



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

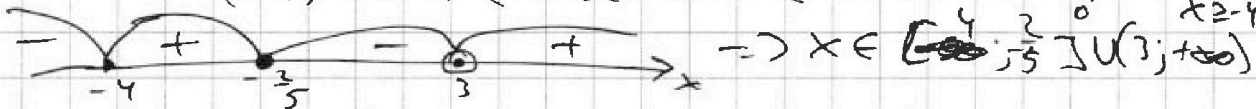
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 17

Пусы  $a_4$  - 4 член прогрессии,  $a_{10}$  - 10 член;  $a_{12}$  - 12 член прогрессии;  $q$  - шаг прогрессии.

По условию  $a_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ ;  $a_{10} = x+4$ ;  $a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$

ОДЗ:  $\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$  и  $(15x+6)(x-3) \geq 0$   $\Rightarrow a_{10} = x+4 = a_4 \cdot q^6 \Rightarrow x+4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^6$   
 $x \geq -4$



$$a_{10} = a_4 \cdot q^6 \Rightarrow a_{12} = a_{10} \cdot q^2 \Rightarrow a_4 \cdot q^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^8 \Rightarrow (15x+6)(x-3) = \frac{15x+6}{(x-3)^3} \cdot q^{16}$$

1) Если  $15x+6=0$ , то  $a_i=0 \Rightarrow$  при  $x = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$ , система прогрессии не существует  $\Rightarrow a_{10} = x+4 \neq 0 \Rightarrow x = -4$   
умножение  $\Rightarrow 15x+6 \neq 0$ .

2) Если  $15x+6 \neq 0 \Rightarrow$  сократим на  $15x+6$ :

$$(x-3) = \frac{1}{(x-3)^3} \cdot q^{16} \Rightarrow (x-3)^4 = q^{16} \Rightarrow q^4 = |x-3| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ч.к. } a_{12} = a_{10} \cdot q^2 \Rightarrow a_{12}^2 = a_{10}^2 \cdot q^4 \Rightarrow (15x+6)(x-3) = (x+4)^2 |x-3|$$

2.1) Если  $x > 3 \Rightarrow (15x+6)(x-3) = (x+4)^2(x-3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15x+6 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \Rightarrow D = 49 - 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ ч.к. } x > 3.$$

2.2) Если  $x < 3 \Rightarrow -(15x+6)(3-x) = (x+4)^2(3-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 16 + 8x + 15x + 6 = x^2 + 23x + 22 \Rightarrow D = 23^2 - 4 \cdot 22 \Rightarrow$$

$$= 441 \Rightarrow x = \frac{-23 \pm 21}{2} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -22$$

Итак ответ: при  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a_4, a_{10}, a_{12}$   
по  $x \geq -4 \Rightarrow x = -1$ .

Ответ:  $x = 5$  или  $-1$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-2z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2z^2} \end{cases}$$

$$1) 15^2 = 225 \Rightarrow |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{15^2 - 2z^2} \leq 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y-20| + 2|y-35| \leq 15. \text{ Если } y \leq 20, \text{ то}$$

$$35-y \geq 15 \Rightarrow |y-35| > 15 \text{ противоречие. Если}$$

$$y > 35 \Rightarrow |y-20| = y-20 > 35-20 = 15 \Rightarrow |y-20| > 15$$

$$\text{противоречие} \Rightarrow y \in (20; 35] \Rightarrow |y-20| = y-20$$

$$\text{и } |y-35| = 35-y \Rightarrow 2y \text{ - две сист. уравн. имеем}$$

$$\text{всп. } y-20 + 2(35-y) = \sqrt{225-2z^2} \Leftrightarrow 50-y = \sqrt{225-2z^2}$$

$$\text{Но при } y \in (20; 35], 50-y \geq 50-35 = 15 \text{ и при}$$

$$\text{имеем } 50-y = \sqrt{225-2z^2} \leq 15 \Rightarrow 50-y = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 35; \sqrt{225-2z^2} = 15 \Rightarrow z = 0$$

Тогда сист. уравн. имеем в.сп.:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \end{cases}$$

$$\text{ООС: } \begin{cases} x+7 \geq 0 & x \geq -7 \\ 5-x \geq 0 & x \leq 5 \\ 35-2x-x^2 \geq 0 & (x+7)(5-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-7; 5].$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\begin{aligned} x+7 + 5-x + 36 - 12\sqrt{5-x} + 12\sqrt{x+7} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} &= \\ = 4(35-2x-x^2) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{н.к. } 35 - x^2 - 2x = (x+7)(5-x) :$$

$$12 + 36 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 12(\sqrt{4+x} - \sqrt{5-x}) =$$

$$= 4\sqrt{(x+7)(5-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 12(2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6) =$$

$$= -4(x+7)(5-x), \text{ пусть } t = \sqrt{(x+7)(5-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48 - 2t + 24t - 72 = 4t^2 \Leftrightarrow 4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 11t + 12 = 0 \quad D = 121 - 8 \cdot 12 = 121 - 96 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{11-5}{4} = 1,5; \quad t_2 = \frac{11+5}{4} = 4$$

$$1) \text{ Если } \sqrt{(x+7)(5-x)} = t_2 = 4 \Leftrightarrow (x+7)(5-x) = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35 - x^2 - 2x = 16 \Rightarrow 0 = x^2 + 2x - 19; \quad D = 4 + 76 = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{80}}{2} = -1 \pm \sqrt{20} = -1 \pm 2\sqrt{5}, \text{ а так же}$$

помогает, что  $-1 - 2\sqrt{5} < -1 - 6 = -7$  и  $-1 + 2\sqrt{5} < -1 + 6 = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 \pm 2\sqrt{5} \in \text{ОДЗ.}$$

$$2) \text{ Если } \sqrt{(x+7)(5-x)} = \frac{3}{2} \Rightarrow (x+7)(5-x) = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 35 - x^2 - 2x = \frac{9}{4} \Rightarrow 140 - 4x^2 - 8x = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 4x^2 + 8x - 131 \Rightarrow D = 64 + 16 \cdot 131 = 2150. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{2150}}{8} = -1 \pm \frac{\sqrt{2150}}{8}, \text{ так } 2150 < 48^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 - \frac{\sqrt{2150}}{8} < -1 - 6 = -7 \text{ и } -1 + \frac{\sqrt{2150}}{8} < -1 + 6 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \pm \frac{\sqrt{2150}}{8} \in \text{ОДЗ.}$$

Объем:  $y = 35; z = 0; x = -1 \pm \frac{\sqrt{2150}}{8}$  или  $-1 \pm 2\sqrt{5}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 13

$$\cos^3 x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + p$$

$$\cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow$$

$\rightarrow$  уравнение равносильно тому:

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x = p - 3.$$

$$f(x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x$$

$$f'(x) = 12 \cos^2 x \sin x - 3 \sin x + 12 \cos x \sin x =$$

$$= -3 \sin x (4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1) = -3 \sin x (2 \cos x - 1)^2$$

$\Rightarrow$  точки экстремумов  $\sin x = 0$  и  $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pi n; x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k; x = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi s, \text{ где } k, n, s \in \mathbb{Z}$$

$$f(0) = 1; f(\pi) = -13; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -13 \leq p - 3 \leq 1 \Rightarrow -10 \leq p \leq 4 \text{ и при всех}$$

$p \in [-10; 4]$  из монотонности непрерывной функции  $f(x)$  следует, что для всех  $x$  найдутся  $\theta$  и  $\phi$ .  $\Rightarrow$  Ответ:  $p \in [-10; 4]$ .



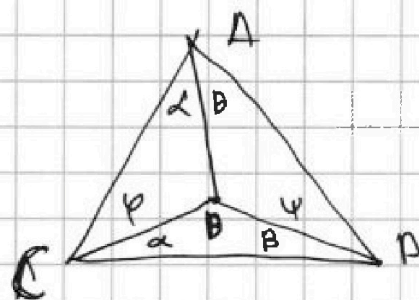
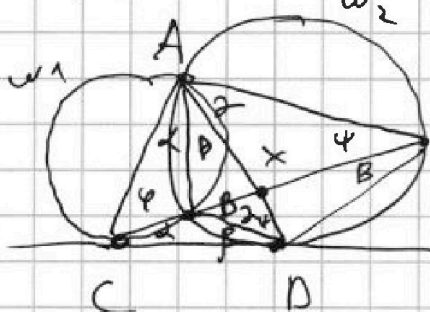
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 159

Решение:



Пусть  $\angle CAD = \alpha$ ;  $\angle CBD = \beta$ ;  
 $\angle CDB = \rho$ ;  $\angle DAE = \delta$ ;  $\angle ACE = \psi$ ;  
 $\angle CEA = \chi$ .

$$1) \frac{S_{CAE}}{S_{CAE}} = \frac{CX}{XE} = \frac{9}{25} \text{ по условию.}$$

$S_{CAE} = \frac{1}{2} \sin \angle CAE \cdot AC \cdot AE$ , но  
 $CD$  - касательная к  $(CAB) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle CAB = \angle BAD = \alpha$ ;  $CD$  - касат. к.  
 $(DBA) \Rightarrow \angle DAB = \angle CBD = \beta \Rightarrow \angle CAD =$   
 $= \angle CAE = \alpha + \beta \Rightarrow S_{CAE} = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \cdot$   
 $AC \cdot AE$ .

$S_{CAE} = \frac{1}{2} AX \cdot AE \cdot \sin \angle XAE$ , но  
 из высотности  $DBAE$ :  $\angle EAX = \angle DAE = \angle DBE = \delta$ ,  
 но  $\angle DBE$  внешний к  $\triangle CBD \Rightarrow \angle DBE = \alpha + \beta = \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{CAE} = \frac{1}{2} AX \cdot AE \cdot \sin \delta = \frac{1}{2} AX \cdot AE \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CAE}}{S_{CAE}} = \frac{AE \sin \delta}{AE} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}.$$

2) По т. Синусов в  $\triangle CAE$ :

$$\frac{AE}{\sin \psi} = \frac{AC}{\sin \chi} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{\sin \psi}{\sin \chi} = \frac{9}{25}$$

По т. к.  $DBAE$  - впис.  $\Rightarrow \angle AEB = \psi = \angle BDA$ .

3) По т. Синусов в  $\triangle ACB$  и  $\triangle DBA$ :

$$\triangle ACB: \frac{AB}{\sin \psi} = \frac{CB}{\sin \alpha} \Rightarrow CB = \frac{AB \sin \alpha}{\sin \psi}$$

$$\triangle DBA: \frac{AB}{\sin \psi} = \frac{DB}{\sin \beta} \Rightarrow DB = \frac{AB \sin \beta}{\sin \psi} \Rightarrow \frac{DB}{CB} =$$

$$= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \psi} = \frac{9}{25} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \text{ но по т. Синусов}$$

$$\text{в } \triangle CBD: \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{CB}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{9}{25} = \frac{BC}{DB} \cdot \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{DB^2}{BC^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{3}{5}.$$

4)  $\angle CDB = \angle BED = \angle CED$  к.  $CD$  касательна  $(BDE) \Rightarrow$

$$\rightarrow \triangle COD \sim \triangle CDE \text{ по 2 углам} \Rightarrow \frac{CB}{DB} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CB} = \frac{DB}{CD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{\text{ответ: } \frac{DE}{CD} = \frac{3}{5}}.$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{целое} \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c = p; b-c = p \Leftrightarrow a = b \text{ (против.)} \\ a-c = p^2; b-c = 1 \\ a-c = -1; b-c = p^2 \end{cases}$$

Получим, что н.к.  $p^2 > 0 \Rightarrow a-c$  и  $b-c$  одного знака  $\Rightarrow$  или  $a > b > c$  или  $c > a > b$

1) Если  $a > b > c$ : тогда н.к.  $a \neq b \Rightarrow a-c \neq b-c \Rightarrow$

$$\Rightarrow b-c = 1; a-c = p^2 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 \Rightarrow a-b+1 = p^2$$

1.1) если  $b \equiv 3 \Rightarrow b^2 \equiv 3 \Rightarrow 820 - a \equiv 3 \Rightarrow 1 - a \equiv 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a \equiv 1$ , но тогда  $a-b+1 \equiv 2 \equiv p^2$ , но

$$1^2 \not\equiv 2; 0^2 \not\equiv 2 \text{ и } 2^2 \not\equiv 2 \Rightarrow \text{противоречие.}$$

1.2)  $b \not\equiv 3 \Rightarrow b^2 \equiv 1 \Rightarrow 820 - b^2 = a \equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a-b+1 \equiv 1-b \equiv 0, \text{ если } b \equiv 1$$

$$\equiv -1 \equiv 2, \text{ если } b \equiv 2, \text{ но}$$

$$a-b+1 = p^2 \Rightarrow p^2 \equiv 2 \Rightarrow b \equiv 2 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow a-b+1 \equiv 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 3 \Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow a-b = 8 \text{ и } a+b^2 = 820 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b+8+b^2 = 820 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0; \Delta = 1 + 3248 =$$

$$= 3249 = 57^2 \Rightarrow b_1 = 28; b_2 = -29. \Rightarrow a_1 = 36; a_2 = -21$$

н.к.  $b-c = 1 \Rightarrow c_1 = 27; c_2 = -30$ , но  $a > b > c \Rightarrow$

$$\Rightarrow b \neq b_2 \Rightarrow \underline{b = 28; a = 36; c = 27; p = 3}$$

2) Если  $c > a > b$ : аналогично 1)  $a-c \neq b-c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{н.к. } |a-c| < |b-c| \Rightarrow a-c = -1; b-c = -p^2$$

$$\Rightarrow a-b = p^2 - 1 \Rightarrow a-b+1 = p^2 \text{ и аналогично}$$

н.1) получаем, что  $b_1 = 28; b_2 = -29; a_1 = 36; a_2 = -21$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x_1 = -20; G_2 = 37, \text{ по ч.к. } \langle a \rangle \langle b \rangle \Rightarrow b = -29; a = -21;$$

$$(x_1 = -20; p = 3 \Rightarrow \text{Ответ: } (-21; -29; -20) \text{ и } (38; 28; 27).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2}$$

$$e^{ix} = t$$

$$e^{3ix} - e^{-3ix} + 6e^{ix} - 6e^{-ix} = 3e^{2ix} - 3e^{-2ix} + p$$

$$t^3 - \frac{1}{t^3} + 6t - \frac{6}{t} = 3t^2 - \frac{3}{t^2} + p$$

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-3x} = \sqrt{(x+7)(x+5)}$$

$$x+7 + 5-x - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = (x+7)(5-x)$$

$$a+b - 2\sqrt{ab} = ab$$

$$12 - 2\sqrt{\dots} = 5 - 2x - x^2$$

$$\cos 2x \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$a+b - ab = 2\sqrt{ab}$$

$$x^2 + 2x - 23 = 2\sqrt{\dots}$$

$$5 \cos x - (\cos 2x (3 - 2 \cos x)) + p$$

$$a^2 + b^2 + a^2 b^2 - 2a^2 b - 2b^2 a + 2ab = 4ab$$

$$(x^2 + 2x - 23) = 4(x+7)(5-x)$$

$$5t = (2t^2 - 1)(3 + 2t) + p$$

$$\cos 3x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$5 \cos x = (2 \cos^2 x - 1) (3 + 2 \cos x) + p$$

$$5 \cos x = 6 \cos^3 x - 4 \cos^2 x - 2 \cos x + p$$

$$a = b$$

$$6 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 3 - 2 \cos x + p$$

$$0 = -4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x - 2 \cos x + p - 3$$

$$a = ab$$

$$0 = 6 \cos^3 x + 4 \cos^2 x - 7 \cos x + p - 3$$

$$a^2 + b^2 + a^2 b^2 = 2a^2 b + 2b^2 a + 2ab$$

$$x+7 = 5-x \quad \cos 90 + \cos 60 = 2 \cos 120 \cos 60$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$0,5 \sqrt{13}; \frac{\sqrt{13}}{2}; -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) = p - 3$$

$$\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2} + x+7+5-x = \frac{(a-ab)^2}{2}$$

$$-13 \leq p-3 \leq 1$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x)$$

$$-10 \leq p \leq 4$$

$$(\cos 3x) \cos x = (\cos 2x - \cos x) + p = ab \left( \frac{\sin 2x \sin 3x}{3} \right)$$

$$(\cos 3x) - 6 \cos x (1 - \cos x) = p$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-3x} + 6 = 2\sqrt{15-2x-x^2}$$

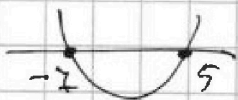
$$x \geq -7$$

$$x+7 \geq 5-3x \Rightarrow x \geq -1$$

$$5 \geq 3x$$

$$5 \geq x^2 - 1$$

$$35 - 7x - x^2 \geq 0$$



$$0 \geq x^2 + 2x - 35$$

$$4 + 140 = 144$$

$$x = \left[ \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} \right] = 5$$

$$x+7$$

$$a+b - 2\sqrt{ab} = 36 + 4ab - 12\sqrt{ab}$$

$$x+7 + 5-3x -$$

$$-2\sqrt{(x+7)(5-3x)}$$

$$70 - 4x + 2x^2$$

$$2x^2 + 2x - 63 = 2\sqrt{(x+7)(5-3x)}$$

$$10\sqrt{ab} = 36 + 4ab - a - b$$

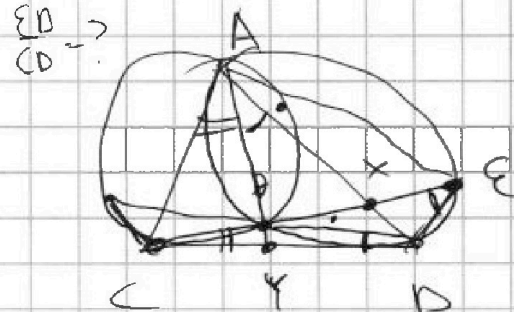
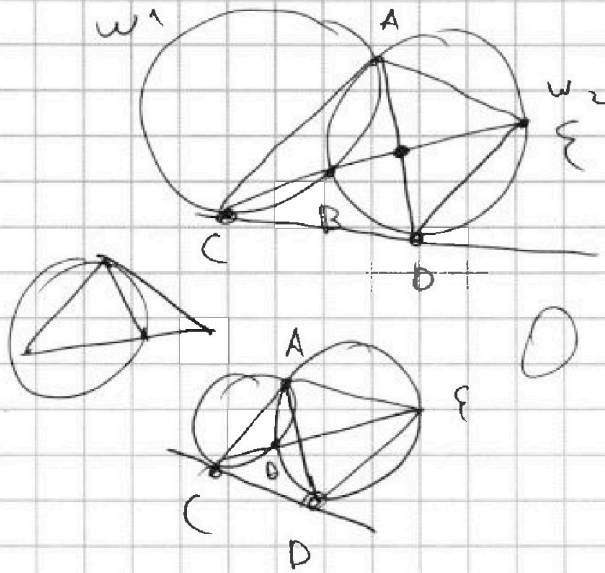


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\epsilon \frac{AX}{XD} \cdot \frac{BC}{CY} \cdot \frac{YB}{YA} = 1$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{DB}{DE}$$

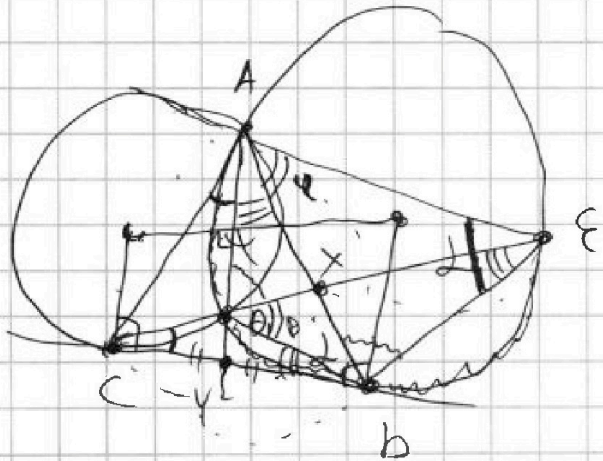
$$\frac{DE}{CE} = \frac{DB}{DC}$$

$$\frac{YD}{YA} = \frac{DB}{DA}$$

$$\frac{DA}{YA} = \frac{DB}{YP}$$

$$\frac{CX}{XE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{DB}{DA}$$



$$\frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{DE^2}{DC^2} = ?$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CD^2}{DE^2}$$

$$\frac{CD^2}{CE^2} = \frac{DB^2}{DE^2}$$

$$\frac{AC \sin \varphi}{AE \sin \varphi} = \frac{9}{25} \frac{BC^2}{CE^2} = \frac{DB^2}{DE^2} \Rightarrow \frac{DE^2}{CE^2} = \frac{DB^2}{BC^2}$$

$$\frac{CD \sin \alpha}{DE \sin(\alpha + \beta)} = \frac{9}{25} \frac{BC^2}{CE^2} = CB \cdot CE$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{25 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \frac{DB \cdot CE}{DE^2}$$

$$\frac{AE}{AD}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} 25 \\ -25 \\ \hline 75 \\ 15 \end{array} \right\} \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z^2} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-2z^2} \end{cases}$$

ОДЗ:  $15^2 \geq z^2 \Rightarrow z \in [-15; 15]$   $y = 35 \quad z = 0$

$x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$

$5-x-3z^2 \geq 0 \quad 12=5-x-3z^2 \Rightarrow 4z^2 \rightarrow z \in [-15; 4]$

$y-2x-x^2+2 \geq 0$

1)  $y < 20 \Rightarrow 20-y+70-2y = \sqrt{225-2z^2} \quad 35 \geq y > 27,5$

$90-3y = \sqrt{225-2z^2} \quad y-20+2(35-y)$

$8400+8y^2-540y = 225-2z^2$

$(90-3y)^2 + z^2 = 225$

$90-3y \leq 15$

$75 \leq 3y$

$25 \leq y$

$30-20-y = \sqrt{225-2z^2}$   
 $\downarrow$   
 $15$

$\cos 3x + 6\cos x = 2\cos 2x + 1$

$\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$

$= (1-2\sin^2 x) \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x - 4\sin^2 x \cos x =$

$= \cos x (1-4\sin^2 x) = \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos x = 3(2\cos^2 x - 1) + 1 \Rightarrow$

$\rightarrow 4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^2 x - 3 + 1$

$\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 1$

$4t^3 - 6t^2 + 3t - 1 = 0 = f(t)$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 1$

$12\cos^2 x \sin x + 12\cos x \sin x - 3\sin x = 0$

$\cos 180 = 4\cos^3 60 - 3\cos 60$

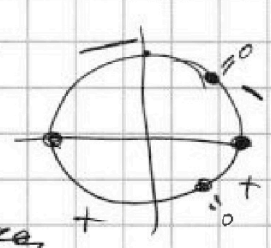
$-4 - 6 + 3 = -7$

$4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -1$

$-3 \sin x (4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$

$-3 \sin x (2\cos x - 1)^2 = 0$

2 комплексных  $0; \pi; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}$

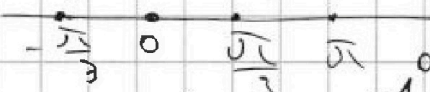


$f(0) = 4 - 1$

$f(\frac{\pi}{3}) = 3,5 - 1$

$f(\pi) = -4 - 1 - 1 = -6$

$f(\frac{2\pi}{3}) = 3,5 - 1$



$\cos x (4\cos^2 x - 6\cos x + 3) = 0$

$36 - 48 < 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14}$$

$$a_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

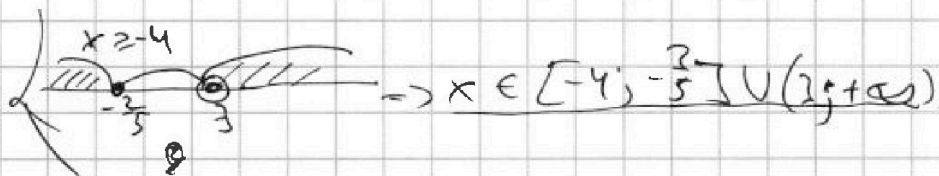
$$a_{10} = x+4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = 9^6 \quad \sqrt{7}$$

$$a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = (x+4) 9^2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot 9^2$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ (15x+6)(x-3) \geq 0 \\ \frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad (15x+6)(x-3) = \frac{15x+6}{(x-3)^3} \cdot 9^6$$

Если  $15x+6=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$  но  $a_{10} = a_4 = a_{12} = 0$

Если  $15x+6 \neq 0 \Rightarrow (x-3) = \frac{1}{(x-3)^3} \cdot 9^6 \Rightarrow$   
 $\rightarrow (x-3)^2 = 9^6 \Rightarrow 9^3 = |x-3| \Rightarrow 27 = |x-3|$



$$\Rightarrow (15x+6)(x-3) = (x+4)^2 \cdot |x-3|$$

1)  $x > 3 \Rightarrow 15x+6 = x^2+8x+16 \Rightarrow 0 = x^2-7x+10$

$D = 49 - 40 = 9 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 9 = \sqrt{27}$

2)  $x < 3 \Rightarrow -(15x+6) = x^2+8x+16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = x^2 + 23x + 22 \Rightarrow 23^2 - 4 \cdot 22 = 529 - 88 = 441$

$\Rightarrow x = \frac{-23 \pm 21}{2} = \begin{cases} -1 \\ -22 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 9 = \sqrt{4} = 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Arithmetic operations:  $275 + 95 = 370$ ,  $370 + 825 = 1195$ ,  $1195 + 2475 = 3670$ ,  $3670 + 25575 = 29245$ .
- Algebraic equations:  $x^2 + 2x - 39,5 = 0$ ,  $35 - x^2 - 2x = 1,5$ ,  $x^2 + 2x - 31 = 0$ .
- Quadratic equations:  $4B^2 - 22B + 24 = 0$ ,  $2B^2 - 11B + 12 = 0$ .
- Discriminant calculation:  $D = 121 - 96 = 25 \Rightarrow B = \frac{11 \pm 5}{4}$ .
- Final result:  $\frac{3}{2} = 1,5$  (circled).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)} \quad \begin{matrix} 24 - \sqrt{\dots} = 70 - 4x - 2x^2 \\ 2x^2 + 4x + 36 = \sqrt{\dots} \\ 2x^2 + 4x - 46 = \sqrt{\dots} \end{matrix}$$

$$x+7+5-x+36 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(x+7)(5-x)$$

$$48 - 2\sqrt{\dots} = 4(35 - 2x - x^2) = 140 - 8x - 4x^2$$

$$4x^2 + 8x - 92 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$(4x^2 + 8x - 92)^2 = 4(35 - 2x - x^2)^2$$

$$8x + 4x^2 = t \quad (t - 92)^2 = 140 - t$$

$$t^2 + 92t - 194t = 140 - t$$

$$t^2 - 193t + 92t - 140 = 0$$

$$193^2 - 4(92^2 - 140) = 960 + 193^2 - 194^2 = 960 - 387 = 573$$

$$= 960 - 387 = 573$$

$$t = \frac{193 \pm \sqrt{573}}{2} \quad x = -3$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ + 69 \\ \hline 92 \\ + 46 \\ \hline 138 \\ + 529 \\ \hline 667 \\ + 24 \\ \hline 691 \\ + 96 \\ \hline 787 \\ + 516 \\ \hline 1303 \end{array}$$

$$4x^2 + 8x = t$$

$$4x^2 + 8x - t = 0$$

$$D = 64 + 4t$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{D}}{8} = -1 \pm \frac{\sqrt{16+t}}{4}$$

$$48 - 2\sqrt{\dots} = 140 - 8x - 4x^2$$

$$(4x^2 + 8x - 92)^2 = 4(35 - 2x - x^2)^2$$

$$(t - 92)^2 = 4(140 - t)$$

$$24 - \sqrt{\dots} = 70 - 4x - 2x^2 \quad t^2 - 183t + 92^2 - 140 = 0$$

$$(2x^2 + 4x - 46)^2 = 4(35 - 2x - x^2)^2 \quad t^2 - 183t + 92^2 - 140 = 0$$

$$(2t - 46)^2 = 35 - t = 960 -$$

$$4t^2 + 46^2 - 184t = 35 - t$$

$$4t^2 - 183t + 46^2 - 35 = 0$$

$$(4t - 46)^2 = 35 - t = 14$$

$$\begin{aligned} D &= 183^2 - 4(46^2 - 35) = \\ &= 183^2 + 140 - 92^2 = \\ &= 140 + 92 \cdot 245 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 184 \\ + 183 \\ \hline 367 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b \quad a - b \neq 3 \quad (a - c)(b - c) = p^2 \in \mathbb{P}$$

$$(a^2 + b^2 = 820)$$

$$a - c + b - c \Rightarrow b - c$$

$$1) c > a > b: \quad b - c = -p^2 \quad a - c = -1$$

$$2) a > b > c: \quad a - c = p^2 \quad b - c = 1 \Rightarrow b - 1 = c$$

$$(a - c) - (b - c) = a - b = p^2 - 1 \quad \underline{a - b + 1 = p^2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 819 \\ \underline{4} \\ 3246 \\ \underline{3248} \\ 2 \\ 216 \\ \underline{216} \\ 0 \\ 2916 \\ \underline{2916} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} a - b + 1 = p^2 \\ a + b^2 = 820 \Rightarrow 820 - b^2 - b + 1 = p^2 \\ p^2 = b^2 + b - 829 \\ D = 1 + 4 \cdot 829 = 3285 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 829 \\ \underline{4} \\ 3284 \\ \underline{3285} \\ 1 \end{array}$$

$$a + b^2 = 820 \equiv 1$$

$$1) b \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 1 \Rightarrow a - b + 1 \equiv 2 \Rightarrow p^2 = 9$$

$$2) b \equiv 1 \Rightarrow a \equiv 1 \Rightarrow a - b + 1 \equiv 2 \equiv p^2$$

Ищем варианты

$$\sqrt{4}$$

$$\begin{cases} a - b + 1 = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$b^2 + b = 820 - 8 = 812$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$1 + 3248 = 3249 = 57^2$$

$$b = \frac{-1 + 57}{2} = 28 \Rightarrow a = 20$$

$$b = \frac{-1 + 57}{2} = 28 \Rightarrow a = 34, c = 30$$

$$\frac{2}{-2} = -1$$

$$35 + 2 - 1$$

$$36$$

$$\frac{11}{6}$$



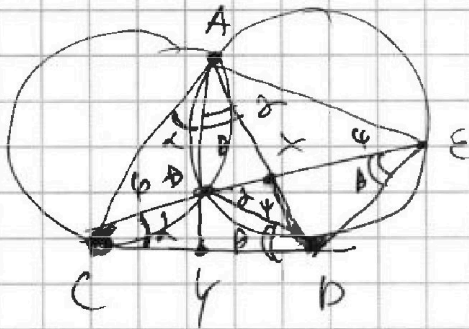


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CX}{XE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{CB^2}{CE} = \frac{DB^2}{DE}$$

$$\frac{DB}{DE} = \frac{CB}{CE} \Rightarrow$$

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CB^2}{CE^2}$$

$$\frac{DB^2}{DE^2} = \frac{CB^2}{CE^2}$$

$$\frac{DB^2}{DE^2} = \frac{CB^2}{CE^2}$$

$$\frac{AC \sin(\alpha + \beta) \cdot AX}{AX \cdot \sin \theta \cdot AE} = \frac{CX}{XE} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{AC}{AE} \cdot \sin \theta = \frac{9}{25}$$

$$\frac{CD}{\sin \theta} = \frac{DE}{\sin \alpha}$$

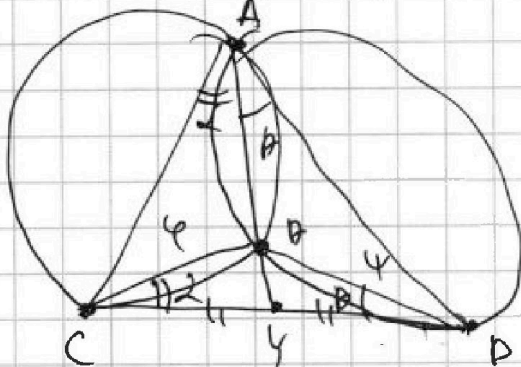
$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$$

$$\frac{DE}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

✓

$$\frac{BD}{\sin \theta} = \frac{AB}{\sin \psi} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{\sin \theta}{\sin \psi}$$



$$\frac{DE}{DC} = \frac{BD}{BC} = ? \quad \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \psi}$$

$$CB = \frac{AB \sin \alpha}{\sin \psi}$$

$$\frac{BD}{\sin \theta} = \frac{AB}{\sin \psi} \Rightarrow$$

$$BD = \frac{AB \sin \theta}{\sin \psi}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{CB}{\sin \psi}$$

$$\frac{CB}{BD} \cdot \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \theta} = \frac{BD}{CB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

$$\frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{CB^2}{BD^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{5}{3}$$