МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x-3z}+6=2\sqrt{y-2x-x^2+z},\\ |y-20|+2|y-35|=\sqrt{225-z^2}.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x+6\cos x=3\cos 2x+p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9:25$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:

   - $a>b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a+b^2=820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть q — шаг прогрессии. Если $x+4=0 \Rightarrow x=-4$, то вся прогрессия состоит из 0, но её двенадцатый член при $x=-4$ равен $\sqrt{(-60+6)(-7)} = \sqrt{54\cdot 7} \neq 0$, а значит такого быть не могло и $x+4\neq 0$, а значит и $q\neq 0$. Запишем условия связи членов прогрессии в виде системы:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}\cdot q^6 = x+4 & (1) \\ (x+4)\cdot q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} & (2) \end{cases}$$

$(2): (x+4)\cdot q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$, $x+4\neq 0$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \Rightarrow q^6 = (q^2)^3 = \frac{\sqrt{(15x+6)^3(x-3)^3}}{(x+4)^3}$$

$(1): \sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}\cdot q^6 = x+4$

$$\sqrt{\frac{15x+6}{\cancel{(x-3)^3}}}\cdot\frac{\sqrt{(15x+6)^3\cancel{(x-3)^3}}}{(x+4)^3} = x+4 \quad , x+4\neq 0$$

$$\sqrt{(15x+6)^4} = (x+4)^4$$

$$|\underbrace{(15x+6)^2}_{\geq 0}| = (x+4)^4 \Rightarrow (15x+6)^2 - (x+4)^4 = 0$$

$$(15x+6-(x^2+8x+16))(15x+6+(x^2+8x+16)) = 0$$

$$(-x^2+7x-10)(x^2+23x+22) = 0 \quad | \cdot(-1)$$

$$(x-2)(x-5)(x+22)(x+1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \\ x=-1 \\ x=-22 \end{array}\right.$$

Проверка: $x=2$: $\sqrt{\dfrac{30+6}{(-1)^3}} = \sqrt{-36}$ $\ominus$

$x=2$ — не корень, не подходит

$x=5$: $\sqrt{\dfrac{75+6}{8}} = \sqrt{\dfrac{81}{8}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$

$x+4=9=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\cdot 2\sqrt{2}$, $q^2=\sqrt{2}$

$\sqrt{(75+6)\cdot 2} = 9\sqrt{2} = 9\cdot\sqrt{2}$ $\oplus$

$x=5$ — подходит

$x=-1$: $\sqrt{\dfrac{-15+6}{(-4)^3}} = \sqrt{\dfrac{9}{2^6}} = \dfrac{3}{8}$

$x+4=3=\dfrac{3}{8}\cdot 8$, $q^2=2$ $\oplus$

$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{(-9)\cdot(-4)} = 6 = 3\cdot 2$

$x=-1$ — подходит

$x=-22$: $\sqrt{\dfrac{-324}{(-25)^3}} = \sqrt{\dfrac{18^2}{5^6}} = \dfrac{18}{5^3} = \dfrac{18}{125}$

$x+4=-18$, $q^2=-5<0$ $\ominus$ $\Rightarrow x=-22$ — не подходит

$\sqrt{(-324)(-25)} = 90$

Ответ: $\{-1; 5\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (1) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2): $|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$

1) $y \le 20$

$20 - y + 70 - 2y = \sqrt{225-z^2}$

$\underbrace{90-3y}_{\ge 30} = \sqrt{225-z^2} \le \sqrt{225} = 15$ => решений нет

$y \le 20 \Rightarrow -3y \ge -60 \Rightarrow 90-3y \ge 30$

2) $20 < y \le 35$

$y - 20 + 70 - 2y = \sqrt{225-z^2}$

$\underbrace{50-y}_{\ge 15} = \sqrt{225-z^2} \le \sqrt{225} = 15$

$20 < y \le 35 \Rightarrow -35 \le -y < -20 \Rightarrow 15 \le 50-y < 30$

$50-y = \sqrt{225-z^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 50-y=15 \\ \sqrt{225-z^2}=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=35 \text{ (удв. ОДЗ)} \\ z=0 \ge 0 \end{cases}$

3) $y > 35$

$y - 20 + 2y - 70 = \sqrt{225-z^2}$

$\left.\begin{matrix} \underbrace{3y-90}_{>15} = \sqrt{225-z^2} \le 15 \\ y>35 \Rightarrow 3y > 105 \Rightarrow 3y-90>15 \end{matrix}\right\}$ => решений нет

Таким образом, решение системы: $(x; 35; 0)$.

(1): $\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (1) \\ y=35 \\ z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{-(x+7)(x-5)}$ (11)

Пусть $a = \sqrt{x+7}$, $a \ge 0$, $b = \sqrt{5-x}$, $b \ge 0$, $a^2+b^2=12$, тогда:

$$\begin{cases} a-b+6 = 2ab & (3) \\ a^2+b^2=12 & (4) \end{cases}$$

(3): $a-b = 2ab-6$

$a^2 - 2ab + \underbrace{b^2}_{=12} = 4a^2b^2 - 24ab + 36$

$4a^2b^2 - 22ab + 24 = 0$

$2a^2b^2 - 11ab + 12 = 0$

$(ab-4)(2ab-3)=0$

$\left[\begin{matrix} ab=4 \\ ab=1{,}5 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} a=\frac{4}{b} \\ a=\frac{3}{2b} \end{matrix}\right., b \ne 0$

(4): $a^2+b^2=12$: $\left[\begin{matrix} \frac{16}{b^2}+b^2=12 \\ \frac{9}{4b^2}+b^2=12 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} b^4-12b^2+16=0 & (5) \\ b^4-12b^2+\frac{9}{4}=0 & (6) \end{matrix}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

(5): $b^4-12b^2+16=0$

$D=144-64=80$

$b^2=\frac{12\pm4\sqrt5}{2}=6\pm2\sqrt5>0$

$b=\sqrt{6\pm2\sqrt5}=\sqrt{(\sqrt5\pm1)^2}=\sqrt5\pm1$

(6): $b^4-12b^2+\frac94=0$ $\quad 3<\sqrt{15}<\sqrt{16}=4$

$D=144-9=135$ $\quad 12-3\sqrt{15}>0$

$b^2=\frac{12\pm3\sqrt{15}}{2}>0$

$b=\sqrt{\frac{24\pm6\sqrt{15}}{4}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{15}\pm3)^2}}{2}=\frac{\sqrt{15}\pm3}{2}>0$

Найдём:

$\begin{cases}b=\sqrt5+1\\a=\frac{4}{\sqrt5+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\sqrt5+1>0\\a=\sqrt5-1>0\end{cases}$ (7) $\quad\begin{cases}b=\frac{\sqrt{15}+3}{2}\\a=\frac{3}{\sqrt{15}+3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{\sqrt{15}+3}{2}>0\\a=\frac{\sqrt{15}-3}{2}>0\end{cases}$ (9)

$\begin{cases}b=\sqrt5-1\\a=\frac{4}{\sqrt5-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\sqrt5-1>0\\a=\sqrt5+1>0\end{cases}$ (8) $\quad\begin{cases}b=\frac{\sqrt{15}-3}{2}\\a=\frac{3}{\sqrt{15}-3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{\sqrt{15}-3}{2}>0\\a=\frac{\sqrt{15}+3}{2}>0\end{cases}$ (10)

Проверка: (7): $ab=4\Rightarrow 2ab=8$

$a-b+6=\sqrt5-1-\sqrt5-1+6=4$ $\Rightarrow$ $\ominus$ не корни

(8): $ab=4\Rightarrow 2ab=8$

$a-b+6=\sqrt5+1-\sqrt5+1+6=8$ $\oplus$ $\Rightarrow$ корни

(9): $ab=1{,}5\Rightarrow 2ab=3$

$a-b+6=\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac32-\frac{\sqrt{15}}{2}-\frac32+6=3$ $\oplus$ $\Rightarrow$ корни

(10): $ab=1{,}5\Rightarrow 2ab=3$

$a-b+6=\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac32-\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac32+6=9$ $\ominus$ $\Rightarrow$ не корни

Подходят: $\begin{cases}a=\sqrt5+1\\b=\sqrt5-1\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{15}-3}{2}\\b=\frac{\sqrt{15}+3}{2}\end{cases}$

Обратная замена переменных:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+7}=\sqrt5+1\\\sqrt{5-x}=\sqrt5-1\end{cases}\\\begin{cases}\sqrt{x+7}=\frac{\sqrt{15}-3}{2}\\\sqrt{5-x}=\frac{\sqrt{15}+3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7=6+2\sqrt5\\5-x=6-2\sqrt5\end{cases}\\\begin{cases}x+7=\frac{12-3\sqrt{15}}{2}\\5-x=\frac{12+3\sqrt{15}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\sqrt5-1\\x=2\sqrt5-1\end{cases}\\\begin{cases}x=\frac{-2-3\sqrt{15}}{2}\\x=\frac{-2-3\sqrt{15}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt5-1\\x=-\frac{2+3\sqrt{15}}{2}\end{array}\right.$$

ОДЗ для уравнения (11): $\begin{cases}x+7\ge0\\5-x\ge0\end{cases}\Rightarrow -7\le x\le5$

Проверим найденные корни: $2\sqrt5-1>0>-7$

$2\sqrt5-1<2\cdot3-1=5$ $\Rightarrow\oplus$ $x=2\sqrt5-1$ — корень

$-\frac{2+3\sqrt{15}}{2}<0<5$

$-\frac{2+3\sqrt{15}}{2}>-\frac{2+3\cdot4}{2}=-1-6=-7$ $\oplus$ $\Rightarrow x=-\frac{2+3\sqrt{15}}{2}$ — корень.

Ответ: $(2\sqrt5-1;35;0)$, $\left(-\frac{2+3\sqrt{15}}{2};35;0\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p$

$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$

Пусть $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$, тогда:

$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$

$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p$

$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t-1)^2 \geq 0$

Значит, $f(t)$ не убывает при $\forall t \in [-1; 1]$, а значит $f(t) = 0$ имеет не более 1 решения, так как справа константа.

Тогда, если уравнение имеет хотя бы одно решение, то $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$ (так как функция неубывает и непрерывна)

$\begin{cases} f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 - p = -10 - p \leq 0 \\ f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 - p = 4 - p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq -10 \\ p \leq 4 \end{cases} \Rightarrow -10 \leq p \leq 4$

Значит при $p \in [-10; 4]$ существует единственный $\cos x_1$ – решение уравнения.

Ответ: $[-10; 4]$

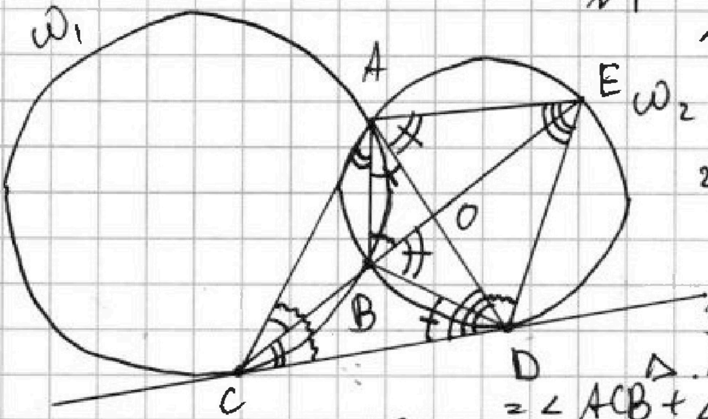
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4



1) CD – касательная к ω_1 $\Rightarrow \angle DCB = \frac{1}{2}\smile CB = \angle CAB$ (вписанный)

2) CD – касательная к $\omega_2 \Rightarrow \angle CDA = \frac{1}{2}\smile ABD = \angle AED$ (вписанный)

3) $\angle ABE$ – внешний $\angle$ $\triangle ABC \Rightarrow \angle ABE = \angle AB + \angle ACB = \angle ACB + \angle BCD = \angle ACD$

4) $\angle ABE = \angle ADE$ (вписанные) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADE = \angle ACD$

5) Из $\triangle CAD$ и $\triangle AED$:
$\angle AED = \angle CDA$, $\angle ADE = \angle ACD \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle DAE$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$

6) CD – касательная к $\omega_2 \Rightarrow \angle CDB = \frac{1}{2}\smile BD = \angle BAD$ (вписанный)

7) $\angle EBD$ – внешний угол $\triangle CBD \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAD$

8) $\angle DAE = \angle EBD$ (вписанные) $\Rightarrow \angle DAE = \angle CAD \Rightarrow$
$\Rightarrow AD$ – биссектриса $\angle CAE$

9) $AD \cap CE = O \Rightarrow$ по усл.: $\frac{CO}{OE} = \frac{9}{25}$

10) Из $\triangle CAE$; AD – биссектриса $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{9}{25} \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \frac{9}{25}AE$

11) $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD = \sqrt{AC \cdot AE} = \sqrt{\frac{9}{25}AE^2} = \frac{3}{5}AE$

12) $\frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{\frac{3}{5}AE} = \frac{5}{3}$

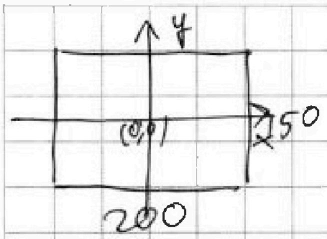
Ответ: $\frac{ED}{CD} = \frac{5}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



№5

Если координаты центра одной закрашенной клетки $(x_0; y_0)$, то для симметрии относительно центра координаты другой закрашенной клетки: $(x_s; y_s) = (-x_0; -y_0)$ — задаётся однозначно, а так как x_0 и $y_0 \neq 0$ — координаты центров нецелые), то они никогда не совпадут.

Значит можно выбрать 4 клетки из ~~одной полу~~ двух соседних ~~полу~~ четвертей оставшиеся и определятся однозначно. Способов так сделать: $C^4_{150\cdot100} = C^4_{15000}$

При осевой симметрии относительно средних линий-осей также при выборе 4 клеток из соседних областей однозначно задаются оставшиеся. Значит способов так сделать: C^4_{15000}

Однако некоторые множества могут обладать обеими симметриями и их мы учли дважды. Их количество: C^2_{7500} *

Ответ: $2\cdot C^4_{15000} - C^2_{7500}$

* для задания такого множества достаточно выбрать 2 точки в одной четверти — в соседних 2 будут заданы осевой сим-ей, в противоположной — центральной.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Рассмотрим $(a-c)(b-c)=p^2$, p – простое.

$$\left.\begin{array}{l}(a-c)(b-c)=p^2 \\ a>b \Rightarrow a-c>b-c \\ a,b,c\in\mathbb{Z},\ p\text{ – простое},\ p\geq 2\end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases}a-c=1\\ b-c=p^2\end{cases} \ominus \quad \begin{cases}a-c=p^2\\ b-c=1\end{cases} \oplus$$

$$\begin{cases}a-c=p\\ b-c=p\end{cases} \ominus \quad \begin{cases}a-c=-1\\ b-c=-p^2\end{cases} \oplus$$

$$\begin{cases}a-c=-p\\ b-c=-p\end{cases} \ominus \quad \begin{cases}a-c=-p^2\\ b-c=-1\end{cases} \ominus$$

Возможны варианты:

$$\begin{cases}a-c=p^2\\ b-c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=p^2+b-1\\ c=b-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a-c=-1\\ b-c=-p^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=p^2+b-1\\ c=b+p^2\end{cases}$$

Заметим, что значения a одинаковы.

Рассмотрим равенство $a+b^2=820$:

$a+b^2=820 \Rightarrow p^2+b-1+b^2=820 \Rightarrow p^2=-b^2-b+821$

$f(b)=-b^2-b+821$, парабола ветвями вниз

$b_0=-\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow f(b)\leq -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+821=820\frac{1}{4}$

$p^2\leq 820\frac{1}{4}$, $p\in\mathbb{N} \Rightarrow p^2\leq 820 \Rightarrow p\leq 2\sqrt{205}$ $(p\in\mathbb{N})$

$205>196=14^2 \Rightarrow \underline{p\leq 2\cdot 14=28}$.

Переберём все простые $p\in[2;28]$:

mod 3	0	1	2
n^2	0	1	1

$p=2$: $b^2+b+4-821=0$

$b^2+b-817=0$

$D=1+4\cdot 817=3269\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат натурального n

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ $\ominus$

$p=3$: $b^2+b+9-821=0$

$b^2+b-812=0$

$D=1+3248=3249=9\cdot 361=9\cdot 19^2=57^2$

~~$18^2=324<361$~~

$$\left[\begin{array}{l}b=\frac{-1+57}{2}\\ b=\frac{-1-57}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=28\\ b=-29\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=36\\ a=-21\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}c=27\\ c=37\\ c=-30\\ c=-20\end{array}\right.$$

$p=5$: $b^2+b+25-821=0$

$b^2+b-796=0$

$D=1+796\cdot 4=3185\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат натурального n

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ $\ominus$

$p=7$: $b^2+b+49-821=0$

$b^2+b-772=0$

$D=1+4\cdot 772=3089\equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат $n\in\mathbb{N} \Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ $\ominus$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$p=11$: $b^2+b+121-821=0$

$b^2+b-700=0$

$D=1+4\cdot700=2801\equiv2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат $n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ ⊖

$p=13$: $b^2+b+169-821=0$

$b^2+b-652=0$

$D=1+4\cdot652=2609\equiv2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ ⊖

$p=17$: $b^2+b+289-821=0$

$b^2+b-532=0$

$D=1+4\cdot532=2129\equiv2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат $n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ ⊖

$p=19$: $b^2+b+361-821=0$

$b^2+b-460=0$

$D=1+4\cdot460=1841\equiv2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат $n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ ⊖

$p=23$: $b^2+b+529-821=0$

$b^2+b-292=0$

$D=1+4\cdot292=1169\equiv2 \pmod 3 \Rightarrow D$ – не квадрат $n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\notin\mathbb{Z}$ ⊖

Следующее простое $p=29>28$ – не подходит.

Возможные тройки: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -30)$, $(-21; -29; -20)$.

Осталось проверить выполнимость условия $a-b \not\vdots 3$.

1) $36-28=8 \not\vdots 3$ ⊕

2) $-21-(-29)=8 \not\vdots 3$ ⊕

Значит, все 4 пары подходят.

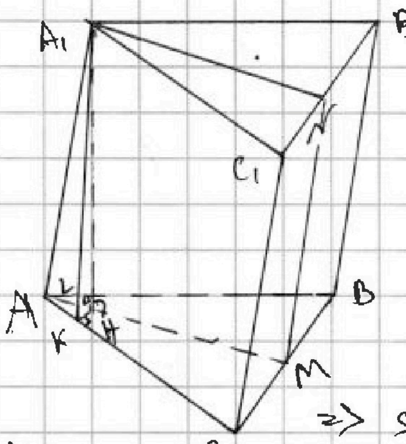
Ответ: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7



1) $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — правильные, стороны равны 2, пусть $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 5$, $S_{CC_1B_1B} = 4$

2) $ABCA_1B_1C_1$ — призма $\Rightarrow$ AA_1C_1C, AA_1B_1B — параллелограммы $\Rightarrow$ $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC \cdot \sin\angle A_1AC$; $S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin\angle A_1AB \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = AB = 2$,
$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B}$ } $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\angle A_1AC = \sin\angle A_1AB \Rightarrow \cos\angle A_1AC = \cos\angle A_1AB$ (см. след лист)

3) K: $A_1K \perp AC$
L: $A_1L \perp AB$ $\Rightarrow$ $\triangle AA_1K$, $\triangle AA_1L$ — прямоуг. $\Rightarrow A_1K = AA_1 \sin\angle A_1AC$,
$A_1L = AA_1 \sin\angle A_1AL \Rightarrow A_1K = A_1L$

4) H: $A_1H \perp (ABC)$ — A_1H — высота призмы.
$A_1H \perp (ABC) \Rightarrow A_1H \perp AC$
$A_1K \perp AC$ $\Rightarrow HK \perp AC$
$\Rightarrow A_1H \perp AB$
$A_1L \perp AB$ $\Rightarrow HL \perp AB$

5) Из прямоуг. $\triangle A_1KH$ и A_1LH:
A_1H — общий катет, $A_1K = A_1L$ — гипотенузы $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle A_1KH = \triangle A_1LH \Rightarrow KH = HL$
$KH \perp AC$, $HL \perp AB$ } $\Rightarrow$ H — равноудалена от AB и AC $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ H лежит на биссектрисе $\angle A \Rightarrow$
$\Rightarrow$ AH — биссектрисса.

6) M: $AH \cap BC = M$
$\triangle ABC$ — правильный, AH — биссек. } $\Rightarrow$ AM — высота, медиана $\Rightarrow$ M — середина BC, $AM \perp BC$

7) N: N — середина B_1C_1 $\Rightarrow$ A_1N — медиана
$\triangle A_1B_1C_1$ — правильный } $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ A_1N — высота $\Rightarrow A_1N \perp B_1C_1$
$B_1C_1 \parallel BC$, $AM \perp BC$ } $\Rightarrow A_1N \parallel AM$
$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — равные правильные $\Rightarrow A_1N = AM$ } $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ AA_1NM — параллелограмм $\Rightarrow AA_1 \parallel NM$,
$AA_1 = NM$

8) Из $\triangle AA_1C$ и $\triangle AA_1B$ ~~по Т. cos:~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

8) $AC = AB = 2$, AA_1 – общая, пусть: $\angle A_1AC = \angle A_1AB \Rightarrow$

~~*△ABC-правильный => K и L лежат либо вместе на отрезках, либо вместе на продолжениях (из симметрии отн-но AM), значит~~

$\angle CAA_1 = \angle BAA_1$, ~~откуда~~

$\Rightarrow \triangle A_1AC = \triangle A_1AB$ (по 2 стор. и $\angle$) $\Rightarrow A_1B = A_1C \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CA_1B$ – равнобедренный, M – середина $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1M$ – высота $\Rightarrow$ $BC \perp A_1M$, $BC \perp AM$ $\Rightarrow BC \perp (AMN) \Rightarrow$

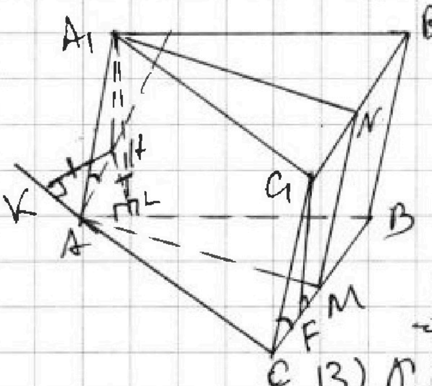
$\Rightarrow BC \perp MN \Rightarrow MN$ – высота BB_1C_1C

9) BB_1C_1C – параллелограмм, $S_{BB_1C_1C} = 4$, MN – высота, $BC = 2 \Rightarrow MN = 2$, $MN = AA_1 = 2$ $\Big\} \Rightarrow AA_1 = 2$

10) AA_1C_1C – параллелограмм, $S_{AA_1C_1C} = 5$, A_1K – высота, $AC = 2 \Rightarrow A_1K = 2{,}5 > AA_1 = 2$ – катет больше гипотенузы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \angle A_1AC = 180° - \angle A_1AB \Rightarrow$

$\Rightarrow H$ упадёт на биссектрису угла, смежного $\angle BAC$.



11) AH – биссек. $\angle KAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAH = \frac{1}{2}\angle KAB = 60° = \angle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow AH \parallel BC$, $AA_1 \parallel CC_1$ $\Rightarrow \angle A_1AH = \angle C_1CF$, где $C_1F \perp BC$

12) Из прямоугольных $\triangle AA_1H$ и CC_1F: $\angle C_1CF = \angle A_1AH$, $AA_1 = CC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle A_1AH = \triangle C_1CF \Rightarrow A_1H = C_1F$

13) CC_1B_1B – параллелограмм, $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 2$, C_1F – высота, $S_{CC_1B_1B} = 4 \Rightarrow C_1F = 2$, $C_1F = A_1H$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1H = 2$ – высота призмы ($A_1H \perp (ABC)$, $A_1H \perp (A_1B_1C_1)$).

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$4x^3-6x^2+3x+3-p=0$

$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos^2 x + p$

$f(0)=3-p$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow x$ - корень $\Leftrightarrow -x$ - корень

$4\cdot\frac{1}{8} - 6\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{2} + 3 - p = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3 - p = 3{,}5 - p$

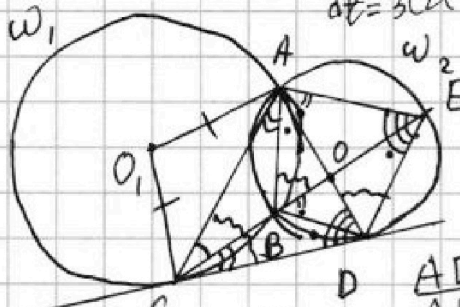
$f(1) - f(-1) = 4 - p + 10 + p = 14$

t_0 - реш. $\frac{f(t_0)-f(-1)}{t_0-(-1)} = f'(\alpha) \Rightarrow \boxed{\frac{0+10+p}{t_0+1} = f'(\alpha) = 3(2\alpha-1)^2}$

$dt = 3(2t-1)^2\,dp$

$f'(\alpha) \in [0; 27]$

ω_1



$\frac{CO}{OE} = \frac{9}{25}$

$AB = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$

$CD^2 = CB\cdot CE$

$BO\cdot OE = AO\cdot OD$

$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} = \boxed{\frac{ED}{CD}}$

$\frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{9}{25} \Rightarrow AC = \frac{9}{25}AE$

$AD^2 = AE\cdot AC$

$AD^2 = \frac{9}{25}AE^2$

$AD = \frac{3}{5}AE$

$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{\frac{3}{5}}$

$(a;b;c):\ a>b,\ (a-c)(b-c) = p^2,\ a+b^2=820$

$a-c=1$, $b-c<p^2$ ⊖ $\Rightarrow a-c>b-c$

$a-c=p$, $b-c=p \Rightarrow a=b$ ⊖

$a-c=p^2$, $b-c=1 \Rightarrow c = 1-b$

$a = p^2+c = p^2+1-b$

$a-b = p^2+1-b-b = p^2+1-2b \,\vdots\, 3$

$p^2+1-b+b^2 = 820$

$p^2 = -b^2+b+819$

$p^2+b^2 = b+819$

1) $p^2 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow p=3$; $1-2b \,\vdots\, 3 \Rightarrow b \,\vdots\, 3$, $b\equiv 1$

2) $p^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow b \,\vdots\, 3$, $b \equiv 2$

$p^2+1-2b \equiv 1+1-4 \equiv -2 \equiv 1$

1) $b \,\vdots\, 3 \Rightarrow p^2 \,\vdots\, 3 \Rightarrow p=3$

2) $b \equiv 1 \Rightarrow p^2+1 \equiv 1+0 \Rightarrow p \not\vdots\, 3$

3) $b\equiv 2 \Rightarrow p^2+1 \equiv 2+0 \Rightarrow p \not\vdots\, 3$

$b^2 = 819 + b - p^2$

$p^2 = -b^2+b+819$

$b_* = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$p^2 \le -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 819$

$p^2 \le 819$

$p \le 3\sqrt{91} \Rightarrow p \le 3\cdot 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}} \cdot q^6 = x+4$

$(x+4)\cdot q^2 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Rightarrow q^6 = \frac{\sqrt{(15x+6)^3(x-3)^3}}{(x+4)^3}$

$\sqrt{(15x+6)^4} = (x+4)^4 \Rightarrow (1$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x \geq -7;\ -15 \leq z \leq 15$

$y < 20;\ 20 - y + 70 - 2y = \ 90 - 3y = \sqrt{225 - z^2}$

≥ 30

$y - 20 + 70 - 2y = 50 - y$

$15;\ 30$

$\begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$

$y - 20 + 2y - 70 = 3y - 90 \geq 105 - 90 = 15$

$x^2 + 2x - 35 = 0$

$\begin{cases} a - b + 6 = 2ab \Rightarrow a + 6 = (2a+1)b \Rightarrow b = \frac{a+6}{2a+1} \\ a^2 + b^2 = 12 \end{cases}$

$a^2 + \frac{a^2 + 12a + 36}{4a^2 + 4a + 1} = 12$

$4a^4 + 4a^3 + a^2 + a^2 + 12a + 36 = 48a^2 + 48a + 12$

$4a^4 + 4a^3 - 46a^2 - 36a + 24 = 0$

$2a^4 + 2a^3 - 23a^2 - 18a + 12 = 0$

$(a-b)^2 = 2ab - 6 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 24ab + 36$

$4a^2b^2 - 22ab + 24 = 0$

$2a^2b^2 - 11ab + 12 = 0$

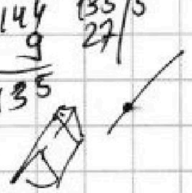
$D = 121 - 96 = 25$

	2	2	-23	-18	12
2	2	6	-11		
3	2	8	1		
4	2	10			
-4	2	-6	1		
-3	2	-4	-11		
-2	2	-2	-19		

	2	-11	12
4	2	-3	0
$\frac{3}{2}$	2	0	

$\sqrt{24 \pm 6\sqrt{15}}$

$\frac{3(\sqrt{15}-3)}{15-9=6} = \frac{\sqrt{15}-3}{2}$

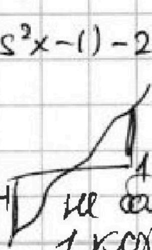


$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$

$4x^3 - 3x + 6x = 6x^2 - 3 + p$

$4x^3 - 6x^2 + 3x + 3 - p = 0$

$12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$ не более 1 корня



$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 - p = 4 - p \geq 0$

$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 - p = -10 - p \leq 0$

$\begin{cases} p \leq 4 \\ p \geq -10 \end{cases}$