



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$x = \sqrt{3} - 1: \quad a_3 = 3x + 3 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1) + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (\sqrt{3} - 1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 8 - 6\sqrt{3} \quad \text{и} \quad a_5 - a_3 = 4 - 3\sqrt{3} \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d,$$

$$a_5 - a_3 = 2d \quad \text{или} \quad d = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{так } 4d = 8 - 3\sqrt{3} \cdot 4 = 8 - 6\sqrt{3} = a_9 - a_5)$$

$$2d = (2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) \cdot 2 = 4 - 3\sqrt{3} = a_5 - a_3 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1 \quad \text{подходит}$$

под условие (по Зам. 1)

$$x = -(\sqrt{3} + 1): \quad a_3 = (-\sqrt{3} - 1) \cdot 3 + 3 = -3\sqrt{3} \quad \text{так } a_3 = 3x + 3, \quad x = -\sqrt{3} - 1$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((-\sqrt{3} - 1)^2 + 2 \cdot (-\sqrt{3} - 1))^2 = (4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(-\sqrt{3} - 1)^2 = 3 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 + 6\sqrt{3} - 4 = 8 + 6\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a_9 - a_5 = 4d, \quad a_5 - a_3 = 2d \quad \text{или}$$

$$a_5 - a_3 = 4 - (-3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$d = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{так } 4d = 4 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 8 + 6\sqrt{3}; \quad 2d = 2 \cdot (2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 4 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -\sqrt{3} - 1$ подходит под условие (по Зам. 1)

Итак, мы получили, что под условие могут подходить лишь $x = -1$, $x = -\sqrt{3} - 1$ и $x = \sqrt{3} - 1$, и все эти числа подходят

Ответ: $-\sqrt{3} - 1$; -1 ; $\sqrt{3} - 1$.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть $\{a_n\}$ - арифметическая прогрессия из условия с шагом d . Тогда числа a_3, a_5 и a_9 являются $b \in \{a_n\}$
 $\Leftrightarrow a_5 - a_3 = 2d, a_9 - a_5 = 4d$ при некотором шаге d . (Знаб.!)

по усл.:

$$\begin{cases} a_3 = 3x+3 \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= 2d \\ a_9 - a_5 &= 4d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5 - a_3 = (x^2+2x)^2 - (3x+3) \\ a_9 - a_5 = 3x^2 - (x^2+2x)^2 \\ a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 = 2 \cdot (x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x+1)^2(x^2+2x-2)$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \cdot (x^2+2x-2) = 0$$

~~$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0$$~~

$$\text{мк. } x^2+2x-2 = (x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1))$$

$$(x+1)^2(x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1)) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt{3}-1 \\ x = -\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

$$x = -1: a_3 = 3x+3 = 0$$

$$a_5 = (x^2+2x)^2 = (-1-2)^2 = 1$$

$$a_9 = 3 \cdot x^2 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

$$a_9 - a_5 = 2, a_5 - a_3 = 1 \Rightarrow a_9 - a_5 = 4d \text{ и } a_5 - a_3 = 2d \text{ при } d = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = -1$ удовлетворяет условию (по Знаб.!)

$$\begin{aligned} *! (x-\sqrt{3}-1)(x-(-\sqrt{3}-1)) &= \\ &= (x^2 - (\sqrt{3}-1+(-\sqrt{3}-1))x + \\ &+ (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1)) = (x^2+2x- \\ &- (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)) = x^2+2x-1 = \\ &= x^2+2x-2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 Запись $C \geq A \geq B$ означает, что $\begin{cases} C \geq A \\ A \geq B. \end{cases}$

Запись $C \leq A \leq B$ означает, что $\begin{cases} C \leq A \\ A \leq B. \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x-3y \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

(слоним кер-ва) $\Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4+2x+2y \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \text{ (слоним кер-ва)} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 8x+4y \leq 8 \cdot \frac{3}{4} +$$

$$+ 4 \cdot 1\frac{1}{4} = 6 + 5 = 11. \Rightarrow 8x+4y \leq 11$$

Заметим, что $8x+4y=11$ при $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$, и это

$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$ подходит под условие:

$$|x-3y| = \left| \frac{3}{4} - 3 \cdot 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = \left| -\frac{12}{4} \right| = 3$$

$$|3x-y| = \left| 3 \cdot \frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} \right| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} \right| = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при } x = \frac{3}{4} \text{ и } y = 1\frac{1}{4}, \begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

таким x и y удовлетворяются условия задачи.

Итак, мы показали, что $8x+4y \leq 11$ и приведем

пример $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1\frac{1}{4} \end{cases}$, при котором x и y подходят под

условие и $8x+4y=11 \Rightarrow$ наибольшее возможное значение $8x+4y$ равно 11.

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases}, \text{ но } \overset{\text{если}}{m+n=39}, \text{ то } (m+n-9)=30 \neq 3. \Rightarrow$$

\Rightarrow противоречие \Rightarrow система $\begin{cases} m+n=39 \\ m+n-9=3 \end{cases}$ не имеет решений \Rightarrow совокупность (1) не имеет решений \Rightarrow
 \Rightarrow при $p \neq 3$ нет решений

Если $p \neq 3$: тогда $(m+n)/3, \text{ н.к. } (m+n)(m+n-9)=13p^2, 13p^2/3.$

$$\text{Значит, } (m+n; m+n-9) = 1 \quad (\text{н.р. } \text{НОД}(m+n; m+n-9) = 1) \quad \Rightarrow$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13p^2 \end{cases} \quad \text{Если } \begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=13p^2 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} m+n=1 \\ m+n-9=-8 \end{cases} \text{ Очевидно}$$

$$\begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}; \text{ такая система не имеет решений}$$

$$\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases} \quad \text{Если } \begin{cases} m+n=13 \\ m+n-9=p^2 \end{cases}, \text{ то } m+n=13, m+n-9=4 \text{ и}$$

$$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases} \quad m+n-9=p^2, \text{ что, очевидно, верно лишь}$$

при $\begin{cases} p=2 \\ m+n=13 \end{cases}$ (p -простое, n - простое)
Если $\begin{cases} m+n=13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases}$, то $m+n=10$ и $m+n=13p^2$, что, очевидно, невозможно. Если же $\begin{cases} m+n=p^2 \\ m+n-9=13 \end{cases}$, то $m+n=22$ и $m+n=p^2$, что, очевидно, невозможно.

\Downarrow
В случае $A=13p^2$ и $B=75q^2$ решения есть лишь при $m+n=13$ и $p=2$.

$$B = mn(m+n-3)$$

$$\Rightarrow mn \cdot (13-3) = 75q^2 \Rightarrow 10mn = 75q^2 \Rightarrow 2mn = 15q^2. \text{ Заметим, что } (2mn) : 2, \text{ а } 15q^2 : 2 \text{ лишь при } q=2 \Rightarrow \text{н.к. } 2mn = 15q^2, \text{ то } q=2 \text{ и } 2mn = 25 \cdot 4 \Rightarrow mn = 50$$

Итак, мы знаем, что $\begin{cases} m+n=13 \\ mn=50 \end{cases}$.

$$\begin{cases} m+n=13 \\ mn=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ (13-n)n=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ n^2-13n+50=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13-n \\ n=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=3 \\ m=3 \\ n=10 \end{cases}$ Очевидно, пары $(10, 3)$ и $(3, 10)$ подходят,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$ Под записью (a, b) — целые числа, что $\text{НОД}(a, b) = c$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Если $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$:

$$\begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases}$$

Таким образом $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$.

Если $p=3$: $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$.

Тогда ~~$(m+n) \cdot 9$~~ Тогда, если $(m+n) : 9$ или $(m+n-9) : 9$

$(m+n-9) : 9$, то и $(m+n) : 9$, и $(m+n-9) : 9$, т.е. $(m+n) \cdot 9$.

$(m+n-9) : 81$, но $(m+n)(m+n-9) = 117$, $117 \neq 81$. Кроме-

вопроса $\Rightarrow (m+n) \not\equiv 9$ и $(m+n-9) \not\equiv 9$.

Таким образом $\left[\begin{matrix} (m+n) : 3 \\ (m+n-9) : 3 \end{matrix} \right]$, т.к. $(m+n)(m+n-9) = 117$, $(117 : 9 = 13)$

$\Rightarrow (m+n) : 3$ и $(m+n-9) : 3$, при этом $(m+n) \not\equiv 9$ и $(m+n-9) \not\equiv 9$

$\Leftrightarrow (m+n) : 3$, но $(m+n) \not\equiv 9$.

т.к. m и n — натуральные $\Rightarrow (m+n) \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$(m+n)(m+n-9) = 117$$

\Rightarrow ~~$(m+n) \cdot 9$~~ $\left\{ \begin{matrix} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{matrix} \right.$ — т.к. $(m+n) : 3$ и $(m+n) \not\equiv 9$, и $m \cdot k$ $117 : (m+n)$

Сумма $\begin{cases} m+n=3 \\ m+n-9=39 \end{cases}$ не имеет решений т.к. m и n — натуральные

(т.к. если $m+n=3$, то $m+n-9 = -6 \neq 39$)

Везде в решении целые числа, что p и q — простые и их натуральность имеет значение, но они не являются взаимно простыми, не являются.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м.к. тогда $A = (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4 = 13p^2$, где $p=2$ и

$B = mn \cdot (m+n-3) = 10 \cdot 3 \cdot (10+3-3) = 30 \cdot 10 = 300 = 75 \cdot 4 = 75q^2$,
где $q=2$ ($p=2$ и $q=2$ - простые, м.к. 2-простое число)

Тогда $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$, подберем пары $(3;10)$ и $(10;3)$

~~(3;10)~~ ~~(10;3)~~

Если $\begin{cases} A = 75q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 75q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases}$

Заменим, что $75:3 \Rightarrow$ м.к. $(m+n)(m+n-9) = 75q^2$, но

м.к. q -простое (м.к. и натуральное), то $(m+n):3$ или $(m+n-9):3 \Rightarrow$ и $(m+n):3$, и $(m+n-9):3$ (м.к. $9:3 \Rightarrow 75q^2:9$
м.к. $(m+n)(m+n-9) = 75q^2$. Очевидно, $(75q^2):9$ или при $q=3$
 \Rightarrow при $A=45p^2, B=13p^2, q=3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 9 = 630 + 45 = 675$.

*: м.к. q -простое

Если $(m+n):9$, то и $(m+n-9):9$ (м.к. $9:9$) и если $(m+n-9):9$, то и $(m+n):9 \Rightarrow$ если $(m+n):9$, то $(m+n)(m+n-9):81 \Rightarrow 75q^2:9; 75q^2 = 675$, но $675:81 \Rightarrow (m+n) \neq 9$, но при этом $(m+n):3$ из предыдущей абзаца. Но тогда $(m+n):3, (m+n) \neq 9, (m+n-9):3, (m+n-9):9$ (м.к. или $(m+n):3$, но и $(m+n-9):3$; и м.к. если $(m+n) \neq 9$, то $(m+n-9) \neq 9$ - м.к. $9:3 \Rightarrow (m+n)(m+n-9):9 \cdot 4$
 $(m+n)(m+n-9) \neq 27$. Но $(m+n)(m+n-9) = 675$, а $675:27$ (м.к. $675 = 75 \cdot 9 = 27 \cdot 25$), противоречие \Rightarrow при $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$ решений нет

Мы разобрали оба случая ($A = 13p^2$ и $B = 75q^2$; или же $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$), и получили, что под условием подберем только пары $(3;10)$ и $(10;3)$ (м.к. в случае $A = 13p^2$ и $B = 75q^2$ подберем только $(3;10)$ и $(10;3)$, а при $A = 75q^2$ и $B = 13p^2$ нет таких пар $(m;n)$, удовлетворяющих под условие) \Rightarrow
Ответ: $(3;10)$ и $(10;3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По теореме косинусов в $\triangle AZY$: $YZ^2 = AZ^2 + AY^2 - 2 \cdot AZ \cdot AY \cdot \cos \angle YAZ$.

$YZ = 8, AZ = 6, AY = AZ$ (т.к. $\angle AZY = \angle AZE$, т.е. $\triangle AZE$ - равнобедренный с основанием YZ)

$$\Rightarrow 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle YAZ \Rightarrow \cos \angle YAZ = \frac{8^2 - 2 \cdot 6^2}{6 \cdot 6 \cdot 2}$$

$$\cos(\angle YAZ) = \frac{64 - 2 \cdot 36}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{64 - 72}{72} = -\frac{1}{9}$$

$\angle YAZ$ и $\angle CAB$ - смежные $\Rightarrow \cos \angle CAB = -\cos \angle YAZ$ (т.к. $\angle CAB + \angle YAZ = 180^\circ$) $\Rightarrow \cos \angle CAB = \frac{1}{9}$ - (Зам. 4)

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB$$

$BA = 30$ - по (Зам. 3)

$AC = 18$ - по условию

$\cos \angle CAB = \frac{1}{9}$ - по (Зам. 4)

$$\Rightarrow BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos \angle CAB$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cdot \frac{1}{9} = 1104$$

$$BC = \sqrt{1104} = 4\sqrt{69}$$

Ответ: $4\sqrt{69}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

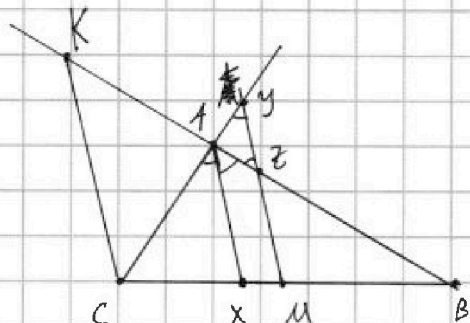
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

прям. - прямая; \triangle - равнобедренный

Продлим BA за точку A .



Пусть точка $K \in$ прм. AB , $ZB = ZK$, $K \neq B$.

Тогда $KZ \parallel AZ \parallel KC$ - т.к. MZ - средняя линия в $\triangle BKC$ (т.к. M - середина BC , Z - середина BK , т.к. $ZB = ZK$ и $K \neq B$) - (Заб.1)

Т.к. $MZ \parallel AX$, то $\angle CAX = \angle CYM$ - по св-ву, и $\angle XAB = \angle AZY$ - по св-ву (т.к. Z лежит между M и Y ,

т.к. $MZ \parallel AX$ и Z лежит на отрезке AB , а Y - на

продолжении отрезка AC) ~~и $\angle CMZ < 180^\circ$, т.к. он смежен углу ZMB , который больше 0° , т.к. $Z \notin$ прм. BC (т.к. $MZ \parallel AC$, $AC \notin BC$, $M \in$ прм. BC)~~

и $\angle CMZ < 180^\circ$, т.к. он смежен углу ZMB , который больше 0° , т.к. $Z \notin$ прм. BC (т.к. $MZ \parallel AC$, $AC \notin BC$, $M \in$ прм. BC)

Итак, $\angle CAX = \angle CYM$ и $\angle XAB = \angle AZY$. Т.к. AX - биссектриса $\triangle ABC$ $\angle CAB$ в $\triangle ABC$, то $\angle XAB = \angle CAX \Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY$. (т.к. $\angle CYM = \angle AYZ$).

По (Заб.1), $KC \parallel MZ \Rightarrow \angle KCA = \angle AYZ$, $\angle KCA = \angle CKA =$

$= \angle AZY \Rightarrow$ т.к. $\angle AZY = \angle AYZ$, то $\angle KCA = \angle CKA \Rightarrow \triangle KCA$ - \triangle равнобедренный

с основаниями $KC \Rightarrow AC = KC \Rightarrow AC + AZ = AK + AZ$ - (Заб.2)

Z - А лежит между K и Z , т.к. $ZB > AZ$ и $ZB = KZ$, а $ZB > AZ$,

т.к. $AZ/ZB = XM/MB$ - по теореме Фалеса для $\angle CBA$ и $MZ \parallel AX$, а $XA/AB = XM/MB < 1$ (т.к. $XM < MB$, т.к. $X \in$ отрезок CM или $X \in$ отрезок MB) т.к. $X \in$

X лежит на отрезке $BC \Rightarrow$ А лежит между K и Z на прямой $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow KZ = AK + AZ$. По (Заб.2), $AK + KZ = AC + AZ \Rightarrow BZ = AC + AZ \Rightarrow$

$\Rightarrow BA = BZ + AZ = AC + 2 \cdot AZ$. $AC = 10$ и $AZ = 6$ - по условию $\Rightarrow BA = B + 2 \cdot 6 =$

$= 30$. - (Заб.3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 1,5 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(6-x) = 2,25 \\ (x+1)(6-x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x + 6 = 2,25 \\ -x^2 + 5x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 24 = 9 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 20x + 15 = 0 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{10} - 20}{-8} \\ x = \frac{-5\sqrt{10} - 20}{-8} \\ x = \frac{\sqrt{13} - 5}{-2} \\ x = \frac{-\sqrt{13} - 5}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

(4) из (3): ~~$x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$~~
 $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 > 0$

Мы знаем, что $x \geq 0$ - из (1) $\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{1} = 1$,

$$\sqrt{6-x} \leq \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 \geq 1 - \sqrt{6} + 5 = 6 - \sqrt{6} > 0,$$

т.к. $6 - \sqrt{6} = \sqrt{6}(\sqrt{6} - 1)$, $\sqrt{6} > 1$ (т.к. $6 > 1$) $\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 > 0$
 или $6 > x \geq 0$.

из (3) и (4):

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} > \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$
 $\frac{5 + \sqrt{13}}{2} > \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$
 $6 > x \geq 0$

$$\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2} < 6, \text{ т.к. } 2\sqrt{10} < 7, \text{ т.к. } 40 < 49.$$

$$40 < 49.$$

$$\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} < 0, \text{ т.к. } 5 < 2\sqrt{10}, \text{ т.к. } 25 < 40.$$

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} > 0, \text{ т.к. } 5 > \sqrt{13}$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} < 6, \text{ т.к. } \sqrt{13} < 7 \text{ (т.к. } 13 < 49)$$

(справа $\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$)

Проверяем, чтобы все значения лежали в промежутке $[0; 6]$ \Rightarrow все они подходят \Rightarrow т.к. $y = x$.

Ответ: ~~$(\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2})$~~ , $(\frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}, \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2})$, $(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2})$, $(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) : x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2, \quad x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (м.к. е. н.б. } \sqrt{x} \text{ и } \sqrt{y})$$

$$(x^4 - y^4) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} > \sqrt{y} \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 > 0 \end{cases}$$

т.о. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 > 0$, м.к. $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (м.е. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$, $x+y \geq 0$, $x^2+y^2 \geq 0$) и $1 > 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{y} \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

(1) и (2): $x=y$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5$$

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} \right)^2 = \left(2\sqrt{(x+1)(6-x)} - 5 \right)^2$$

$$\begin{aligned} x+1 + 6-x &= 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 &\geq 0 \text{ (4)} \end{aligned}$$

$$(3) : 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 5 = 4(x+1)(6-x) - 20\sqrt{(x+1)(6-x)} + 25$$

$$t = \sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$-2t + 5 = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 - 48t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$D = 9^2 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 72 = 9$$
~~$$D = 81 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 121 - 72 = 49$$~~

$$\begin{cases} t = \frac{\sqrt{81+9}}{4} \\ t = \frac{-\sqrt{81+9}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(6-x)} = 4,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases}$$~~

~~$$6 + 5x - x^2 = 3$$~~

~~$$6 + 5x - x^2 = 2,25$$~~

 \Leftrightarrow

~~$$24 + 20x - 4x^2 = 81$$~~

~~$$-x^2 + 5x + 5 = 0, \quad \Leftrightarrow$$~~

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - 5 = 0 \\ 4x^2 - 20x + 57 = 0 \\ x^2 - 5x - 5 = 0 \end{cases}$$

 \Leftrightarrow

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0, \text{ МК.} \end{cases}$$

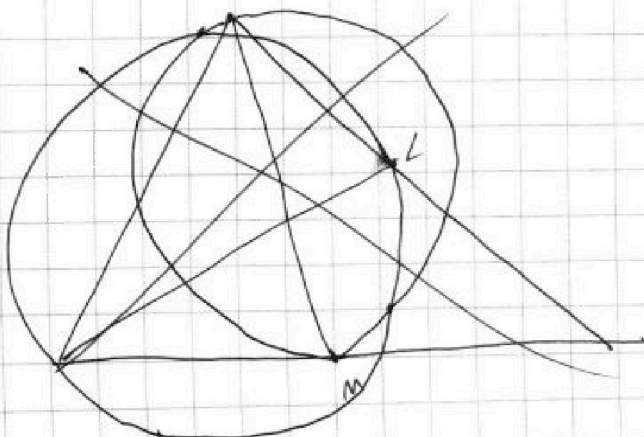
$4x^2 - 20x + 57 = 0$ не имеет корней (МК $D = 20^2 - 57 \cdot 4 = 400 - 57 \cdot 8 = -58 < 0$, т.е. $D < 0$ и корней нет)

$$x^2 - 5x - 5 = 0$$

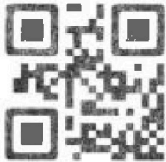
$$D = 25 + 5 \cdot 4 = 45$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{45} + 5}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{45} + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2} \\ x = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 очевидно, имеет смысл рассматривать только повороты на $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° (по часовой стрелке).
Заметим, что всего у нас 81 точка. Рассмотрим
каждый способ выбрать две точки, чтобы их сделать
белыми, без учета поворотов (далее мы будем называть
это ситуацией А; а с учетом поворотов — ситуацией В).

Рассмотрим пары (пара В)
Пара белых точек, которая центрально симме-
трична, тогда в ситуации А существует еще одна
пара белых точек, получаемая из пары С (помощью
поворота, а в ситуации В эти пары различны (Зуб. 1))

В ситуации А ровно 80/2 пар центрально симметричных
точек (симметрична отн. центру доски), т.к. можно ровно 80
способами выбрать одну из точек, а другая определена
однозначно, причем каждая пара получена дважды
(80 способов выбрать одну из точек, т.к. одна из 81 точек
совп. с центром доски, и если выбрать ее белыми, то
центрально симм. еще точка — это она сама, т.е. в паре белых
точек эти точки совпадают, что не удовлетворяет условию
в ситуации А)

(1) Такая пар ровно 40 (пар центрально симм.
точек), а в ситуации В, такая пар 20 — т.е. (Зуб. 1) (т.е.
каждая пара из ситуации В в ситуации А подсчитана
дважды) и каждая пара из ситуации А соответствует ровно
одной паре из ситуации В (это очевидно)

Каждая пара не центрально симм. точек из
ситуации В очевидно ровно 4 раза подсчитана в ситуа-
ции А, а каждая пара из ситуации А соответствует
(т.е. «научалась») ровно одной паре из ситуации В. В-Зуб 2

В ситуации А ровно $\frac{C_{81}^2}{2} - 40$ пар (т.к. не центрально
симметричных клетками (т.к. все способы выбрать пару
 C_{81}^2 , а из них 40 — пары центрально симм. точек). Значит
в ситуации В ровно $(\frac{C_{81}^2}{2} - 40) / 4$ пар не центрально симм.
точек, т.е. их $(81 \cdot 80 / 2 - 40) / 4 = 80 \cdot 40 / 4 = 800$ — это (2)

Из (1) и (2) следует, что в ситуации В ровно $800 + 20 = 820$ различных
пар точек \Rightarrow в ситуации В ровно 820 способов выбрать две белые точки

Ответ: 820
различных пар / ②. центр. симм. — центрально симметричные

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x-y \leq 1 \\ 1 \geq y-x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Черновики}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 2 \geq 2x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y-x \geq -1 \\ 1 \geq x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-3y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases}$$

√2 Замечу $C \subseteq A \subseteq B$ означает, что $\begin{cases} A \subseteq B \\ C \subseteq A \end{cases}$. Замечу $C \subseteq A \subseteq B$ значит, что $\begin{cases} C \subseteq A \\ A \subseteq B \end{cases}$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 3y-x \geq -3 \\ 1 \geq 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 4 \geq 2x+2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 3x-y \geq -1 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 4x \geq -3 \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 2 \geq x+y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \geq x \geq -\frac{3}{4} \\ 1 \frac{1}{4} \geq y \geq -1 \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq 1 \frac{1}{4} \end{cases}, \text{ т.е. } 3x+4y \leq$$

Заметим, что

$$\sqrt{3}. A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n, B = m^2n + mn^2 - 3mn.$$

$$\text{Если } A = 13p^2: (m+n)^2 - 9(m+n) = 13p^2$$

$$\begin{cases} B = 75q^2: (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \\ mn(m+n-3) = 45q^2 \end{cases}$$

Если $p=3$, то $(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 9 = 117$. \varnothing , т.к. если одна скобка $= 9$, то другая тоже $\Rightarrow p \neq 3 \Rightarrow (m+n, m+n-9) \neq 1$.

Если $k=1$: то $m+n-9=13$, $m+n=22$. то 22 — не нач. кв. \varnothing .

Если $k=13$: $m+n-9=1$, $m+n=10$ \varnothing . не кратна 13.

$$\text{Если } \begin{cases} A = 45q^2 \\ B = 13p^2 \end{cases}: \begin{cases} (m+n)(m+n-9) = 45q^2 \\ mn(m+n-3) = 13p^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 45:3 \Rightarrow mn:3 \text{ и } m+n-9:3 \Rightarrow \\ \Rightarrow mn:3 \Rightarrow 19, \text{ т.к. } \\ 45q^2:9 \text{ или } 5q^2 \\ q=3. \end{matrix}$$

$$\frac{13+13}{2} = 10.$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0. \quad 169 - 120 = 49.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \leq \pm\sqrt{3} - 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$x = -1: a_0; a_1; a_2 \quad \text{area } d = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3} - 1: 3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3} \quad a_3$$

$$\begin{aligned} ((\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3})^2 &= (3+1-2\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2 = 4^2 = 16. \quad a_4. \quad \frac{3 \cdot 3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2. \\ 3 \cdot (\sqrt{3}-1)^2 &= 3 \cdot (4-2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}. \\ &4 - 3\sqrt{3}. \\ &8 - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x - 2 = (x - (\sqrt{3}-1))(x - (\sqrt{3}+1)) = x^2 - ((\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1))x$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-1)(-\sqrt{3}-1) &= -2. \\ &2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \quad &4y + 8x \\ &3 \leq x - 3y \leq 3 \\ &-1 \leq 3x - y \leq 1 \\ &-1 \leq x - y \leq 1. \\ &'' \\ &-2 \leq 4x - 2y \leq 2 \\ &-4 \leq 4x - 4y \leq 4 \\ &4y - 4x \geq -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4 \geq 3y - x \geq -3 \\ &4 \geq 2x + 2y \geq -4 \\ &8 \geq 4x + 4y \geq -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y + 2x \\ &8 + 4y \\ &8 + 4 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &\geq 2y \geq -6 \\ 3 &\geq y \geq -3 \\ 9 &\geq 3y \geq -9 \\ 30 &\geq 3y \geq -9 \\ 12 &\geq 2x \geq -12 \\ 96 &\geq 8x \geq -96 \\ 12 &\geq y \geq -12 \\ 12 &\geq 2x \geq -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \geq x \geq -4 &\Rightarrow 8x + 4y \leq 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 + 12 = 20 \\ &\leq 8x + 4y \leq \\ &8 \geq 8x + 4y \geq -108 \\ &8 + 4 \cdot 12 = 8 + 48 = 56. \\ &x = 11. \end{aligned}$$

~~108~~
~~12~~
~~3~~
~~12~~
~~3~~
~~12~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$ $\{a_n\}$ - арифм. прогрессия из условия; d - шаг этой арифм. прогрессии

$$a_3 = 3x+3; \quad a_5 = (x^2+2x)^2; \quad a_9 = 3x^2$$

$$\begin{cases} a_5 - a_3 = 2d \\ a_9 - a_5 = 4d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2+2x)^2 - (3x+3) = 2d \\ 3x^2 - (x^2+2x)^2 = 4d \end{cases}$$

$$3x^2 - (x^2+2x)^2 = 2 \cdot ((x^2+2x)^2 - (3x+3))$$

$$3x^2 - x^4 - 4x^2 - 4x^3 = 2 \cdot (x^4 + 4x^2 + 4x^3 - 3x - 3)$$

$$-x^4 - 4x^3 - x^2 = 2x^4 + 8x^3 - 6x - 6 + 8x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x=2: \quad \begin{matrix} 16 & + & 4 \cdot 8 & + & 3 \cdot 4 & - & 2 \cdot 2 & - & 2 & = & 0 \\ -1 & & 1 & - & 4 & + & 3 & + & 2 & - & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 3(x+1) \quad a_3 \\ -x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ 3x^3 + 3x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ 0 \\ - 2x - 2 \\ \\ - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 2x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$(x^3 + 3x^2 - 2)(x+1) = x^4 + x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2) = 0 \Rightarrow 4+4 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 12 \quad x = \frac{\pm 2\sqrt{5}-2}{2} = \pm\sqrt{5}-1$$



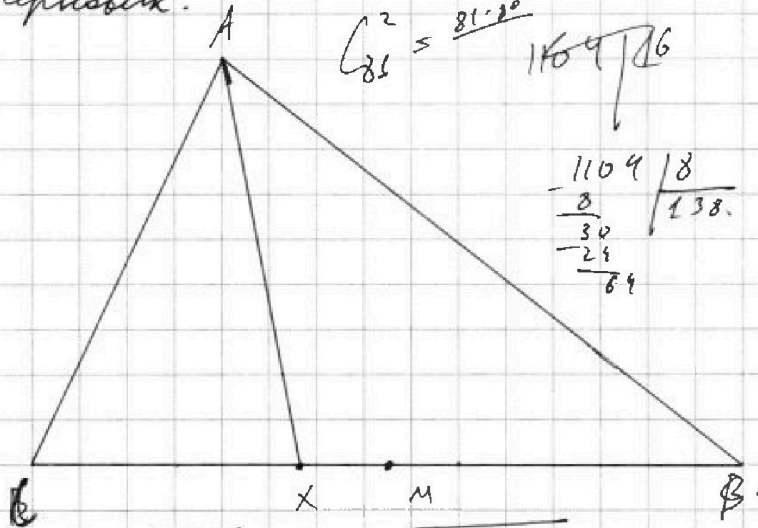
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

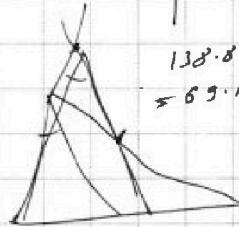
Черновик.



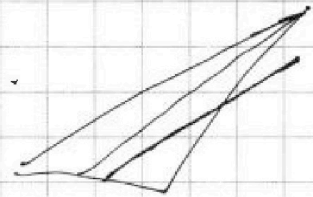
$$S_{\triangle}^2 = \frac{81 \cdot 20}{16} = 104 \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1104 \overline{) 8} \\ \underline{8} \\ 30 \\ \underline{24} \\ 64 \end{array}$$

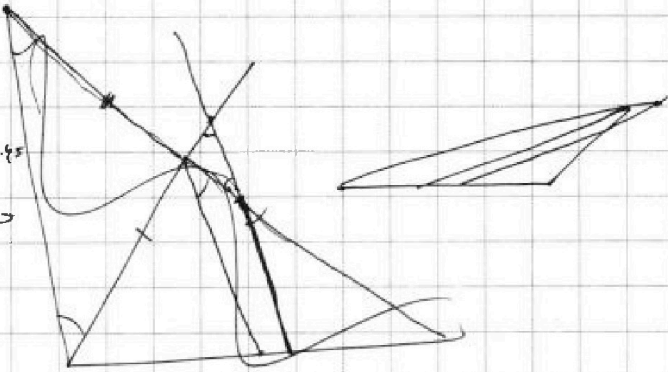
$$\frac{1104}{16} = 69 \frac{1}{2} = 3 \cdot 23$$



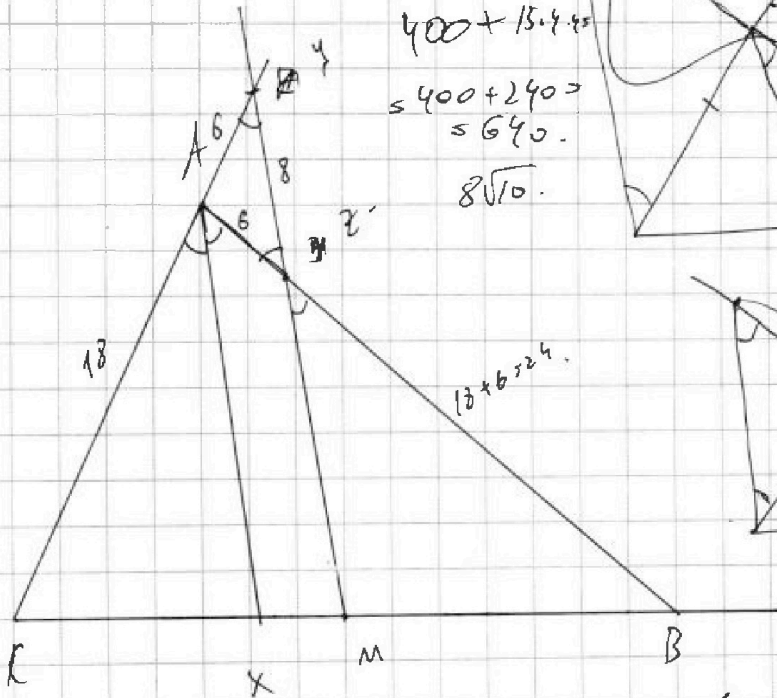
$$138 \cdot 85 = 69 \cdot 16$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^2 + 5x^2 = \sqrt{y^2} + y^2 - \sqrt{x+5y^2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 400 + 13 \cdot 4 \cdot 5 \\ = 400 + 240 \\ = 640 \\ 8\sqrt{10} \end{aligned}$$



$$1104 / 2$$

$$25 - 3 \cdot 4 = 25 - 12 = 13$$

$$\begin{aligned} 900 + 324 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3} &= 1224 - 60 \cdot 25 \quad | 224 = 60 \cdot 25 \\ &= 102 \quad | 224 - 120 = 1104 \end{aligned}$$

$$400 - 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot (100 - 54 \cdot 4)$$

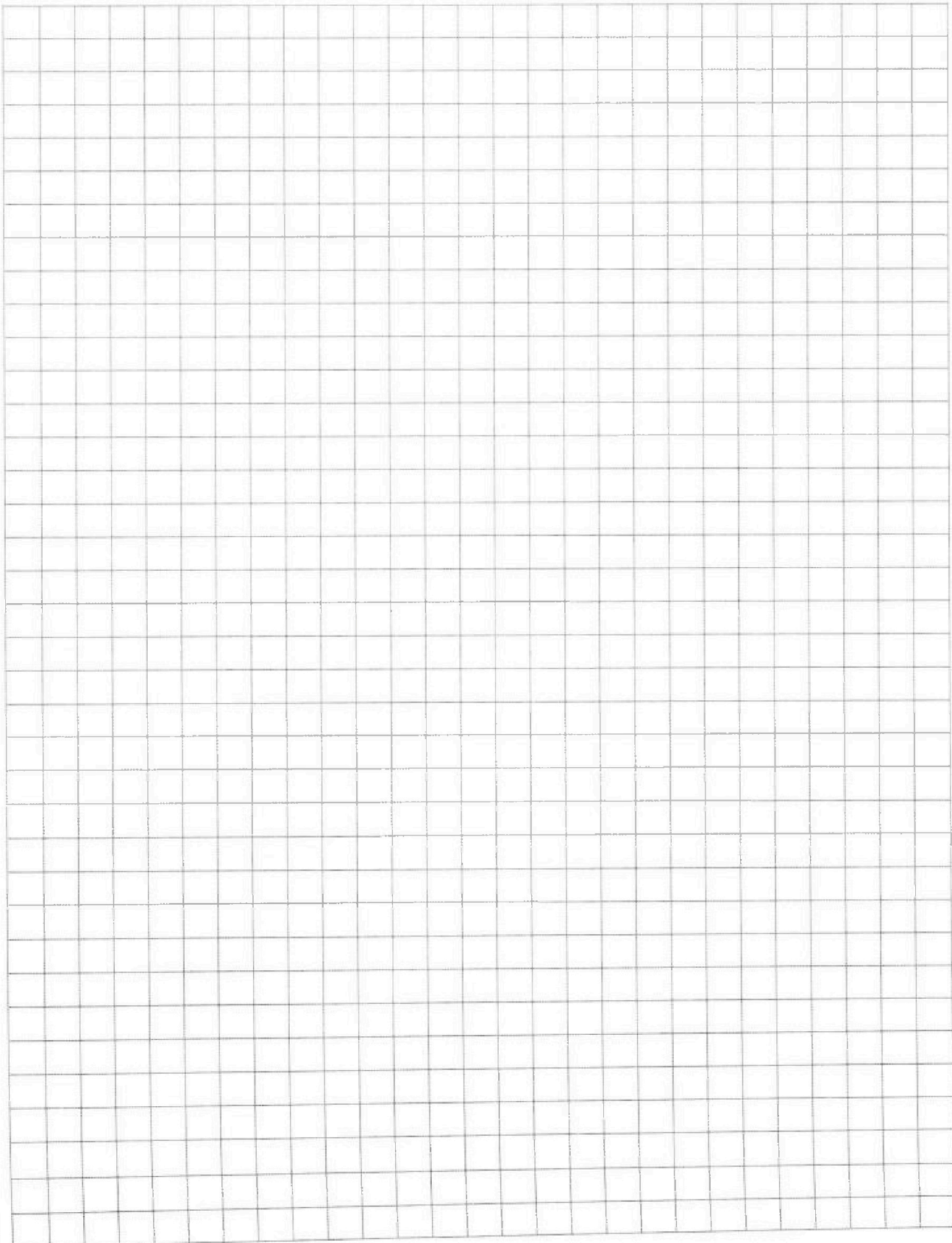


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





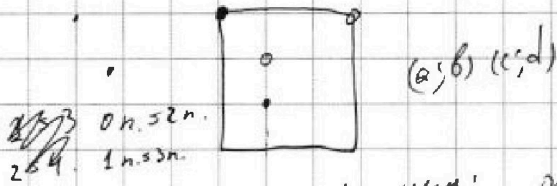
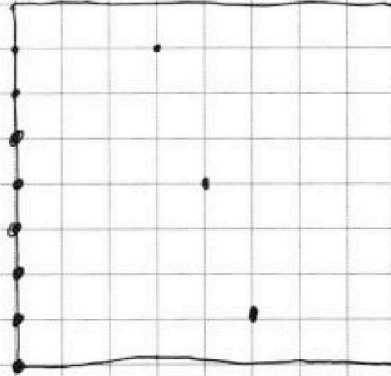
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

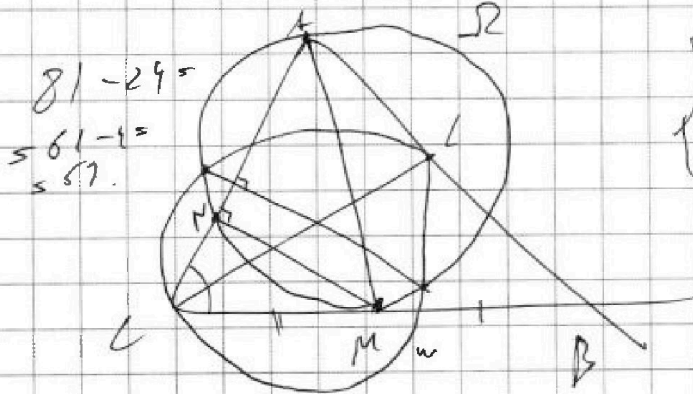
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$



у. умм: ~~81~~ ~~81~~ 80 способов, пер. по 2 раз.
40 см. - каждый месяц
пер. по 2 раз с учетом пер. по
не у. умм: ~~81~~ ~~81~~ - пер. по 2 раз
выбора пер. по 2 раз, раз. способов.
 $\frac{C_{81}^2}{2} = 40$ - пер. по 2 раз, выдраны где
пер. по 2 раз, что они не у. умм.

$$\frac{C_{81}^2}{2} = 40 \quad \frac{81 \cdot 80}{2} = 40 \quad \frac{81 \cdot 40 - 40}{4} = \frac{40 \cdot 80}{4}$$

$$800 + 20 \cdot \frac{40}{2} = 820$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad x = y$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$