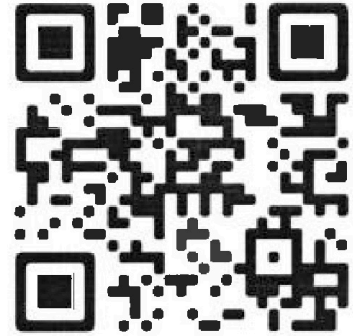


МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

Пусть  $b_n = b_1 \cdot d^{n-1}$  -  $n$ -ый член геометрической прогрессии. Тогда

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_n = b_1 \cdot d^3$$

$$x+4 = b_{10} = b_1 \cdot d^9$$

$$\sqrt{(15x+6)(x-3)} = \cancel{b_4} = b_{12} = b_1 \cdot d^{11}$$

ОДЗ:

$$(x-3)(15x+6) > 0, \quad x+4 \neq 0 \quad (b_n \neq 0), \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = d^8 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} \stackrel{\text{ОДЗ}}{=} (x-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^4 = |x-3| - \text{имеет решения } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot d^{20} \Leftrightarrow b_1^2 \cdot (d^5)^4 = (x+4) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow b_1^2 \cdot |x-3|^5 = (x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow b_1^2 = \frac{(x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} - \text{имеет решения для } b_1$$

$$\text{при } \frac{(x+4) \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.О. Имеем:

$$\begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{2}{5} \\ x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -4 < x < -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Ответ:  $x \in (-4; -\frac{2}{5}) \cup (\cancel{3}; +\infty)$ .





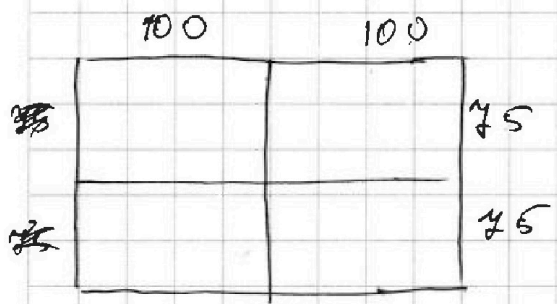
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



Заметим, что для того, чтобы однозначно определить сетку с симметрией достаточно ~~разнозначные~~ закрасить  $\frac{8}{2} = 4$  клетки в одной половине прилежательными и отразить (относительно центра горизонтально или вертикально). Вариантов симметрии

Т.о. для каждой из 3 ~~вариантов~~ вариантов ~~каждого~~ способов будет  $C_{200-150}^4 = C_{150}^4$  (где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  количество сочетаний из  $n$  по  $k$ ).

Также заметим, что если сеткой является симметричной для каких-то двух вариантов симметрии (относительно центра, горизонтально или вертикально), то он будет третьим вариантом симметрии тогда будет выполняться.

Т.е. чтобы найти количество сеток пересечения трех симметрий достаточно закр

~~Для~~ Для того, чтобы однозначно определить сетку пересечения достаточно закрасить  $\frac{8}{4} = 2$  клетки в четверти прилежательными и отразить





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

их по горизонтали, вертикали и относительно центра.

$$\begin{aligned} \text{Т.о. по-во случаев пересечения} &= \frac{C_{150,000}^2}{4} \\ &= C_{7500}^2, \end{aligned}$$

Итак считаем всего ~~случаев~~ случаев с помятой осью из формулы симметрии  $3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Пусть  $n$  - простое число, такое что  
 $(a-c)(b-c) = n^2$ , тогда

Т.к.  $a-c > b-c$ ,  $(a-c) \in \mathbb{Z}$ ,  $(b-c) \in \mathbb{Z}$  и  $n$  - простое число, то  $(a-c) = n^2$ ,  $(b-c) = 1$ , т.е.

$$c = b - 1,$$

$$a - c = n^2 \Leftrightarrow a - b + 1 = n^2 \Leftrightarrow a - b = n^2 - 1$$

Но так  $(a-b) \not\equiv 3$ , т.е.  $n^2 \not\equiv 3$ .

Заметим, что  $n$  может иметь следующие остатки при делении на 3: 0 и 1. ( $n \equiv 0, 1, 2 \Leftrightarrow n^2 \equiv 0, 1$ )

Т.е.  $n^2 - 1 \not\equiv 3$  тогда и только тогда, когда  $n^2 \equiv 3$ , т.е.  $n = 3$ .

Ищем:

$$\begin{cases} c = b - 1 \\ a - b = 3^2 - 1 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b - 1 \\ a = 8 + b \\ b^2 + b - 812 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = b - 1 \\ a = 8 + b \\ b = -29 \\ b = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -21, b = -29, c = -30 \\ a = 36, b = 28, c = 27 \end{cases}$$

Ответ:  $\{(-21; -29; -30); (36; 28; 27)\}$ .



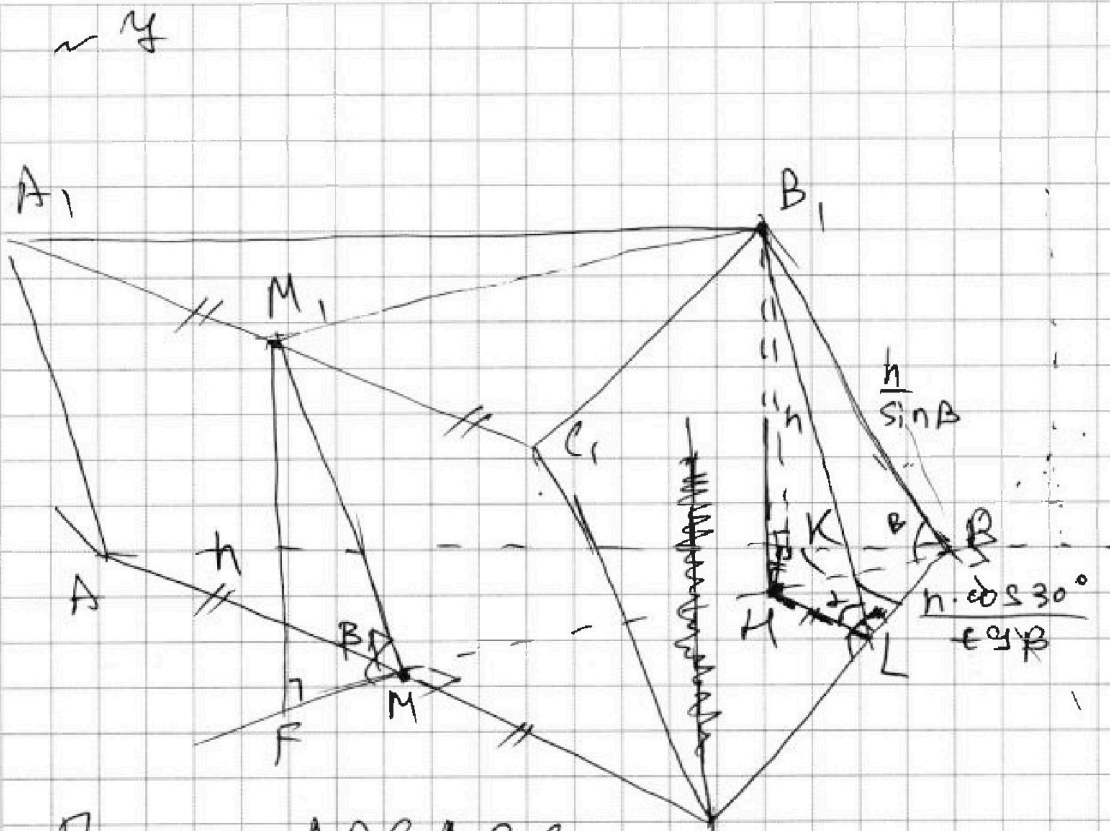


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $ABCA_1B_1C_1$  —  $\epsilon$  с высотой  $h$ ,  
 $M_1$  и  $M$  — середины  $A_1C_1$  и  $AC$  соотв.,  $B_1M = h =$   
 $= M_1F$  — высоты  $HK \perp AB$ ,  $HL \perp BC$ ,  $S_{ABO_1A_1} =$   
 $T$  тогда  $S_{CBA_1C_1} = S^2$ ,  $S_{AA_1C_1C} = 4$ ,  $\angle HLB_1 = \alpha$ ,  $\angle B_1BM = \beta$

По т. о т.  $B_1K \perp AB$  и  $B_1L \perp BC$ ,  
 $S_{CBA_1C_1} = S_{AA_1C_1C}$ ,  $AB \cdot B_1K = CB \cdot B_1L$ ,

$B_1K = B_1L$ ,  $h / \sin B_1LH = h / \sin B_1KH$ , т.е.  
 $\angle B_1KH = \angle B_1LH = \alpha$ , значит

$$HL = h / \tan \alpha = MK,$$

т.е.  $\triangle B_1LH \cong \triangle B_1MK$  по гипотенузе ( $HL = MK$  и  $HB_1$  — общая). Остаток:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I случай:  
~~LCB = 2/3 h~~  
~~LCB = 2/3 h~~  
~~LCB = 2/3 h~~  
M ∈ MB (о.е. о.е. < ABC)

$$MB = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$LB = MB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}h}{2 \sin \beta}$$

MM<sub>1</sub> = ~~h~~ sin β  
AC ⊥ MB и AC ⊥ MM<sub>1</sub>, м.е. AC ⊥ MB,  
AC ⊥ MM<sub>1</sub>, м.е.

$$S_{AA_1C_1C_2} = MM_1 \cdot AC = \frac{h}{\sin \beta} \cdot AC = \frac{2h}{\sin \beta}$$

Итого:

$$S_{AA_1C_1C_2} = u = \frac{2h}{\sin \beta}, \quad S_{AA_1B_1B_2} = \frac{2h}{\sin \alpha} = 5 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{h}{5}$$

$$B_1B_2 = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$B_1L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{5h}{4 \sin \alpha} > B_1B_2, \text{ м.е. гипотенуза}$$

и-но ~~данной~~ <sup>данной</sup> ~~гипотенузы~~ <sup>гипотенузы</sup> больше, ~~не MB~~ <sup>данной</sup> ~~гипотенузы~~ <sup>гипотенузы</sup>

$$LB = \frac{\sqrt{3}h}{2 \sin \beta}$$

~~$$B_1B_2^2 = B_1L^2 + BL^2$$~~

~~$$\frac{h^2}{\sin^2 \beta} = \frac{25h^2}{16 \sin^2 \beta} + \frac{3h^2}{4 \sin^2 \beta}$$~~

~~$$\sin^2 \beta = \frac{25}{16 \sin^2 \beta} + \frac{3}{4} (\frac{1}{\sin^2 \beta} - 1)$$~~

Т.е. не существует призмы с р/е треугольником в основании и высотой, равной 5,5 см.







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3}{16 \sin^2 \beta} - \frac{3}{4 \sin^2 \beta} = -\frac{3}{4}$$

$$+ \frac{3}{16 \sin^2 \beta} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = 4$$

$$\frac{1}{\sin \beta} = 2$$

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{2h}{\sin \beta} = 4, \quad 2h \cdot 2 = 4, \quad h = 1$$

Ответ: ~~4~~ 1.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

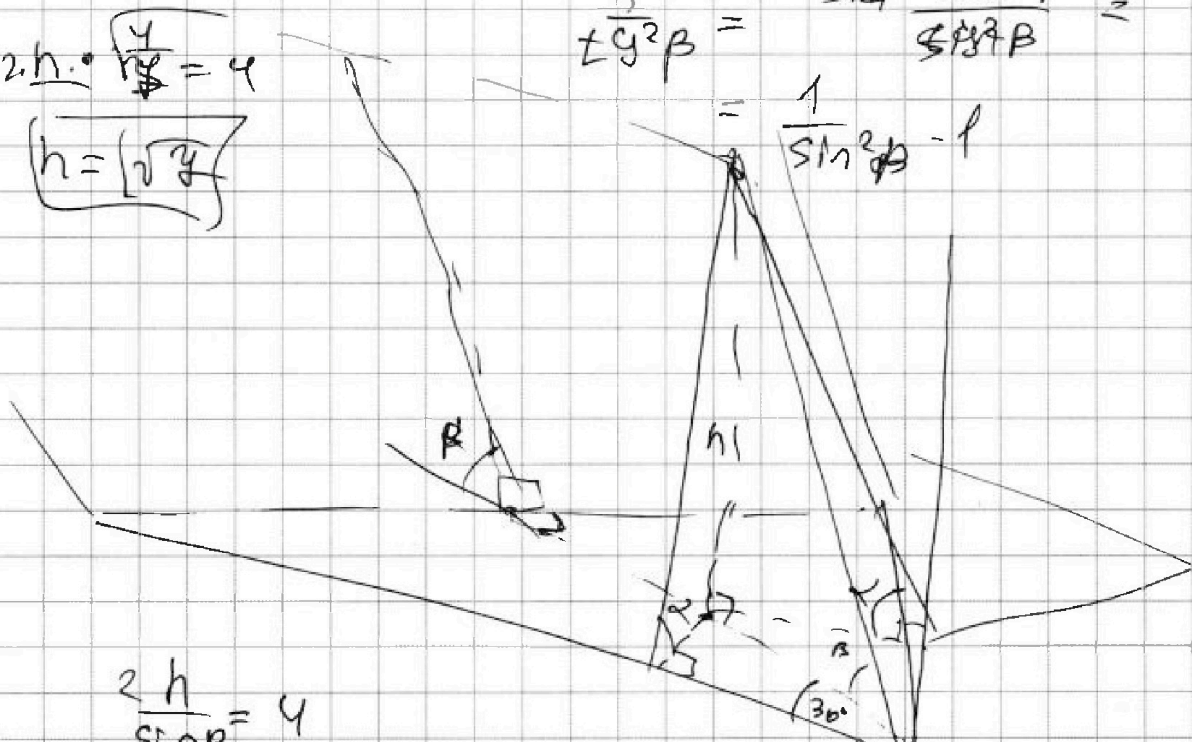
$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{3}{4 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$2h \cdot \frac{4}{h} = 4$$

$$h = \sqrt{4}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} =$$

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} - 1$$



$$\frac{2h}{\sin \beta} = 4$$

$$\frac{2h}{\sin \alpha} = 5$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{5}{4}, \quad \sin \beta = \frac{5}{4} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \sin \beta$$

$$h / \sin \alpha = \frac{5h}{4 \sin \beta}$$

$$\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 + \frac{h^2}{5^2 \cos^2 \alpha} = \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2 + \left(\frac{5h}{4 \sin \beta}\right)^2 = \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2$$

$$\frac{3}{4 \cos^2 \beta} + \frac{25}{16 \sin^2 \beta} = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

$$t = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$1 \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{4} + \frac{25}{16} t^2 = t^2$$

$$\frac{3}{4} t^2 + \frac{25}{16} t^2 = \frac{3}{4}$$

$$t^2 + \frac{25}{4} t^2 = 1$$

$$\frac{29}{4} t^2 = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{2h}{\sin \alpha} = 5$   
 $\frac{2h}{\sin \beta} = 4$

$p = p \cos^2 x + p \sin^2 x$   
 $3 \cos 2x = 4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x$   
 $\cos 3x + 6 \cos x$   
 $4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 4 \cos^3 x + 3 \cos x$   
 $4 \cos^3 x - 3 \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$   
 $3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + p$

$\sqrt{\frac{h^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{3}{4 \tan^2 \alpha}} = 2h \cdot \frac{1}{\tan \alpha}$   
 $\frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$   
 $\frac{1}{\tan^2 \alpha} =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$ ,  $a - b \neq 3$ ,  $(a - c)(b - c) = n^2, n \in \mathbb{N}$ .

просим

$a + b^2 = 820$

$a - b + 1 = n^2$

$n^2 = 3k + 1$

$b - c = 1, (a - b + 1) = n^2, n \in \mathbb{N}$

$c = b - 1$

$820 = 2 \cdot 410 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$

$(a - b + 1)^2 = a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 41$

$a - b + 1 = 9$

$a = 8 + b$

$8 + b + b^2 = 820 = 2^2 \cdot 203 = 2^2 \cdot 7 \cdot 29$

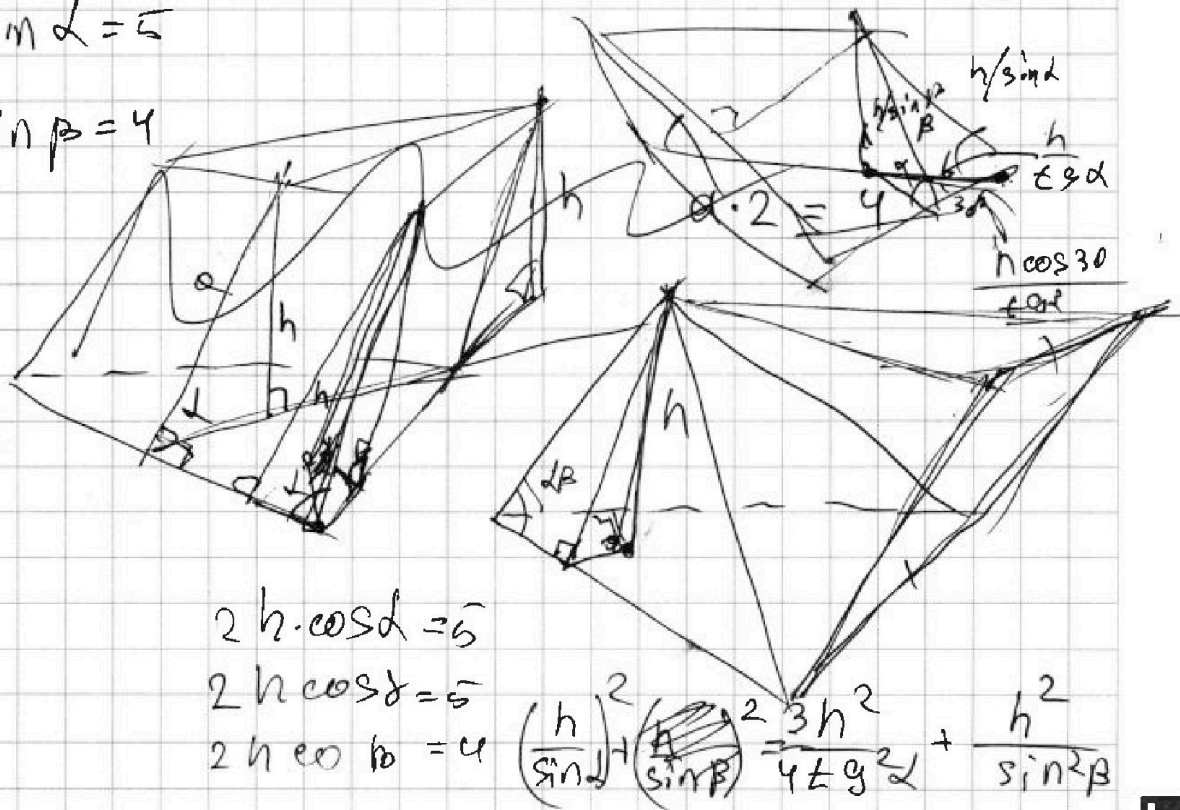
$b^2 + b - 812 = 0$

$b = 28, a = 36, c = 27$

$b = -29, a = -21, c = -30$

$2h / \sin \alpha = 5$

$2h / \sin \beta = 4$



$2h \cdot \cos \alpha = 5$

$2h \cos \beta = 4$

$2h \cos \beta = 4$

$\left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{h}{\sin \beta}\right)^2 = \frac{3h^2}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{h^2}{\sin^2 \beta}$





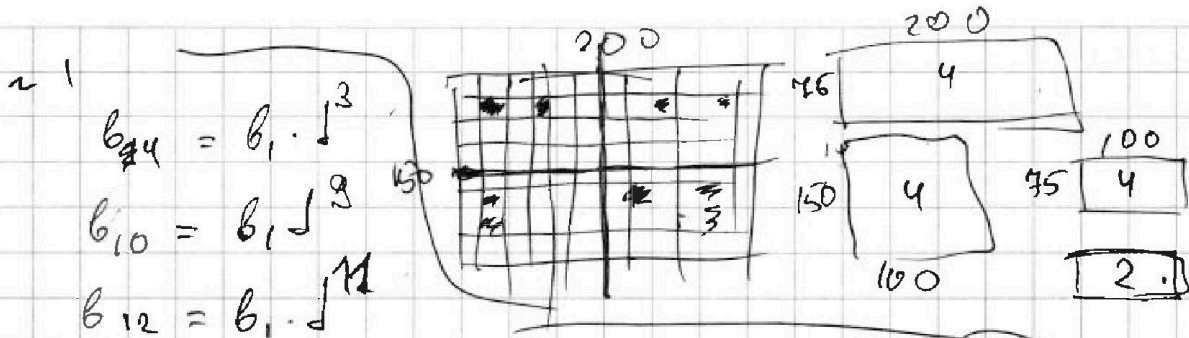


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{b_1 \cdot d^4}{b_1 \cdot d^3} = d = \sqrt[4]{\frac{(15x+6)(x-3)}{(x-3)^3}}$$

$$= (x-3)^2$$

$$d^4 = \frac{15x+6}{x-3}$$

$$15x+6 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{2}{5}$$

$$x+4 \neq 0$$

$$x \neq -4$$

$$x-3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$200 \cdot 75 = 15000$$

$$\frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$\frac{15000!}{4! \cdot (15000-4)!}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot (d^4)^2$$

$$b_1^2 = \frac{(x+4) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{|x-3|^5} \Leftrightarrow x+4 > 0 \quad x > -4$$

$$x \in (-4; \frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5}; 3) \cup (3; +\infty)$$

~ 2

$$x+4 \geq 0, \quad 5-x-3z \geq 0, \quad y-2x-x^2+z \geq 0$$

$$225-z^2 \geq 0, \quad \Rightarrow x \geq -4, \quad 3z \leq 5-x$$

$$y+z \geq -2x+x^2, \quad -15 \leq z \leq +15$$

$$t = x+1$$

$$\sqrt{t+5} - \sqrt{6-t-3z} + 6 = \sqrt{y-t^2+1+z}$$