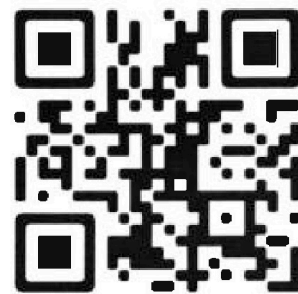




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle \overset{CAN}{CEM}) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0.$$

$$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(9t^2 - 9) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2.$$

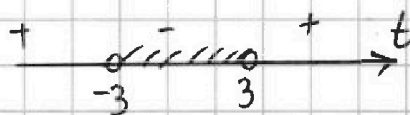
Чтобы ур-е имело 2 различных корня, нужно:

$$36 - 4t^2 > 0 \quad | :4$$

$$(t-3)(t+3) < 0$$

$$9 - t^2 > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$t^2 - 9 < 0$$



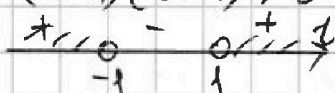
По т. Виетна:

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$$

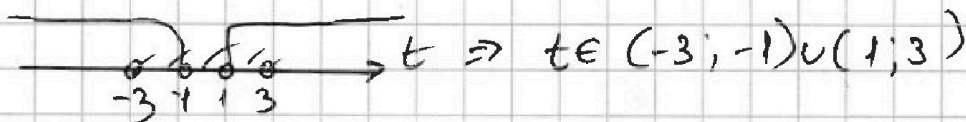
$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow 9t^2 - 9 > 0 \quad | :9$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$



Пересечение:



$$\text{Ответ: } (-3; -1) \cup (1; 3)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b=2. \quad a=12+2=14. \quad p=2.$$

Проверка:

$$14-2=12.$$

$$(14+2)^2+3(14+2)=19 \cdot 82^4$$

$$16^2+3 \cdot 16=19 \cdot 8 \cdot 16$$

$$256+48=152$$

$$304=304 - \text{подходит, верно.}$$

$$\text{Ответ: } a=14, b=2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12

$$\begin{cases} a - b = 12 & a = 12 + b. \end{cases}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

p - простое, a, b - ?

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(b+12+b)(12+b+b+3) = 19p^4$$

$$(2b+12)(2b+15) = 19p^4$$

$$2(b+6)(2b+15) = 19p^4 \Rightarrow$$

$$19p^4 : 2, \text{ т.к. } 19 \not\div 2, \text{ то } p^4 : 2, p \cdot p \cdot p \cdot p : 2.$$

Единственное простое число $: 2 \rightarrow 2$.

$$2(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2^4 \quad | : 2$$

$$(b+6)(2b+15) = 19 \cdot 2^3 = 152$$

$$2b^2 + 15b + 12b + 90 - 152 = 0.$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0.$$

$$D = 27^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-62) = 1225 = 25 \cdot 49 = 5^2 \cdot 7^2 = 35^2$$

$$b_1 = \frac{-27 + 35}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b_2 = \frac{-27 - 35}{4} < 0 \text{ - противоречие, } b \in \mathbb{N}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle MDA = \angle MAC$ (как соответств. при параллельн.
 $KM \parallel AN$ и сек. DC). \Rightarrow

$$\angle BAN = \angle MAC.$$

$$2\angle CAN = \angle A.$$

$$\cos \angle A = -\frac{3}{4}.$$

Пл. косинусов для ΔABC .

Пусть $AK = KB = AC = x$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A.$$

$$64 - 36 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$36 = 5x^2 + 3x^2 = 8x^2$$

$$36 = 8x^2$$

$$x^2 = \frac{36}{8}$$

$$x = -\sqrt{\frac{36}{8}} \text{ — не подходит.}$$

$$x = \sqrt{\frac{36}{8}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$AB = 2x = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $3\sqrt{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

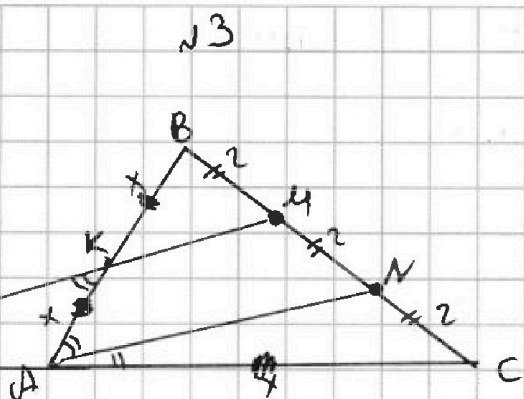
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$

$M, N \in BC$

$BM = MN = NC$



Рассмотрим $\triangle DMC$.

$KM \parallel AN$

$AN \parallel DM, MN = NC \Rightarrow AN$ — средняя линия \Rightarrow

$KM \cap AC = D$

$AD = DC$

$AB = CD$

То же т. Менелая для $\triangle ABC$ и сек. KM

$BC = 6$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{MC}{BM} \cdot \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AD}{CD} = 1$$

Найти:

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{BK}{AK} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

AB

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{BK}{AK} = 1 \Rightarrow BK = AK$$

$AB = CD$

$\angle AKC = \angle ACB \Rightarrow AK = AC = BK = AD$

$\triangle DAK$ — равнобедренный \Rightarrow

$\angle ADK = \angle DKA$

$\angle DKA = \angle KAN$ (накр. ветт. при пря-

мых $KM \parallel AN$ и сек. AK)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$23 + n = 2n - 2$$

$$25 = n$$

$$n = 25$$

25 деревьев на острове

Ответ: 25



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n - деревьев №6
Введём граф. Вершины - деревья. Кол-во дорог, выходящих из одной вершины, назовём степенью K . Дороги - это рёбра. Посчитаем кол-во рёбер: $\frac{5+6+9+7+n-4}{2}$, $n-4$ - суммарная степень всех остальных вершин, т.к. они по 1. складываем все степени и делим на 2, т.к. каждое ребро посчитано 2 раза.

$$\frac{23+n}{2} \leftarrow \text{рёбер.}$$

Посчитаем по другому. По условию из любой другой деревни можно проехать в другую, т.е. граф связный, и при этом по единственному маршруту, т.е. в графе нет циклов. Значит, этот граф - дерево. Воспользуемся известным про дерево (которое легко доказывается по индукции удалением вершины).

В дереве с n вершинами $n-1$ рёбер. Значит,

$$\frac{23+n}{2} = (n-1) \cdot 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x - y < 1$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$1 + x - y - 1 = 1 \rightarrow x = 1 + y$$

$$2(1 + y) - 2y - (1 + y)^2 - y^2 = 1$$

$$-2y - 2y^2 = 0$$

$$y + y^2 = 0$$

$$y = 0 \quad y = -1$$

$$x = 1 \quad x = 0$$

$$(1; 0) \quad (1; 0), (0; -1)$$

$$\text{Ответ: } (1; 0), (0; -1).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ x - x + y + x = 2 \end{cases} \quad \cancel{x=2y}$$

$$x - y - 1 > 0$$

$$x - y \geq 1.$$

$$1 - (x - y - 1) =$$

$$= 1 - x + y + 1 = 2 - x + y.$$

$$2 - x + y = 1.$$

$$1 = x - y$$

$$x - y = 1, \quad y = x - 1.$$

$$x = 1 + y$$

$$2(1+y) - 2y - 1 - 2y - y^2 - y^2 = 1.$$

$$\cancel{2} + \cancel{2y} - \cancel{2y} - \cancel{1} - 2y - y^2 - y^2 = \cancel{1}$$

$$2y + 2y^2 = 0.$$

$$y + y^2 = 0$$

$$y = 0 \quad y = -1.$$

$$x = 1 \quad xy = 0.$$

$$\underbrace{(1; 0)} \quad \underbrace{(0; -1)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4} + \sqrt{0} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2$$

(1; -1) - подходит

В остальных случаях:

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \leq 1 \text{ и } \sqrt{1-|x-y-1|} \leq 1, \text{ значит}$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} \leq 2.$$

Равенство достигается только, если:

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2=1 \\ 1-|x-y-1|=1 \end{cases}$$

1) $x-y \geq 1$.

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2=1 \\ 1-x+y+1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2=1 \\ 2y-2x+2=0 \end{cases}$$

$$-x^2-y^2+2=1.$$

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2=1 \\ y-x+1=0 \end{cases}$$

$$-x^2-y^2=-1$$

$$0 \leq x^2+y^2=1.$$

м.к. $x, y \in \mathbb{R}$, и $x^2, y^2 \geq 0$, то

$$\begin{matrix} x^2=1 & y^2=0 & x^2=0 \\ y^2=0 & x^2=0 & y^2=1. \end{matrix}$$

$$y = x - 1.$$

$$2x - 2(x-1) - x^2 - (x-1)^2 = 1.$$

$$2x - 2x + 2 - x^2 - x^2 + 2x - 1 = 1.$$

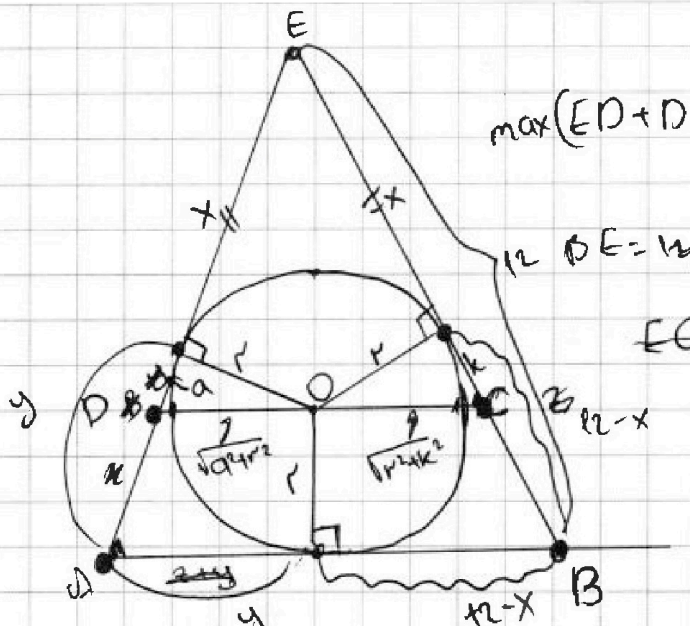


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\max(ED + DO) - ?$$

$$EC \cdot BE = ED \cdot EA.$$

$$ED \cdot EA = EC \cdot EB$$

$$ED \cdot EA = EC \cdot 12.$$

$$\max(x + a + \sqrt{a^2 + r^2}).$$

$$(x + a) \cdot (x + y) =$$

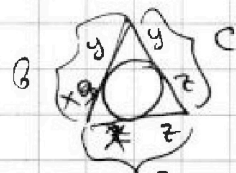
$$\frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{\sqrt{b^2 + r^2}} = \frac{x + a}{x + b} \quad x + a = \frac{\sqrt{a^2 + r^2}(x + b)}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

$$(x + a) \cdot (x + y) = (x + b) \cdot 12.$$

$$\max(x + a + \sqrt{a^2 + r^2}) =$$

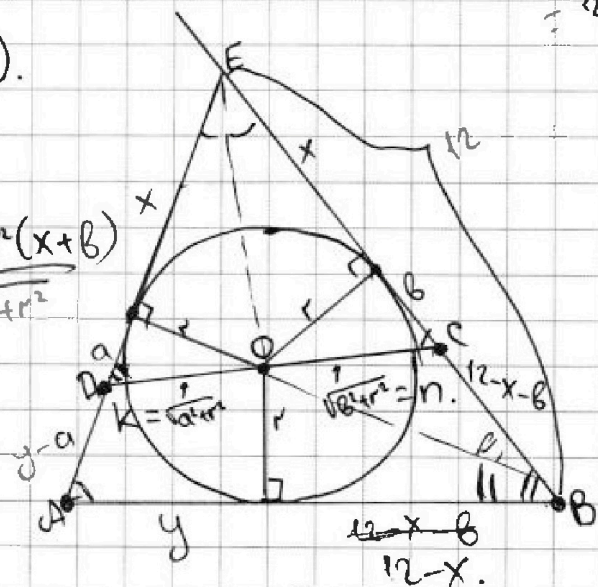
$$= \frac{\sqrt{a^2 + r^2}(x + b)}{\sqrt{b^2 + r^2}} + \sqrt{a^2 + r^2}$$

$$x = \frac{x + y + 12 - y - 12 + x + b}{2} = \frac{2x + b}{2}$$



$$y = \frac{a + b + c - a}{2}$$

$$= \frac{x + z + y + y - x - z}{2} = 2y$$



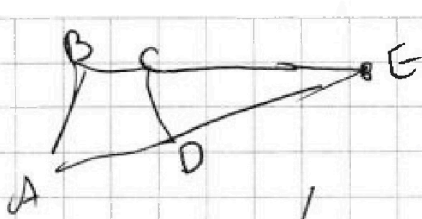


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2x - 2y - x^2 - y^2 = a^2$$

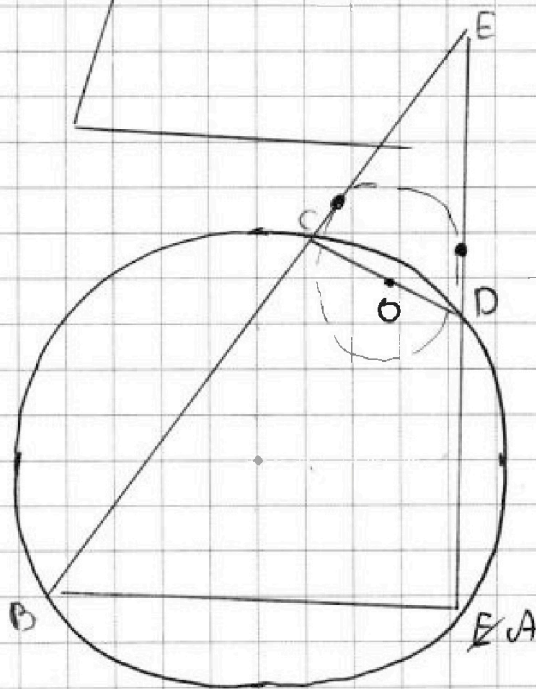
$$y - x + 2 = b^2$$

$$x^2 - y^2 + 4 = a^2 + 2b^2$$

$$b^2 \leq 1 \rightarrow b = 1$$

$$x - y \geq 1$$

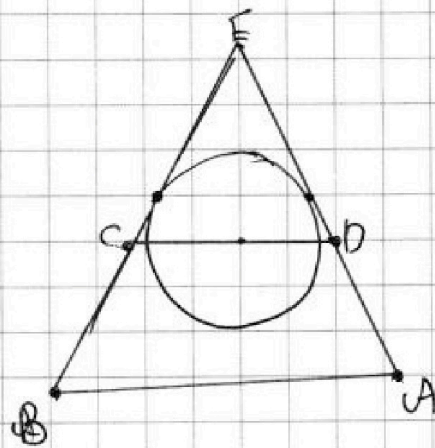
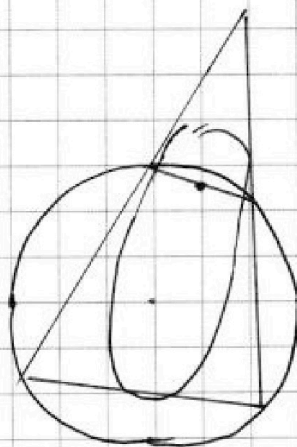
$$y - x \leq -1$$



$\max(ED + DO) - ?$

$$BE = 12$$

$$y - x + 2 = 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4} + \sqrt{0} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2 \quad - \text{подгос.}$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1.$$

$$1) \quad x - y \geq 1$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 - (x - y - 1) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ 1 - x + y + 1 = 1 \end{cases}$$

$$y - x =$$

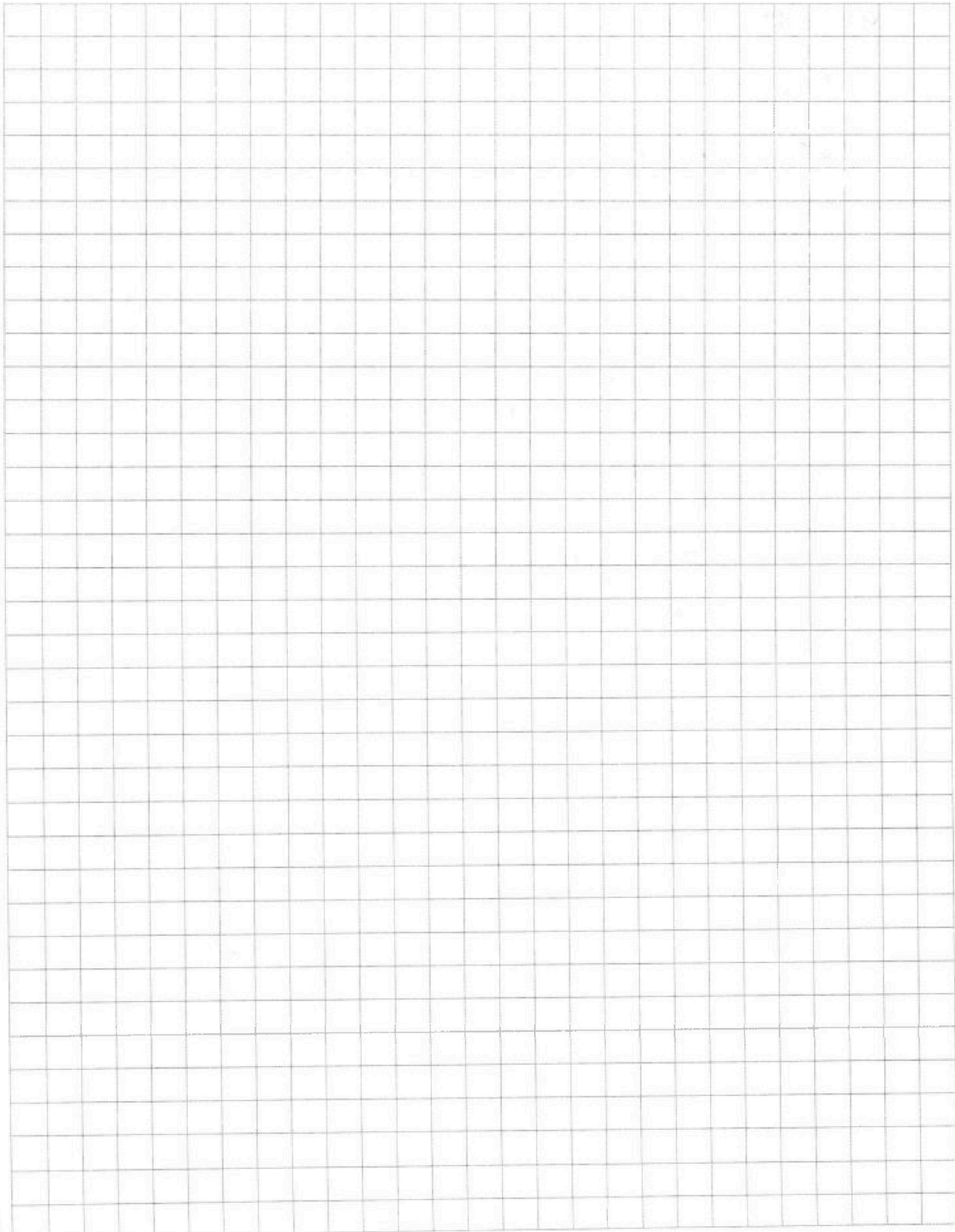


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

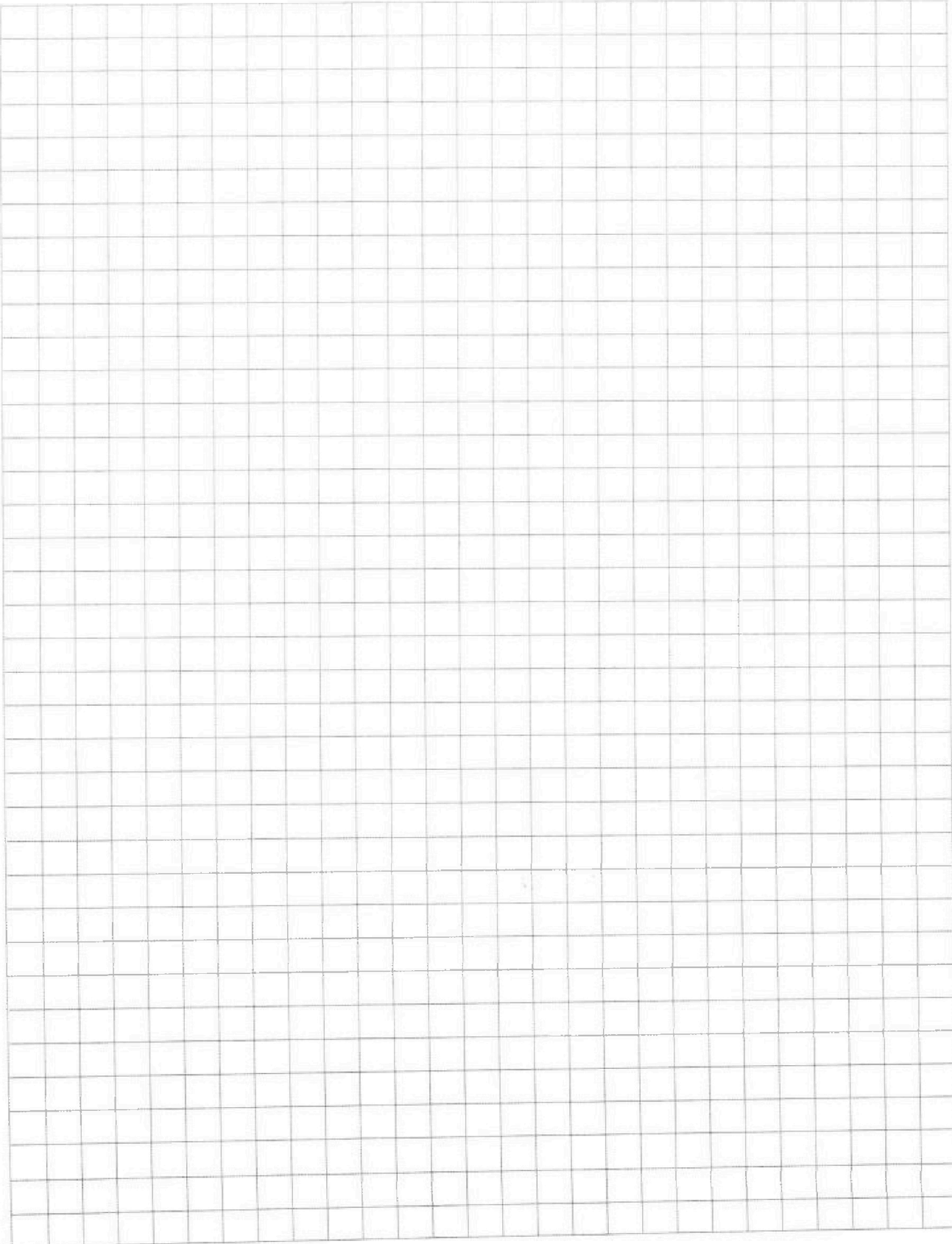
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-2x^2 + 2x = 0 \quad | :2$$

$$-x^2 + x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x \cdot (x-1) = 0$$

$$x=0, \quad x=1.$$

$$y=1 \quad y=0.$$

Проверка: $x=0, y=1.$

$$\sqrt{2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0^2 - 1^2} + \sqrt{1 - |0 - 1 - 1|}$$

$\sqrt{1-2}$ - противоречие, не имеет смысла.

$$x=1, y=0 \quad (1; 0)$$

$$\sqrt{2 - 0 - 1 - 0} + \sqrt{1 - |1 - 0 - 1|} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2.$$

$$2) \quad x - y < 1$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \\ x + x - y - 1 = 1 \rightarrow x = 1 + y. \end{cases}$$

$$x + x - y - 1 = 1 \rightarrow x = 1 + y.$$

$$2(1+y) - 2y - (1+y)^2 - y^2 = 1$$

$$2 + 2y - 2y - 1 - 2y - y^2 - y^2 = 1$$

$$-2y - 2y^2 = 0.$$

$$y + y^2 = 0.$$

$$y(y+1) = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2.$$

$$|x-y-1| \geq 0$$

$$1 - \underbrace{|x-y-1|}_{\geq 0} \leq 1.$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} \leq 1.$$

Если есть преобразования, то все они делаются с учётом ограничений

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 0$$

$$1-|x-y-1| \geq 0$$

Пусть $\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} > 1$

$$2x-2y-x^2-y^2 > 1.$$

$$-x^2+2x-1-y^2-2y-1+2 > 1.$$

$$-(x-1)^2 - (y+1)^2 > -1 - (-1)$$

$$0 < (x-1)^2 + (y+1)^2 < 1$$

т.к. сумма квадратов.

* $y+1 \in \mathbb{Z}$, т.к. $y \in \mathbb{Z}$, $(y+1)^2 \in \mathbb{Z}$, $(y+1)^2 \geq 0 \rightarrow$

$(y+1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$. ← неравенство выполн.

А если $(x-1)^2 \geq 1$, (1, 2, 3, ...), т.к. $(x-1)^2 \in \mathbb{Z}$, то

нер-во не выполн. Значит, $(y+1)^2 = 0 \rightarrow y = -1$

$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$.

Подставим:

$$\sqrt{2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 1^2 - (-1)^2} + \sqrt{1 - |1 + 1 - 1|} = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2(x-y)+x^2+y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|}$$

> 1

λ min 0.

λ max = 1.

$$2(x-y) + x^2 + y^2 > 1$$

$$2(x-y) + x^2 + y^2 \geq 1$$

$$2x - 2y + x^2 + y^2 \geq 1$$

$$-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 \geq 1$$

$$-(x-1)^2 - (y+1)^2 \geq -1$$

перестав:

$$0 \leq (x+1)^2 + (y+1)^2 < 1$$

\uparrow $\sqrt{1}$ \uparrow

$\neq 1$ $??$ \neq

$$2x - 2y + x^2 + y^2 + 1 - 1 + 2 > 1$$

x^2

$$2x - 2y - x^2 - y^2 - 1 - 1 + 1 + 1 =$$

$$= -(y^2 + 2y + 1) - (x^2 - 2x + 1) + 2 =$$

$$= -(y+1)^2 - (x-1)^2 + 2 > 1$$

$$-(y+1)^2 - (x-1)^2 > -1$$

$$0 \leq (y+1)^2 + (x-1)^2 < 1$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$0 + 1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

$$y + 1 = 0 \rightarrow x - 1 = 0$$

$y = -1$
 $x = 1$

$y + 1 = 1??$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2 - \sqrt{1-|x-y-1|} \quad |^1_2$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 4 - 4\sqrt{1-|x-y-1|} + 1 - |x-y-1|$$

$$4 \cdot \sqrt{1-|x-y-1|} \in \mathbb{Z}$$

$$x-y \geq 1$$

$$x \geq y$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Z} \quad \wedge \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = k, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\wedge \mathbb{Z} \quad \wedge \mathbb{Z}$$

$$a^2 + b^2 + 2\sqrt{ab} = k^2$$

$$\wedge 2\sqrt{ab} \in \mathbb{Z}$$

$$x-y \geq x^2+y^2 \geq 0$$

$$\wedge a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

$$x-y \geq x^2+y^2+1 \geq 1$$

$$2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\max(1-0) = 1$$

$$x-y > x^2+y^2 \geq 0$$

$$x-y > 0$$

$$x \geq y+1$$

$$2x-2y-x^2-y^2 - 1 - 1 + 2 =$$

$$= -(x+1)^2 - (y+1)^2 + 2$$

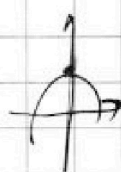
$$2x-2y-x^2-y^2-1-1+2 =$$

$$= -x^2+2x-1-y^2-2y-1+2 = -(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 \leq$$

$$-y^2 - (y+1)^2 + 2$$

$$k \leq -y^2 - y^2 - 2y + 1 = -2y^2 - 2y + 1$$

$$-2 \cdot \frac{1}{4} + 2 + 1 = \frac{1}{2} + 2 = 2.5$$



$$y_{\text{в.}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2(x-y)+x^2+y^2} \quad x \geq y.$$

$$2(x-y) \geq x^2+y^2 \geq 0$$

$$|x-y-1| \leq 1.$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = 4 - 4\sqrt{1-|x-y-1|} + 1 - |x-y-1|$$

$$\sqrt{1-|x-y-1|} - \text{целое.}$$

$$x-y \geq 1.$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} - \text{целое.}$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = a^2$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = a^2.$$

$$1-x+y+1 = b^2.$$

$$1-|x-y-1| = b^2.$$

$$-2x+2y+4 = 2b^2.$$

$$-x^2+4-y^2 = a^2+2b^2.$$

$$\begin{cases} 2x-2y-x^2-y^2 = a^2 \\ 1-x+y+1 = b^2 \end{cases} \quad | \cdot (-2) \quad 2x \geq$$

$$-2+2x-2y-2 = -2b^2$$

$$2-x^2+2-y^2 = a^2+2b^2.$$

$$a^2+2b^2+x^2+y^2 = 4.$$

$$2x-2y-x^2-y^2 = a^2. \quad 2b^2-x^2-y^2 = a^2.$$

$$1-x-y-1 = b^2$$

$$x-y = b^2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{x+y+12-y-12+x}{2} = x.$$

$$\frac{k}{n} = \frac{x+a}{x+b} \quad \max(x+a+k).$$

$$(x+a) \cdot (x+y) = (x+b) \cdot 12.$$

$$\frac{k}{n} = \frac{12}{x+y}.$$

$$x^2 + ax + ay$$

$$x^2 + xy + xa + ay = 12x + 12b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{a^2+r^2}}{\sqrt{r^2+b^2}} = \frac{x+a}{x+b} \quad \max(x+a+\sqrt{a^2+r^2}). \\ (x+a)(x+y) = (x+b) \cdot 12 \end{array} \right.$$

$$p = \frac{x+b}{2} \quad \frac{2x+2y+2 \cdot (12-x)}{2} = x+y+12-x = 12+y.$$

$$S = (12+y) \cdot r$$

$$S = \sqrt{(12+y) \cdot (12+y-y-x) \cdot (12+y-12) \cdot (12+y-y-12+x)} =$$

$$= \sqrt{(12+y) \cdot (12-x) \cdot x \cdot y} = (12+y) \cdot r$$

$$(12-x) \cdot x \cdot y = (12+y) \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{xy(12-x)}{y+12}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 12 + b$$

$$(12+b)^2 + 2(12+b) \cdot b + 3a + 3(12+b)$$

$$(12+b)^2 + 2b(12+b) + 3(12+b) + 3b = 19 \cdot 2^4$$

$$144 + 24b + b^2 + 24b + 2b^2 + 36 + 3b + 3b = 19 \cdot 2^4$$

$$3b^2 + 54b + 180 - 304 = 0$$

$$3b^2 + 54b - 124 = 0$$

$$D = 27^2 + 372 =$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \wedge 2 \\ \hline 48 \\ + 6 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 144 \\ + 36 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \overline{) 12} \\ \underline{4} \\ 14 \\ \underline{27} \\ 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 46 \\ 114 \\ 119 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 304 \\ - 180 \\ \hline 124 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times 3 \\ \hline 372 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \\ + 372 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ - 27 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \\ + 372 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 62 \\ 8 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \overline{) 25} \\ \underline{100} \\ 225 \\ \underline{225} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$16^2 + 48 =$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 256 \\ + 48 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ 8 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 46 \\ 114 \\ 119 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 256 \\ 48 \\ \hline 304 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + gt^2 - g = 0.$$

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$D = (4\sqrt{2}t)^2 - 4(gt^2 - g) = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0. \quad | :4$$

$$x_1 \cdot x_2 = gt^2 - g > 0 \quad | :g$$

$$t^2 - 1 > 0$$

$$(t-1)(t+1) > 0$$

$$9 - t^2 > 0$$

$$t^2 - 9 < 0$$

$$(t-3)(t+3) < 0$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 19 \\ \times 8 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152 \\ -90 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$a - b = 12, \quad a = 12 + b$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = (a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$(12+2b)(12+2b+3) = 19p^4$$

$$2(6+b)(12+2b+3) = 19p^4 \Rightarrow p^4 : 2 \Rightarrow p : 2$$

Редуктив. = 2.

$$2(6+b)(12+2b+3) = 19 \cdot 2^4$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 19 \\ \times 8 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$(6+b)(12+2b+3) = 19 \cdot 2^3 = 19 \cdot 8 = 152.$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 729 + 8 \cdot 62 \\ 62 \\ \times 8 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 496 \\ + 729 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \overline{) 25} \\ 100 \\ \hline 225 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 9 \\ \hline 22 \end{array}$$

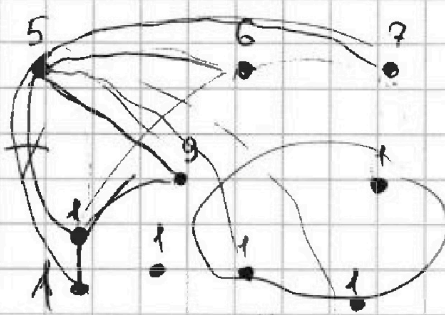


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

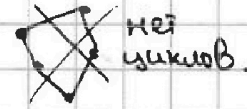


П деревень.

граф связный

$n-4$

$$\frac{11}{19} = \frac{20}{20}$$



$$\text{гориз} = \frac{5+6+9+9+\dots+n}{2} = \frac{23+n}{2}$$

$$= \frac{5+6+9+9+n-4}{2} = \frac{23+n}{2} \text{ гориз.} \quad \frac{23+n}{2} = 26$$

n -нечетн.

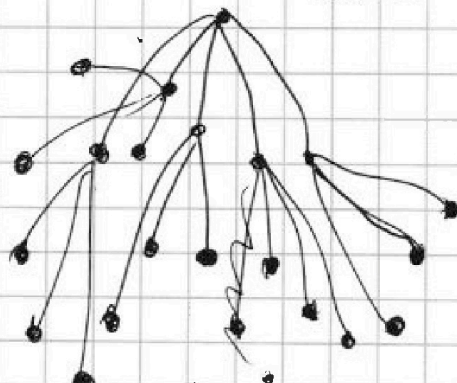
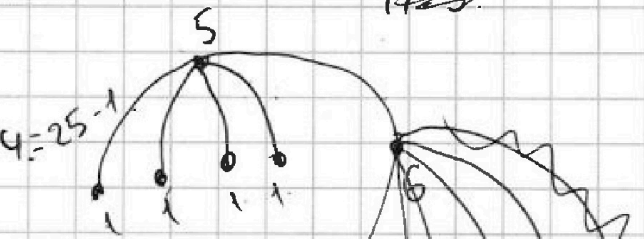
$$\frac{23+26}{2}$$

$$\frac{23+25}{2} = \frac{48}{2} = 24 = 25-1$$

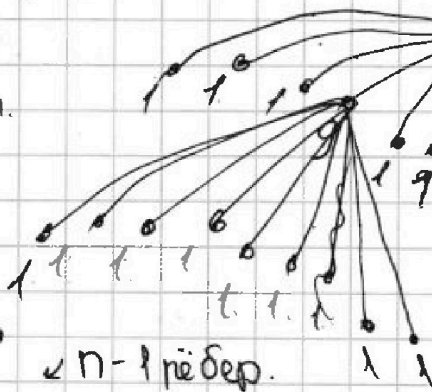
$$n=25. \quad n-1.$$

$$24 = n-1.$$

$$24 = 25-1.$$



$n+1$ вершина
 n ребер



$n-1$ ребер.

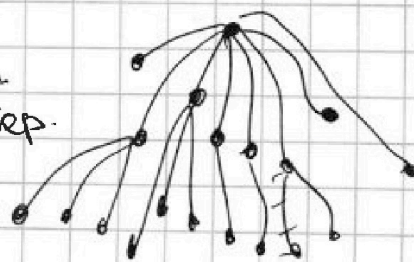
$$n=25.$$

n вершин
 $n-1$ ребер.

$$\frac{23+n}{2} = n-1+1/2$$

$$23+n = 2n-2.$$

$$25 = n$$



n вершин
 $n-1$ ребер.

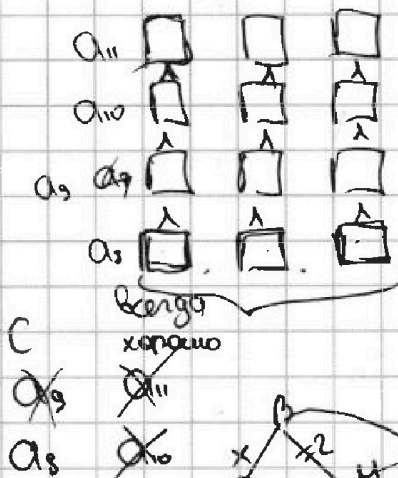
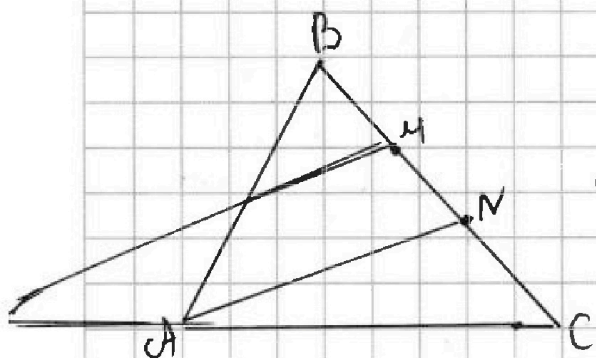


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

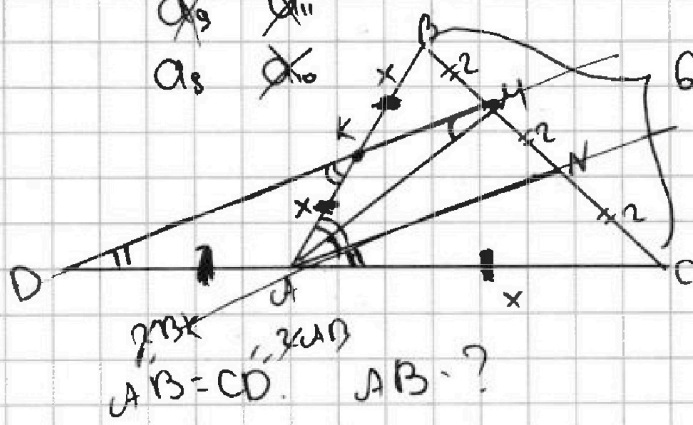
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



11 угловиков
 $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$



$$\cos(2 \angle CAM) = -\frac{3}{4} \quad \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BK}{AK} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$$

$$= \cos \angle A = -\frac{3}{4}$$

$$6^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{BK}{AK} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$36 = 4x^2 + x^2 + 3x^2 = 8x^2 = 36$$

1; 0.

$$\sqrt{2-0-1-0} + \sqrt{1-1-0}$$

0; -1

$$\sqrt{0+2-0-1} + \sqrt{1-1-0-1-1}$$

-1; 0.

$$\sqrt{+2+0-1-0}$$

$$\sqrt{-2+0-1-0}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+a + \sqrt{a^2 + \frac{xy(12-x)}{y+12}} \quad \swarrow \text{max.} \quad \text{max}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{\sqrt{b^2+r^2}} = \frac{12}{x+y} = \frac{x+a}{x+b}$$

$$\frac{12(x+b)}{x+y}$$

$$12\sqrt{b^2+r^2} = \sqrt{a^2+r^2} \cdot (x+y)$$

$$144(b^2+r^2) = (a^2+r^2) \cdot (x+y)^2$$

т.ч.

$$\frac{x(12-x)}{1 + \frac{12}{y}}$$

$$x+a = \frac{12(x+b)}{x+y}$$

$$a = \frac{12(x+b)}{x+y} - x = \frac{12(x+b) - x(x+y)}{x+y}$$

$$x-y \leq 1.$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = a^2$$

$$1 + x - y - 1 = b^2$$

$$\underbrace{x-y}_{\substack{N \\ 1}} = b^2 \rightarrow b^2 \leq 1 \rightarrow b^2 = 1.$$