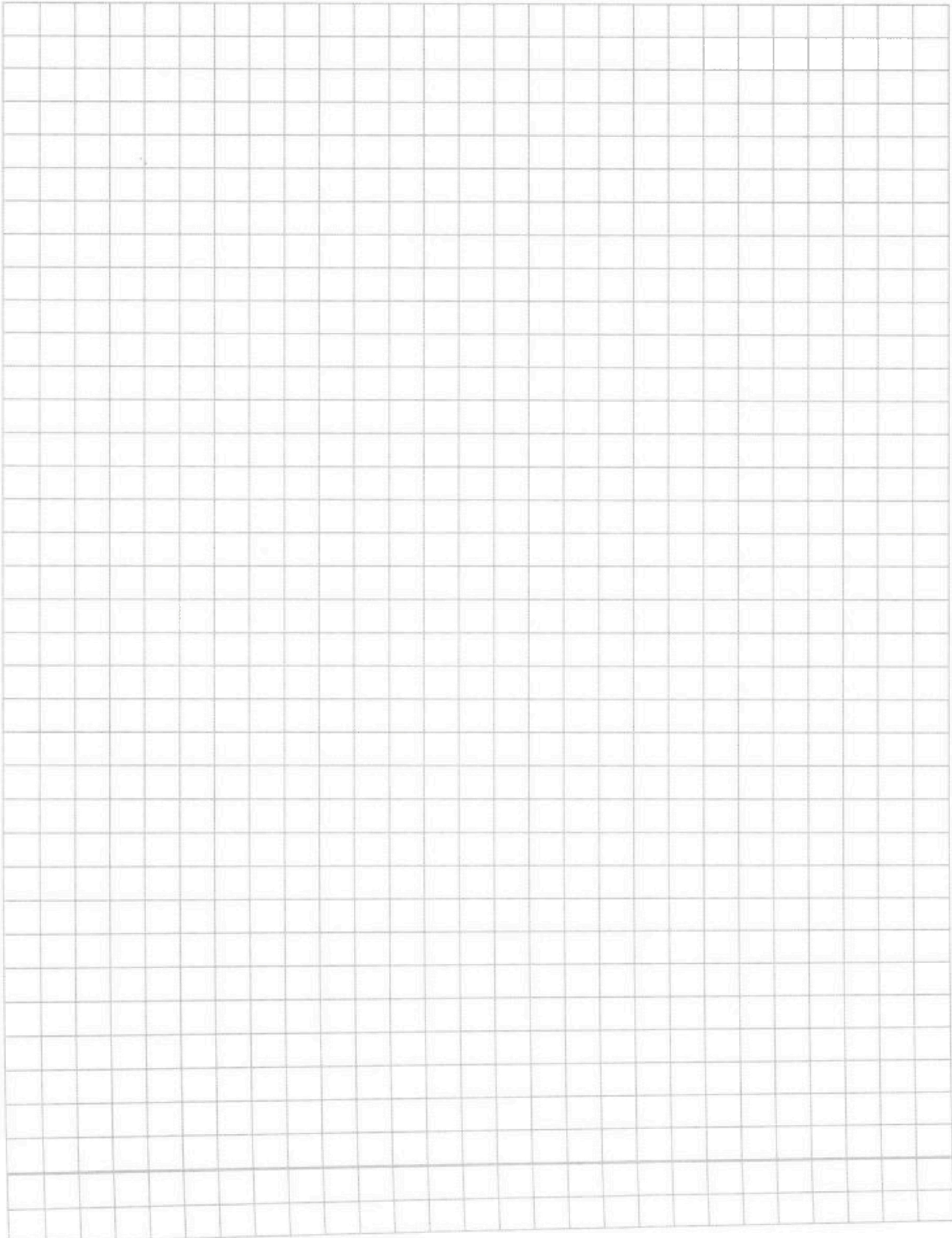


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



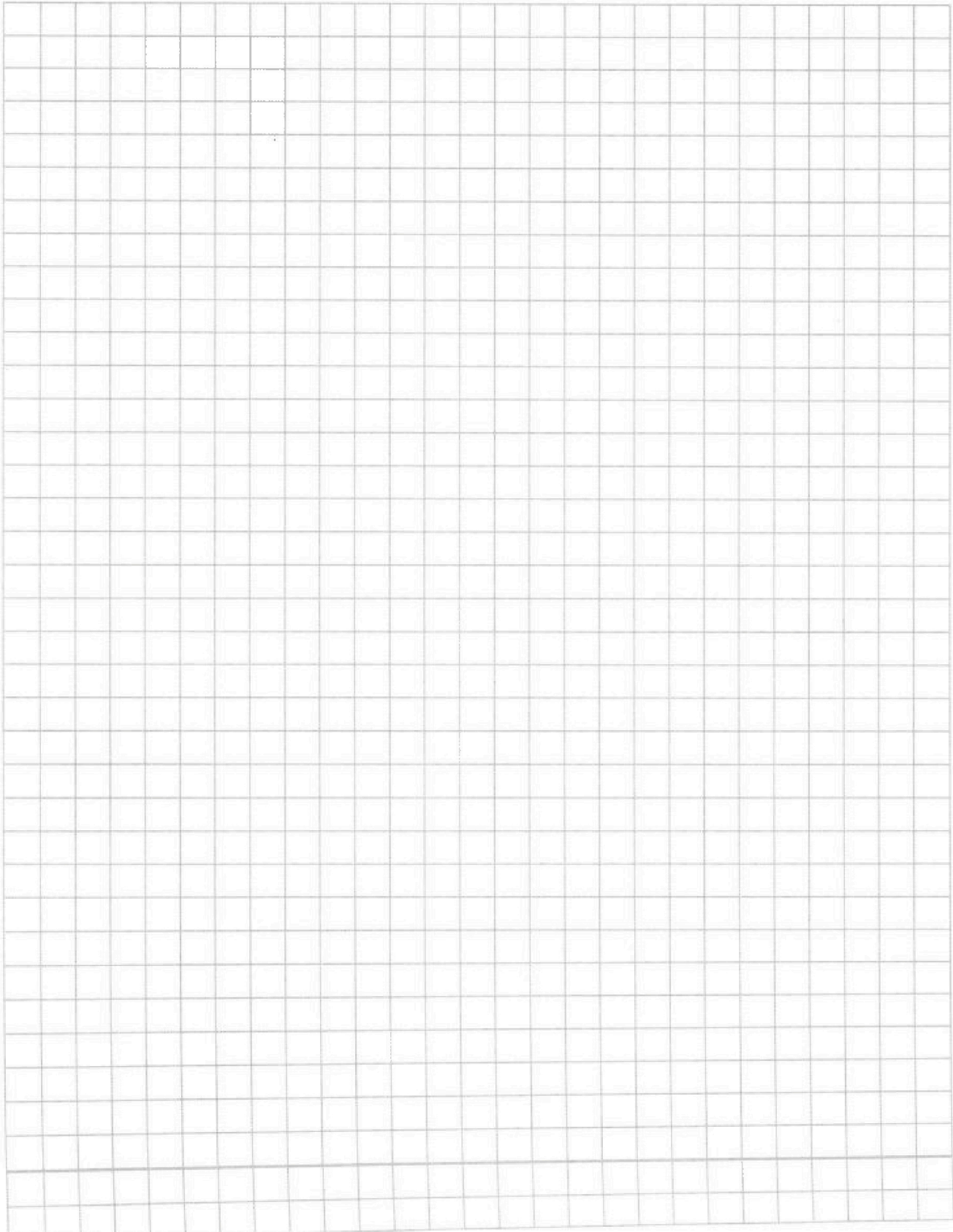


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



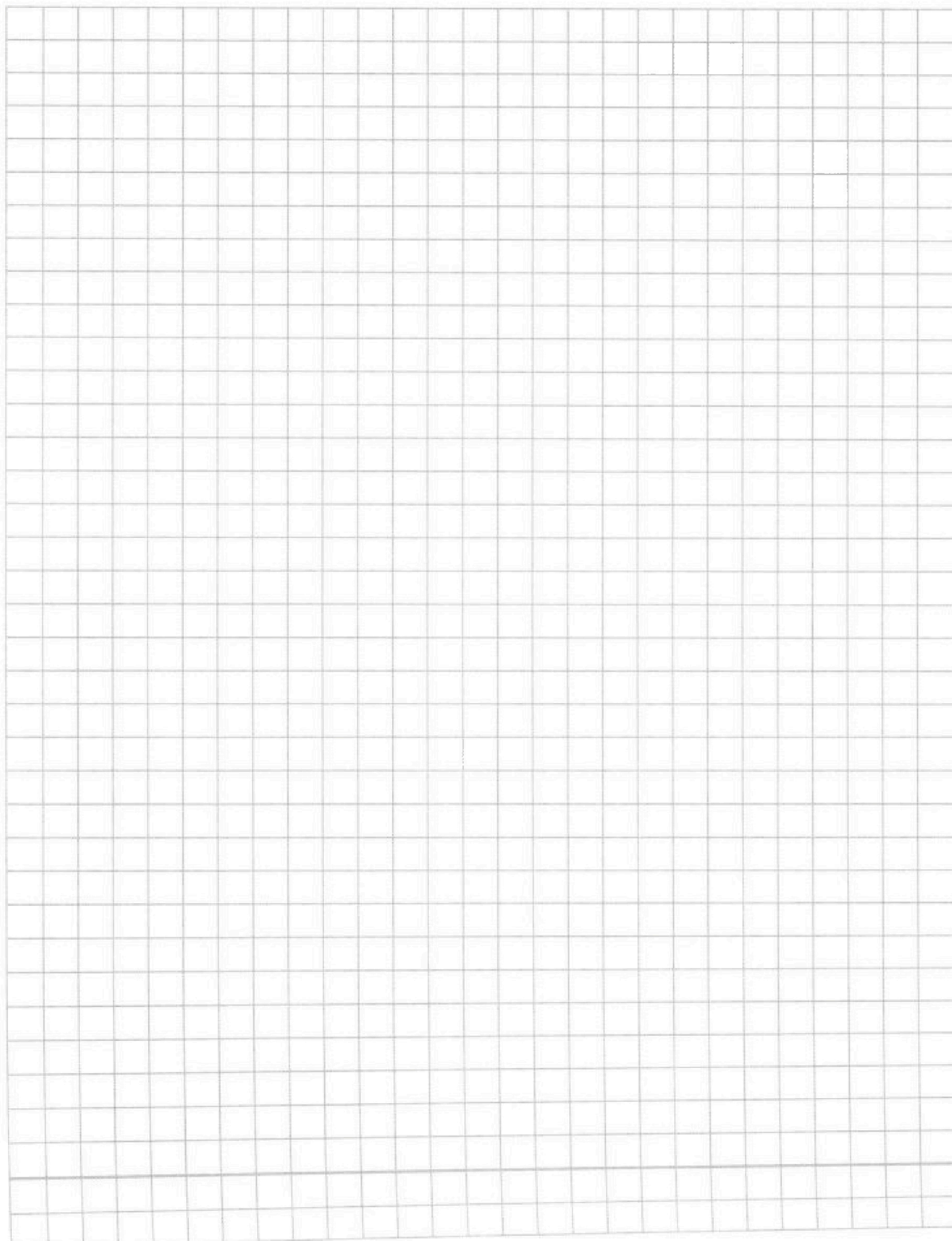


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



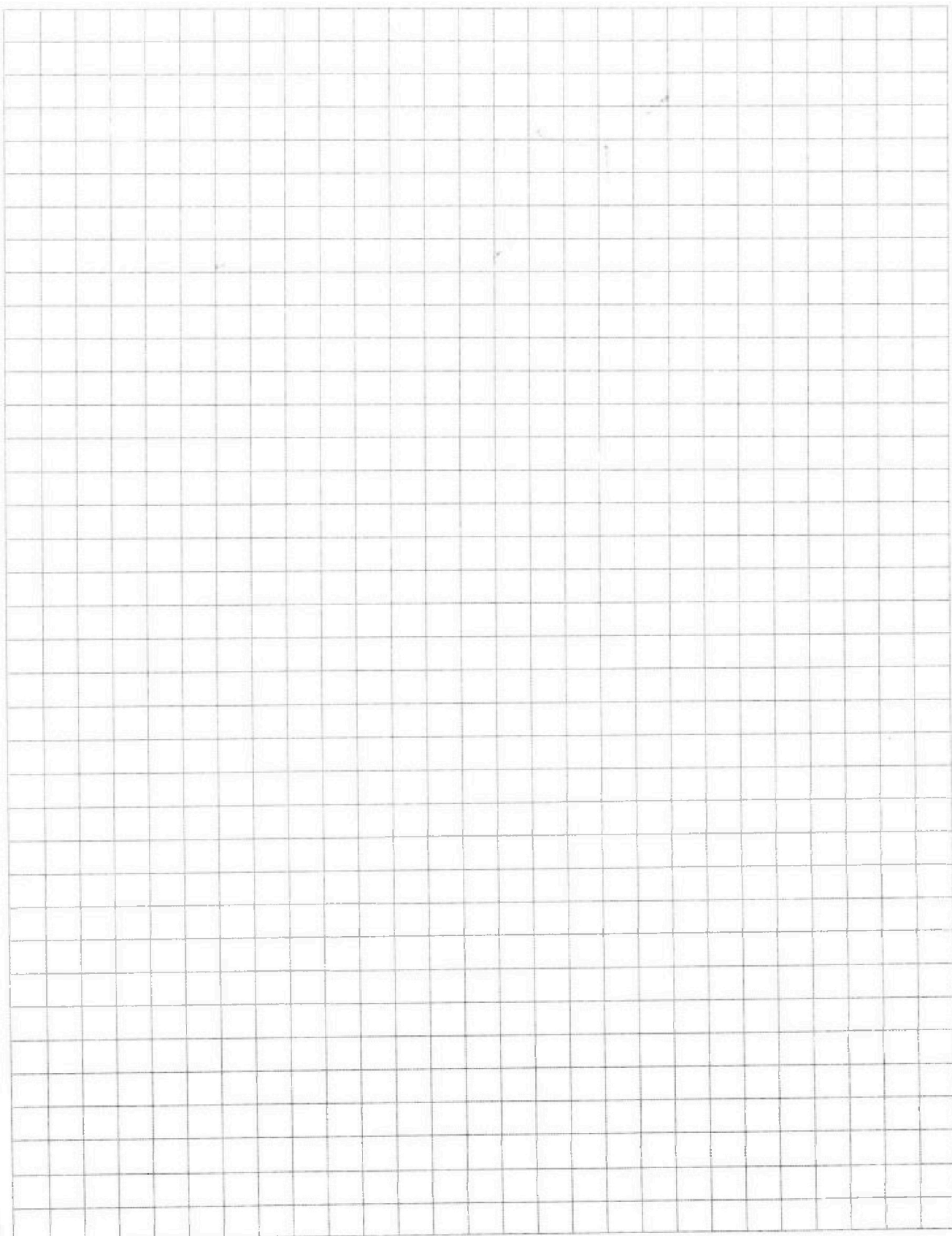


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



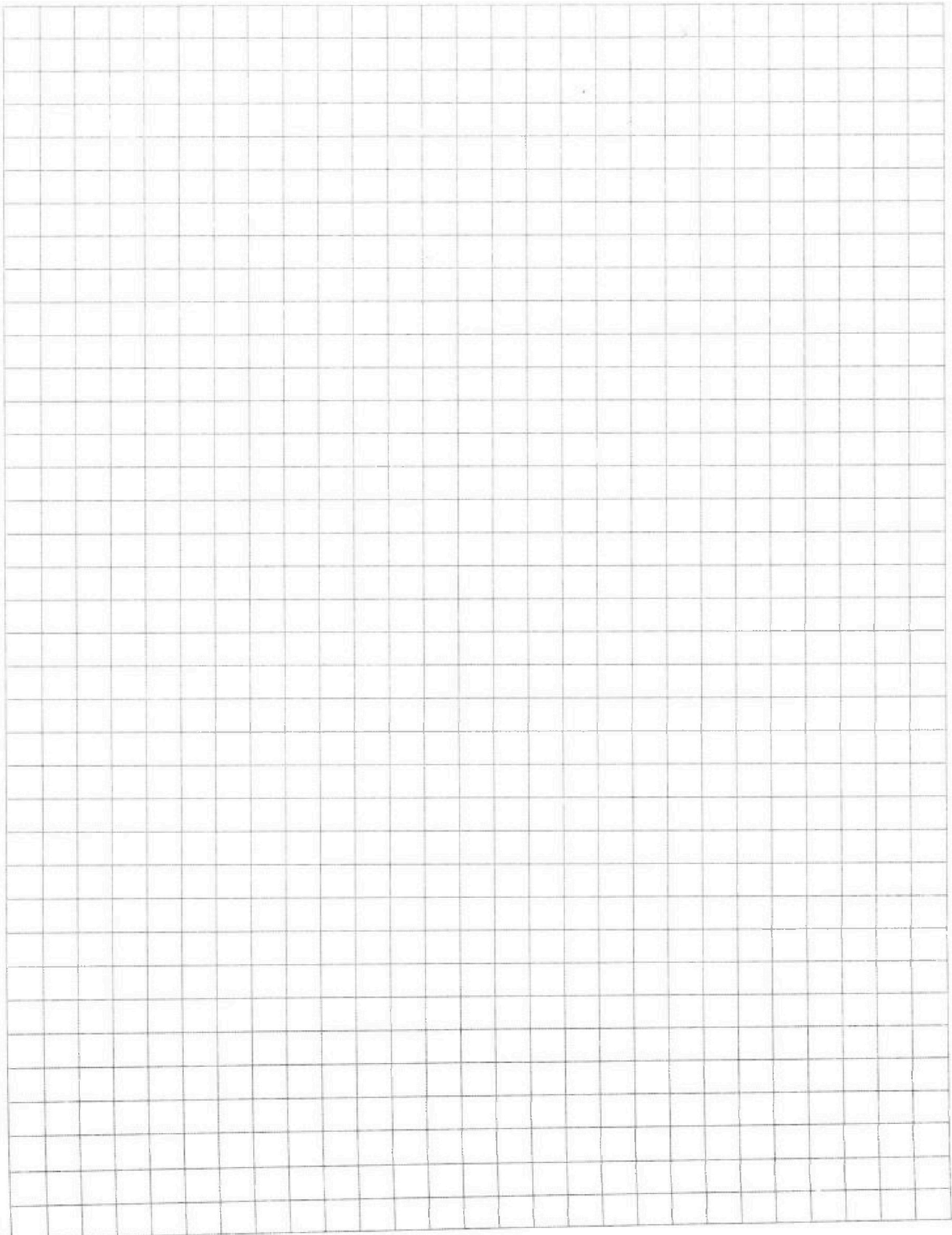


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

