



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



1 2 3 4 5 6 7

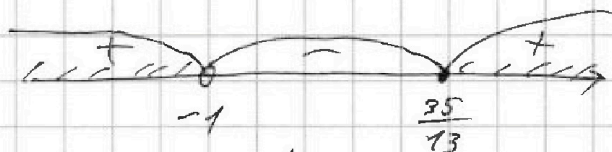
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $x \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, $a_{13} = 5-x$,
элементы геом. прогрессии.

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0, \quad (13x-35)(x+1) \geq 0$$



Отраженные: $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$.

а) $x = \frac{35}{13}$. Тогда $a_7 = 0$, $a_{15} = 0$.

$a_1 q^6$ $a_1 q^{15}$, где q — шаг прогрессии.

Тогда $a_1 = 0$ или $q = 0$.

$0 = a_1 q^{12} = a_{13} = 5 - \frac{35}{13} \neq 0$

противоречие, значит $x \neq \frac{35}{13}$.

б) $x \neq \frac{35}{13}$. Тогда $\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{a_1 q^{14}}{a_1 q^6} = q^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$,
 $\Rightarrow q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$.

$$a_{15} = \sqrt{|13x-35| \cdot |x+1|} = a_{13} \cdot q^2 = (5-x) \sqrt{|x+1|}$$

$$\sqrt{|13x-35| \cdot |x+1|} = (5-x) \cdot \sqrt{|x+1|}$$

$$\begin{cases} |x+1| = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{|13x-35|} = 5-x & (2) \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \boxed{x_5 = -1}$$

$$(2) \sqrt{|13x-35|} = 5-x$$

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ |13x-35| = x^2 - 10x + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ |13x-35| = x^2 - 10x + 25 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) |13x-35| = x^2 - 10x + 25$$

$$1) x \geq \frac{35}{13} :$$

$$13x-35 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x_1 = 20 \quad \text{или} \quad x_2 = 3 \quad (\text{ком. Валера})$$

$$\frac{35}{13} \leq x_1 \leq 5?$$

$$\frac{35}{13} \leq x_2 \leq 5?$$

нет \Rightarrow координаты
хорды

$$\text{да} \quad \boxed{x=3}$$

$$2) x < \frac{35}{13} :$$

$$35 - 13x = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = -5 \quad \text{или} \quad x_4 = 2$$

~~или~~

$$x < \frac{35}{73} ?$$

$$x < \frac{35}{73} ?$$

$$\text{да, } x_2 = -5$$

$$\text{да, } x_4 = 2$$

Итак, мы получим следующие значения:

-5; -1; 2; 3. Но по графикам подходит

только -5; 3. Проверим:

$$1) \quad x = -5: \quad a_7 = \sqrt{\frac{-65-35}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{-100}{-64}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = 5+5=10, \quad a_{15} = \sqrt{(-65-35)(-4)} = 20. \quad \text{При}$$

$q = \sqrt{2}$ все подходит.

$$2) \quad x = 3: \quad a_7 = \sqrt{\frac{39-35}{(4)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}$$

$$a_{13} = 5-3=2, \quad a_{15} = \sqrt{(39-35) \cdot 4} = 4. \quad \text{При}$$

$q = \sqrt{2}$ все подходит.

Ответ: -5; 3.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{4+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$\sqrt{169-z^2} \leq \sqrt{169} = 13.$$

Докажем, что $|y+1| + 3|y-12| \geq 13$.

$$1) \quad y < -1: \quad -y-1-3y+36 = 35-4y > 35+4 = 39. \quad \textcircled{1}$$

$$2) \quad -1 \leq y < 12:$$

$$y+1-3y+36 = 37-2y > 13 \quad \textcircled{1}$$

$$3) \quad y \geq 12: \quad \text{равенство при } y=12$$

$$y+1+3y-36 = 4y-35 \geq 13 \quad \textcircled{1}.$$

$$\text{Значит } |y+1| + 3|y-12| \geq 13 \geq \sqrt{169-z^2} = 7$$

$$\Rightarrow |y+1| + 3|y-12| = 13 \quad \text{и} \quad \sqrt{169-z^2} = 13$$

$$\Downarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y=12}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z=0}$$

$$(1) \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$\text{Замена } a = \sqrt{x+3}, \quad b = \sqrt{4-x}, \quad a, b \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a - b + 5 = 2ab \end{cases}$$

~~(4) $a - 2ab = b - 5$
 $a(1 - 2b) = b - 5$
 $a + 5 = b(2a + 1)$~~

~~$a \geq 0 \Rightarrow 2a + 1 > 0 \Rightarrow$~~

~~$b = \frac{a + 5}{2a + 1}$~~

(3) $a^2 + \frac{(a+5)^2}{(2a+1)^2} = 7$

~~$a^2 + \frac{a^2 + 10a + 25}{4a^2 + 4a + 1} = 7$ $\cdot (4a^2 + 4a + 1) > 0$ н.к. $a \geq 0$~~

~~$4a^4 + 4a^3 + a^2 + a^2 + 10a + 25 = 28a^2 + 28a + 7$~~

~~$4a^4 + 4a^3 - 26a^2 - 18a + 18 = 0 \quad | : 2$~~

~~$2a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 9a + 9 = 0$~~

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab = a - b + 5 & (4) \end{cases}$$

(3) - (4): $(a - b)^2 = 2 - (a - b)$

Заметьте $t = a - b$:

$t^2 = 2 - t$

$t^2 + t - 2 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По м. Виета $t = 1$ или $t = -2$

$$a - b = 1$$

$$a - b = -2$$

$$a = b + 1$$

$$a = b - 2$$

$$(1) b^2 + 2b + 1 + b^2 = 7$$

$$(1) b^2 - 4b + 4 + b^2 = 7$$

$$2b^2 + 2b - 6 = 0$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0$$

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$D = 16 + 24 = 40$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$b_3 = \frac{4 + \sqrt{40}}{4} = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} = 7$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$b_4 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} = 7$$

$$b_2 = \frac{-\sqrt{13} - 1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{-\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$$

не подходит т.к. $b \geq 0$

не подходит т.к.
 $a \geq 0$.

Итого

$$Итого a_1 = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}, a_3 = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{\sqrt{10} - 2}{2}$$

$x^2 - 3$:

$$x + 3 = \frac{14 + 2\sqrt{13}}{4}$$

$x^2 - 3$:

$$x + 3 = \frac{14 - 2\sqrt{10}}{4}$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13} + 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1 - \sqrt{10}}{2}$$

Александр Копылов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

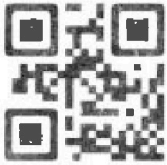
СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

* Оба корня подходят, так как для них выполняются

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{13}+1}{2}; 12; 0\right),$
 $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}; 12; 0\right).$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x = p + 3$$

Заменим $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$.

$$\text{Получим } 4t^3 + 6t^2 + 3t = p + 3.$$

$$\text{Пустим } f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

Найдем экстремумы:

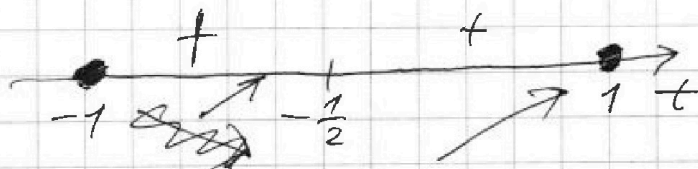
Найдем минимумы и максимумы на проме-

жутке $[-1; 1]$:

$$12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$3(4t^2 + 4t + 1) = 0$$

$$3(2t + 1)^2 = 0$$



$$\text{Максимум в м. } t_0 = \frac{1}{2}, f(t_0) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$f(t) = 4 + 6 - 3 = 7$~~

Значит функция максимална

тогда минимум при $t = -1$: $f(-1) = -4 + 6 - 3 = -1$,

максимум при $t = 1$: $4 + 6 + 3 = 13$.

Значит $-1 \leq p + 3 \leq 13$ (-3)

$$-4 \leq p \leq 10.$$

$p \in [-4; 10]$ — есть решения.

(при $t = 1$ и $t = -1$)

~~$2 \cos^2 x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$~~

~~$2 \cos^2 x \cos x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$~~

~~$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 (\cos 2x + \cos x) = p$~~

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - p - 3 = 0$$

Корень единственный, поэтому можно
просто подобрать.

⋮

Ответ: $p \in [-4; 10]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

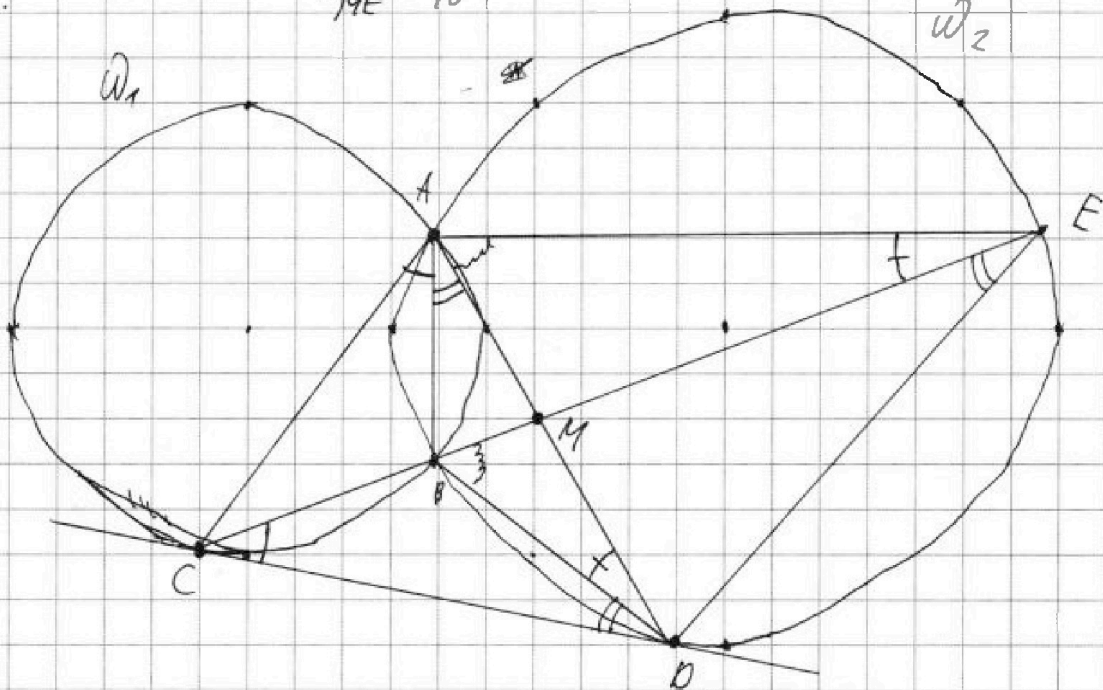
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$\frac{CM}{ME} = \frac{3}{10}$$



$$CM = 3x, ME = 10x.$$

$\angle BCD = \angle CAB$ как угол между касательной и хордой и вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Аналогично $\angle CDB = \angle BAD = \angle CED$.

$CB \cdot CE = CD^2$ как секущая и касательная из в. в. ω_2

$BM \cdot ME = CM \cdot MD$ по с.в.-в. пересекающихся хорд.

$$CB \cdot CE = (CM - BM) \cdot CE = (3x - BM) \cdot 13x \quad (\text{как вписанный})$$

Заметим, что $\angle EBD = \angle BCD + \angle BDC = \angle CAD$.

Также $\angle EBD = \angle EAD$ как вписанные в ω_2 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\angle CAM = \angle MAE \Rightarrow AM$ - биссектриса в $\triangle CAE$. Тогда по св-ву биссектрисы

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CM}{ME} = \frac{3}{10}$$

Заметим также, что $\angle ADB = \angle AEB$ ^{как вписанные} \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle ADC = \angle AED \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE$ по двум равным углам. Тогда

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{CD}{DE} \cdot \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Некоторые прямоугольники мы посчитали несколько раз

4) Каждый кат-во n

4) Пусть некоторый прямоугольник симметричен относительно одной «средних линий». Заметим тогда, что он обязательно будет и симметричен

относительно центра. Действительно, для каждой ~~клетки~~ клетки закрасенной точки достаточно применить

по разу симметрии откос. А B и CP , чтобы получить (скажем для коротких)

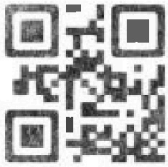
симметрию относительно центра закрасенной клетки.

Значит такие ~~то~~ прямоугольники мы посчитали 2×3

раза. Они однократно задаются раскраской 2×2 клеток 1 , поэтому их всего было 2×1500

Высесть нужно будет в 3 раза больше, т.к. их мы посчитали 3 раза.

5) Пусть некоторый прямоугольник центральносимметричен и симметричен относительно только одной из средних линий. Рассмотрим



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

клетку произвольную ~~тогда~~. Без окрашенных ~~объектов~~ ~~фрагментов~~ можно считать, что она закрашена. Пусть это клетка A_1 , симметричная ей откос. ср. линии A_2 , откос. центра — A_3 (очевидно не совпадают, т.к. находятся в разн. маленьких прямоугольниках), а также обозначим симметричную A_1 откос. второй ср. линии, не же закрашиваемую клетку A_4 . Заметим, что A_4 симметрична A_2 откос. центра. Значит A_4 должна быть закрашена. Противоречие. Значит все прямоугольники, которые мы посчитали несколько раз, были ~~обозначены~~ ~~в пункте 4)~~.

Когда ответ: $2 \cdot 2^{125 \cdot 200} + 2 \cdot 2^{100 \cdot 250} + 2 \cdot 2^{125 \cdot 200}$
 $+ 2 \cdot 2^{125 \cdot 100} = 3 \cdot 2^{25000} - 2 \cdot 2^{12500} = 2 \cdot 2^{25000}$
 $+ 2 \cdot 2^{12500} = 2 \cdot 2^{25000} + 2 \cdot 2^{12500} - 2 \cdot 2^{12500}$
 Ответ: $2 \cdot 2^{25000} + 2 \cdot 2^{12500}$

Когда ответ: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

Ответ: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $(a; b; c), a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$a > b \Rightarrow a - c > b - c$$

$$a - b \equiv 3 \Rightarrow (a - c) - (b - c) \equiv 3,$$

т.е. числа $a - c$ и $b - c$ дают разные остатки при делении на 3. Тогда их произведение не может давать остаток 1 при делении на 3,

$$\text{т.е. } (a - c)(b - c) - 1 \equiv 3.$$

Или $p \neq 2$ и p простое, $p \neq 3$.

Тогда $p^2 - 1 \equiv 3,$
 \Downarrow
 $p = 3.$

~~$(a - c)(b - c) = p$. Тогда $a - c = p$, $b - c = 1$, тогда $a - b = p - 1$, $a - b = p - 1$, $a - b = p - 1$.~~

$$(a - c)(b - c) = 3^2 \quad a > b, \text{ поэтому конст-}$$

тант $a - c = 9, b - c = 1, a - b = 8, a = b + 8.$

Тогда $b + 8 + b^2 = 560, b^2 + b + 8 = 560$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2$$

$$b_1 = \frac{-1 + 47}{2} \text{ или } b_2 = \frac{-1 - 47}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = 23$$

$$a_1 = \cancel{b_1} + a = 31$$

$$(31 - c) \cdot (23 - c) = 9 \quad (1)$$

$$c^2 - 23c - 31c + 31 \cdot 23 - 9 = 0$$

еще квадратное уравнение,

≤ 2 корней.

Из (1) легко подбирается

$$c_1 = 22 \text{ и } c_2 = 32.$$

$$b_2 = -24$$

$$a_2 = b_2 + a = -16$$

$$(-16 - c) \cdot (-24 - c) = 9$$

$$(c + 16) \cdot (c + 24) = 9$$

Квадратное уравнение,

$$c_3 = -15 \text{ и } c_4 = -25 \text{ корней}$$

Хотя и 7 других решений

нет.

$$\text{Ответ: } (31; 23; 22),$$

$$(31; 23; 32),$$

$$(-16; -24; -25),$$

$$(-16; -24; -15).$$



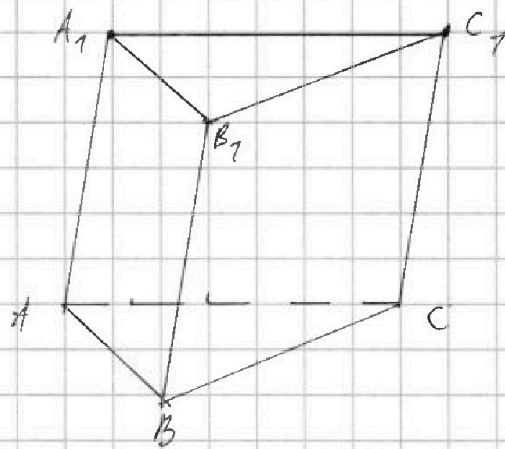
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



$$AB = x$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_{BB_1C_1C} = 4.$$

$$S_{AA_1C_1C} = 3.$$

$$S_{ABB_1A_1} = S_{BB_1C_1C} \Rightarrow AB \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle ABB_1 = BC \cdot BB_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle B_1BC$$

$$\cdot \sin \angle B_1BC \Rightarrow \sin \angle ABB_1 = \sin \angle B_1BC.$$

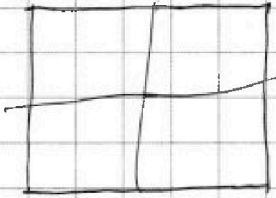


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



-2
б. a, b, c
 $a > b, c$

$$\begin{array}{r} \times 552 \\ 4 \\ \hline 220A \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline + 329 \\ \hline 188 \\ \hline 220A9 \end{array}$$

$$1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2$$

$$a - b \div 3$$

$$1 \neq \frac{1}{3} \quad (a-c)(b-c) = p$$

$b-c=1$ или $a-c$

$3 \parallel 1$
самое

$$(a-c) - (b-c) \div 3.$$

$$\begin{array}{l} 552 \neq 2 \cdot \cdot 552 = 2^A - 3 \cdot 23 \\ 276 \quad 2 \\ 138 \quad 2 \\ 69 \quad 3 \\ 23 \quad 23 \\ 1 \end{array}$$

~~$$32 \cdot 3 = 96 \quad 23 \cdot 8 =$$~~

~~$$64 \cdot 3 = 192 \quad 23 \cdot 4 = 92X$$~~

$$\begin{array}{l} 7 \\ 2 \\ 23 \\ 3 \\ 2 \end{array}$$

$$12A \vee 13^8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a^4 + 2a^3 - 13a^2 - 9a + 9 = 0 \quad | : a^2$$

$$2a^2 + 2a - 13 - \frac{9}{a} + \frac{9}{a^2} = 0$$

$$t = 2a - \frac{9}{a}$$

$$2a^2 + \frac{9}{a^2} = t^2$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ 2ab = a - b + 5 \end{cases}$$

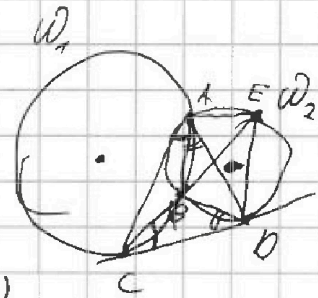
$$(a-b)^2 = 2 - (a-b)$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$2\cos 2x \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

$$2ab + 3a + 5 = p$$

$$2ab + 2b + 3(a+b) = p$$



$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1 \quad a \uparrow^2$$

$$x+3 = 4-x + 2\sqrt{4-x} + 1$$

$$2x - 2 = 2\sqrt{4-x}$$

$$x - 1 = \sqrt{4-x}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4 - x$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

CB - биссектриса

AM - биссектриса

$\triangle ACO \sim \triangle ADE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 2 & 2 & -13 & -9 & 9 \\
 \hline
 \frac{1}{2} & 2 & 3 & -8 & -3,5 \\
 \frac{3}{2} & 2 & 5 & -28 & \\
 \frac{9}{2} & 2 & 11 & -88 &
 \end{array}$$

~~$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} - \frac{9}{2} + 9 = \frac{3}{8} - \frac{26}{8} + \frac{9}{2} = \frac{95}{8}$$~~

$$5 - \frac{39}{2} = -\frac{29}{2}$$

$$11 - \frac{9 \cdot 13}{2} = 11 - \frac{117}{2} = \frac{22 - 117}{2} = -\frac{95}{2}$$

$$-95 - 81 = -176$$

$$\begin{array}{r}
 95 \\
 781 \\
 \hline
 176
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 2 & 2 & -13 & -9 & 9 \\
 \hline
 3 & 2 & 8 & -31 &
 \end{array}$$

~~$$2 + 2x - 13x = 0$$~~

$$2 - 11x = 0$$

$$x = \frac{2}{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~73~~ ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~ ~~78~~ ~~79~~ ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ ~~83~~ ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ ~~89~~ ~~90~~ ~~91~~ ~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ ~~97~~ ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

~~7~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

