



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $d$  - разность прогрессии, тогда

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2 \quad | :2 \\ (x^2 + 2x)^2 + 4d = 3x^2 \end{cases}$$

$$6x + 6 - (x^2 + 2x)^2 = 2(x^2 + 2x)^2 - 3x^2$$

$$2x + 2 = (x^2 + 2x)^2 - x^2$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$x = -1$  - корень

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | : x+1$$

$$2(1 - 2x^2) \cdot (x+1) = (x+1)(x-1)x^2$$

$$(x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3} - 1$$

Ответ:  $-1; \pm\sqrt{3} - 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

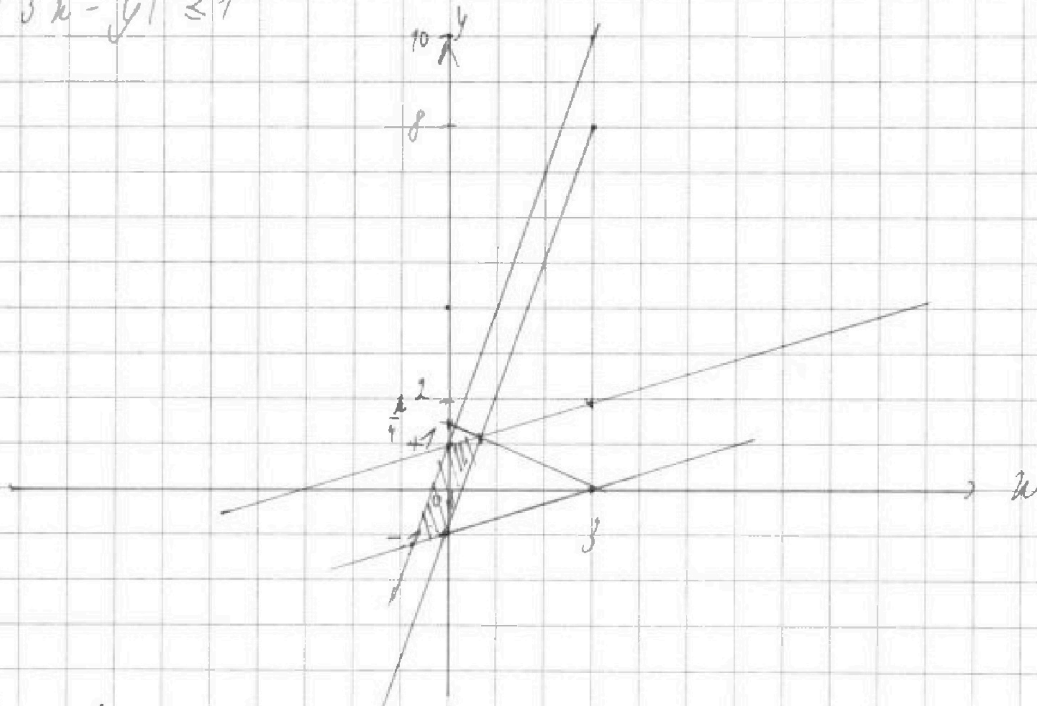
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $4y - 8x = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{4}$

Найдем множество точек на координатной плоскости

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 7 \end{cases}$$



Для прямой  $y = -2x$  параллельно находим  
ту прямую при которой она еще пересекает множество  
и пересекает ось  $Oy$  в наибольшей точке  $(0; \frac{k}{4})$

прямая  $y = -2x + \frac{k}{4}$  проходит через  $n$  пересечения

$y = 3x - 7$  и  $y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{k}{3} + 1$  точка

пересечения  $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ ;  $\frac{5}{4} = -2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{k}{4} \Rightarrow$

$k = 8 \quad k = 11$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - \varphi m - \varphi n = (m+n-\varphi)(m+n) = 13p^2$$

13 - простое число

$$m+n-\varphi < m+n \quad \text{при} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

2) несколько случаев

неподходит:  $(m+n=10); A=10$

неподходит:  $m+n=22 \neq p^2$

неподходит:  $m+n = 13(m+n-\varphi)$

$$\varphi = \frac{12(m+n)}{13} \geq 2$$

$m+n-\varphi$	$m+n$
1	$13p^2$
13	$p^2$
$p$	$13p$
$p^2$	13

подходит  $m+n=13$

$$p^2=4; p=2$$

$$A=52$$

$$B = m^2n + mn^2 - \varphi mn = (m+n-\varphi)mn = 10mn = 5 \cdot 5 \cdot \varphi \cdot q^2$$

2)  $\varphi=2$  число простое  $75q^2 \mid 70$ , не

онд  $\varphi$  равно на 10 м.к. равно 10 м.н

$$m \cdot n = 5 \cdot 2 \cdot 3; mn = 13 \Rightarrow m = 10 \quad \begin{matrix} \varphi=2 \\ \text{или} \end{matrix}$$

$$n = 3 \quad n = 10$$

Ответ:  $(10; 3); (3; 10)$

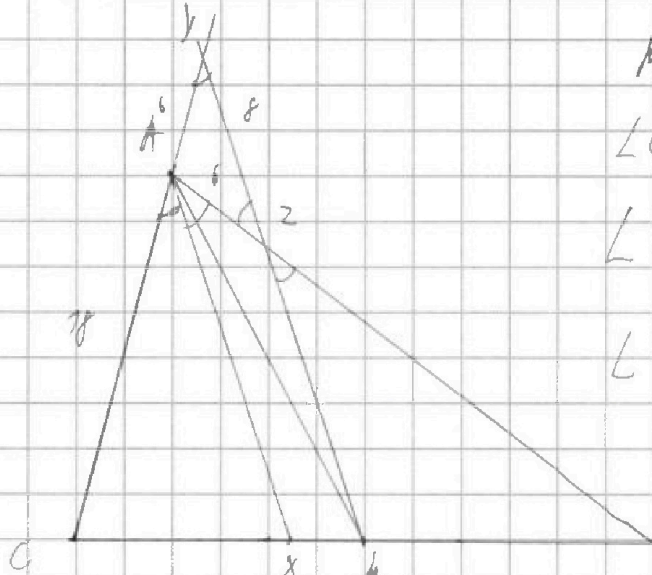


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т. к.  $AX \perp BC$   
 $\angle CAX = \angle BAX = \alpha$   
 $\angle CAX = \angle CYZ$  как  
 соответственные  
 $\angle BAX = \angle AZY$  как  
 накрест лежащие  $\Rightarrow$   
 т. к.  $AY = AZ = 6$

$\triangle AYZ$  - равнобедренный

По т. косинусов:

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}; \quad \cos \angle CAB = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$$

По т. Менелая ( $\triangle ABC$ ;  $YH$ -прямая)

$$\frac{b}{2A} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1 \Rightarrow b \cdot 2 = 6 \cdot \frac{(1+6)}{6} \Rightarrow 24 \Rightarrow AB = 60$$

По т. косинусов ( $\triangle ABC$ )

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC} = \sqrt{18^2 + 60^2 + \frac{2}{9} \cdot 18 \cdot 60} = \sqrt{324 + 3600 + 240} = \sqrt{4164}$$

Ответ:  $\sqrt{4164}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

из второго уравнения  $x, y \geq 0$ , а также  $x \neq y$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y}$$

пусть  $\sqrt{x+1} = a$ ;  $\sqrt{6-y} = b$ , тогда

$$b^2 + a^2 = 57; \quad ab = \sqrt{6+5x-y-x^2}$$

$$\cancel{a+b} + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} = \cancel{x} ab$$

$$a-b + 5 = 2ab$$

$$a+b + (a-b)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b = -2 \\ a-b = 1 \end{cases}; \quad a-b$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} = -2$$

$$x+1 = 1 - 2\sqrt{6-y} + 6-y$$

$$x+1 = 4 - 4\sqrt{6-y} + 6-y$$

$$2x - 5 = -2\sqrt{6-y}$$

$$2x-9 = -4\sqrt{6-y}$$

$$y-2 = \sqrt{6-y}$$

$$4x^2 - 36x + 81 = 16 \cdot 6 - 9y$$

$$y - 5x + x^2 = 6 - y$$

$$4x^2 - 32x + 81$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 73$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

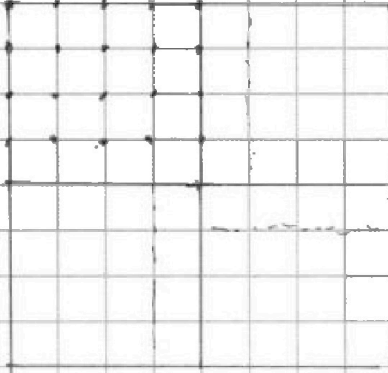


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Если одна из крайних точек  
точка в центре, то вторая  
может быть на любой  
линии в одной из центр  
секторов (на рисунке

представлен один из секторов; при повороте  
на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  сектора выстраиваются, т.к.

квадрат симметричен повороту ровно на  $90^\circ$ , поэтому  
каждая точка может быть в одной из секторов!

4.5 (20)

2) для каждой из точек можно рассмотреть в один  
секторе  $20 \cdot 19 = 380$

3) точки в вершиях смежных секторов

$$20 \cdot 20 = 400$$

↑  
каждо  
по 10

4) в диагональных секторах

$$\frac{20 \cdot 20}{2} = 200$$

$$200 + 400 + 400 = 1000$$

Ответ: 1000



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x + 2 = x^4 + 2x^2(2x + 2)$$

$$(1 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x + 1) = (x - 1) \cdot 2x^2$$
$$= (x + 1)(x - 1) \cdot 2x^2$$

$$1 - 4x^2 = x^3 - x^2$$
$$x^3 - 5x^2 + 4x$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^3 - 2$$

$$x^3 (x + 1) (x^2 + 2x + 2)$$

~~x~~





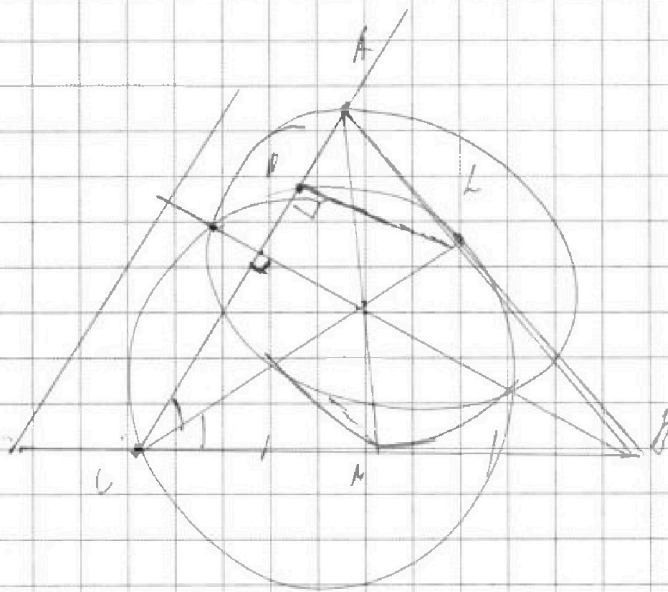
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



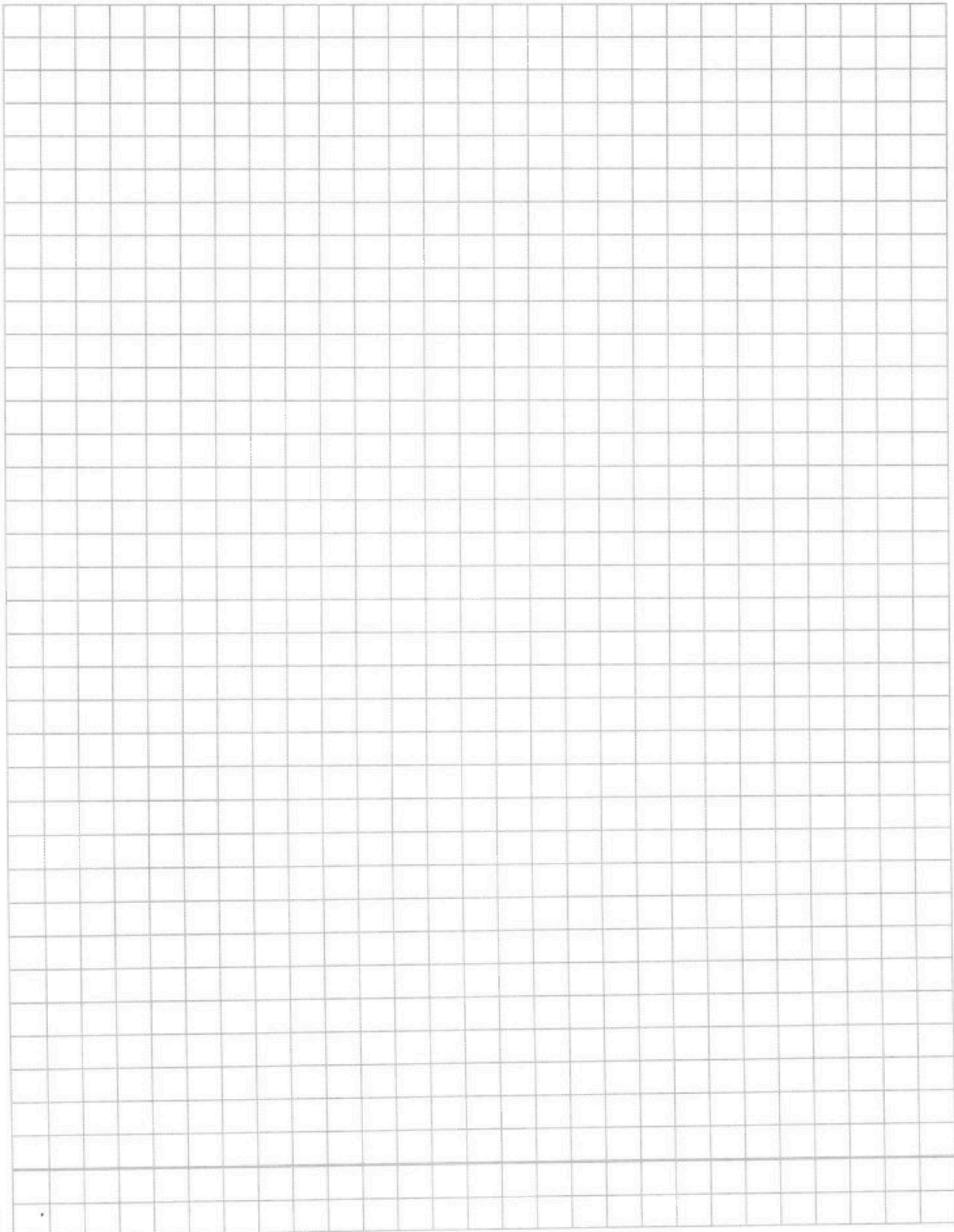


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{h}{a} = \frac{h}{a}$   
 $\frac{h}{b} = \frac{h}{b}$   
 $\frac{h}{c} = \frac{h}{c}$   
 $\frac{h}{a+b} = \frac{h}{a+b}$   
 $\frac{h}{a+b+c} = \frac{h}{a+b+c}$

$\frac{BM}{MC} = \frac{OM}{MI}$   
 $\frac{AZ}{ZC} = \frac{AZ}{ZC}$

$\frac{d}{c} = \frac{c}{d} = \frac{h + \frac{b^2}{a}}{a}$   
 $\frac{b+c}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2c-d}{c}$   
 $2 - \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b}$   
 $2 = a \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b} \right)$   
 $2 = a \frac{2b+d}{b}$

$\frac{b^2}{b} + \frac{(b+c-a) - 4a^2}{b}$   
 $2b^2 + 2b^2 = a^2b + 2ba$

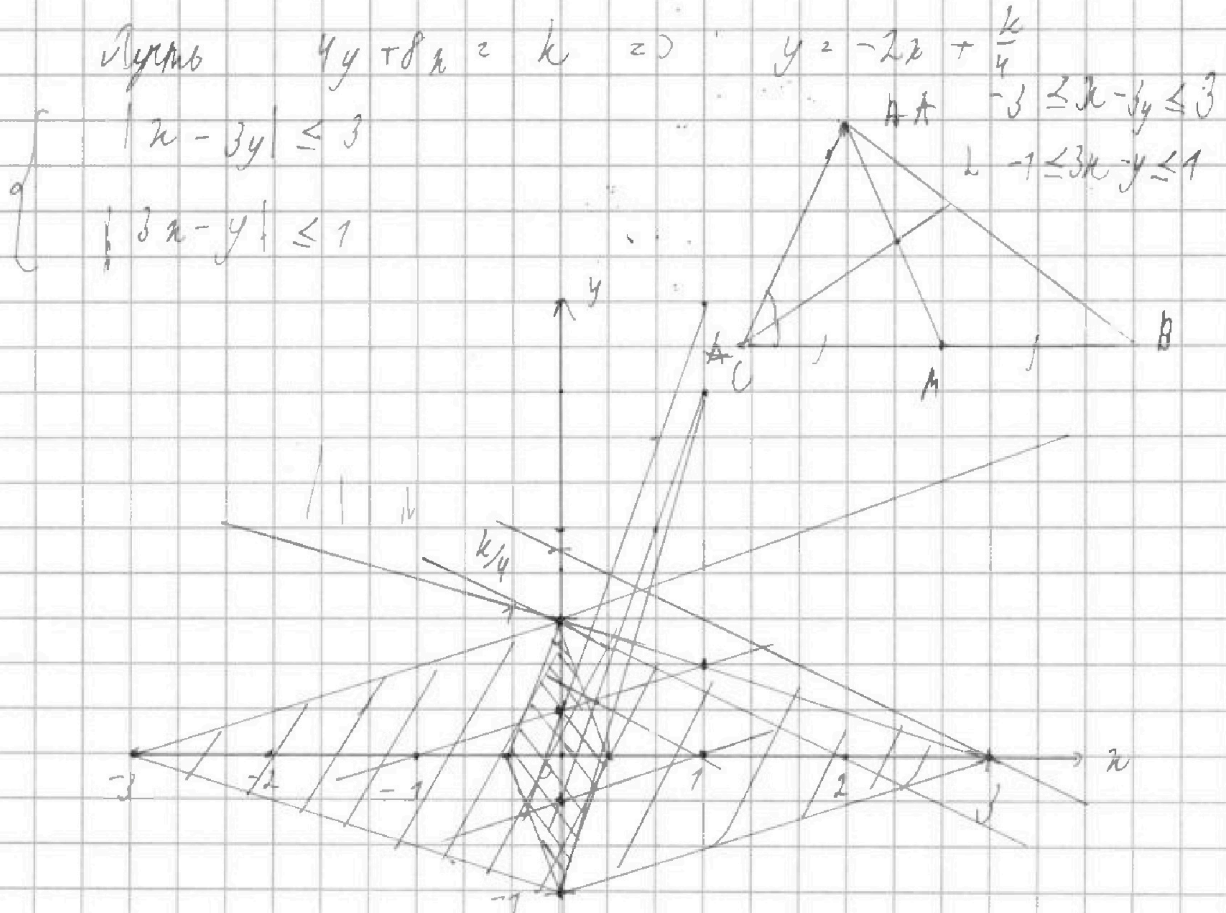


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На координатной плоскости нарисованы множество  
 удовлетворяющие первую и вторую уравнению  
 системы где их пересечение — множество второго  
 уравнения  $8x = 8$   $k = \frac{3}{4}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

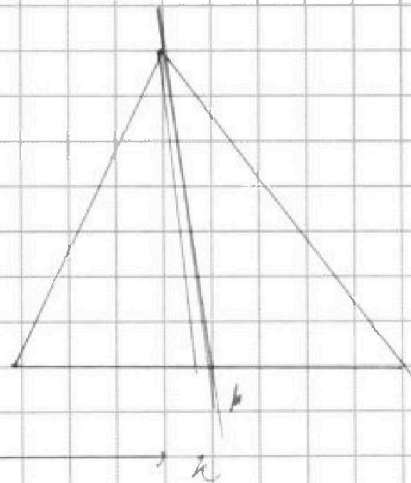
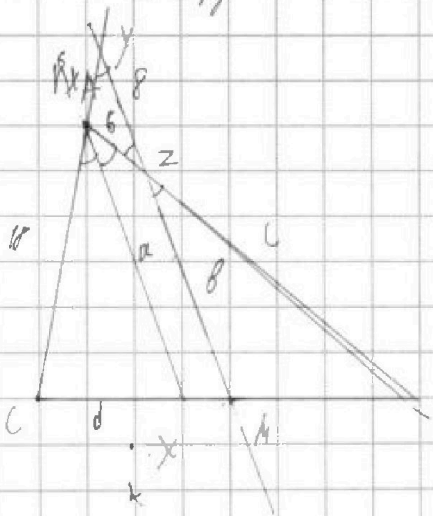
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $4y + 8x = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{4}$   
 Нарисовать множество  $\begin{cases} |x - by| \leq 3 \\ |bx - y| \leq 1 \end{cases}$  на

координатах ~~или~~ плоскости



$78$   
 $78+11$

$$A = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n-9)(m+n) = 78 \cdot 2$$

$$B = m \cdot n \cdot (m+n-9) = \quad m+n = (m+n-9)/-1$$

$$k^2 - k - 11 = 0$$

$$k^2 + k - 11 = 0$$

