



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

b_1 - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии, тогда

$$\textcircled{1} \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = b_1 q^9$$

$$b_1 q \neq 0, \text{ иначе } \textcircled{2} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ или} \\ x = -\frac{34}{25} \\ \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$\textcircled{2} 2 - x = b_1 q^{11}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = b_1 q^{17}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq -\frac{2}{3}, \text{ иначе } \textcircled{3} \notin \mathbb{R} \\ x \neq 2, \text{ иначе } \textcircled{2} = 0 \Rightarrow b_1 q = 0 \Rightarrow \textcircled{1} = 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$x = -\frac{2}{3} \neq 2$$

или

$$x = -\frac{34}{25} \neq 2$$

$$x \neq -\frac{34}{25}, \text{ иначе } \textcircled{1} = 0 \Rightarrow b_1 q = 0 \Rightarrow \textcircled{2} = 0 \Rightarrow x = 2 \neq -\frac{34}{25}$$

$$\left. \begin{array}{l} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \end{array} \right\} x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup [-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2) \cup (2; +\infty) \quad \textcircled{A}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2) \cup (2; +\infty) \quad \textcircled{A}$$

$$\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{1}}: q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3(25x+34)(3x+2)}} \Rightarrow q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} \Rightarrow$$

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^4} \Rightarrow q = \left(\frac{1}{|3x+2|} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}}: q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^2 \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow$$

$$q^4 = \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)}$$

$$\textcircled{A}: x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2)$$

$$(25x+34)(3x+2) = (2-x)^2 \cdot |3x+2|$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right):$$

$$25x + 34 = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 30$$

$$\notin \left(-\frac{2}{3}; 2\right) \quad \notin \left(-\frac{2}{3}; 2\right)$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{34}{25}\right):$$

$$25x + 34 = -4 + 4x - x^2$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 152}}{2}$$

$$x = -2$$

$$x = -19$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{R}$$

$$q = \left(\frac{1}{55}\right)^{\frac{1}{5}} \in \mathbb{R}$$

$$b_1 = 2^{\frac{7}{2}} \in \mathbb{R}$$

$$b_1 = 21 \cdot 55^{\frac{11}{7}} \in \mathbb{R}$$

Ответ: $x = -2, x = -19$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$|y+2| + 2|y-18| \quad \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ | & | & | \\ -2 & 18 & \end{array} \rightarrow y$$

I: $y \leq -2$

$$\begin{aligned} -y-2-2y+36 & \text{ (до)} \\ -3y+34 & \leftarrow \min = 40 \text{ при } y = -2 \end{aligned}$$

II: $y \in [-2; 18]$

$$\begin{aligned} y+2-2y+36 & \text{ (до)} \\ 38-y & \leftarrow \min = 20 \text{ при } y = 18 \end{aligned}$$

III: $y \geq 18$

$$\begin{aligned} y+2+2y-36 & \text{ (до)} \\ 3y-34 & \leftarrow \min = 40 \text{ при } y = 18 \end{aligned}$$

I, II, III $\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20$

$$\sqrt{400-z^2} \leq 20 \quad \text{и} \quad \sqrt{400-z^2} = |y+2| + 2|y-18| \Rightarrow$$

$$\sqrt{400-z^2} = 20 \quad \Rightarrow z = 0$$

$$|y+2| + 2|y-18| = 20 \Rightarrow y = 18 \text{ (на I, II, III не подходит)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2 \cdot 0} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2+0}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(3-x)(x+6)}$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ (3-x)(x+6) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-6; 3]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 + 3 - x - 2\sqrt{(3-x)(x+6)} + x + 6 - 9 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} - 2 + (\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6})^2 = 0$$

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x})^2 + (\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}) + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 1$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = -2$$

$$x+6 = 1 + 2\sqrt{3-x} + 3-x$$

$$x+6 + 4\sqrt{x+6} + 4 = 3-x$$

$$2x+2 = 2\sqrt{3-x}$$

$$4\sqrt{x+6} = -2x-7$$

$$x+1 = \sqrt{3-x}$$

$$x \leq -3,5$$

$$16x+96 = 4x^2 + 28x + 49$$

$$x \geq -1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3 - x$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$-12 \pm \sqrt{144 + 16 \cdot 47}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+47}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < -1 \Rightarrow \text{не кор.}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{56}}{2} > 0 \Rightarrow \text{не кор.}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} > -1, < 3 \Rightarrow \text{кор.}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{56}}{2} < -6 \Rightarrow \text{не кор.}$$

Ответ: $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, y = 18, z = 0$ и

$x = \frac{-3 - \sqrt{56}}{2}, y = 18, z = 0.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

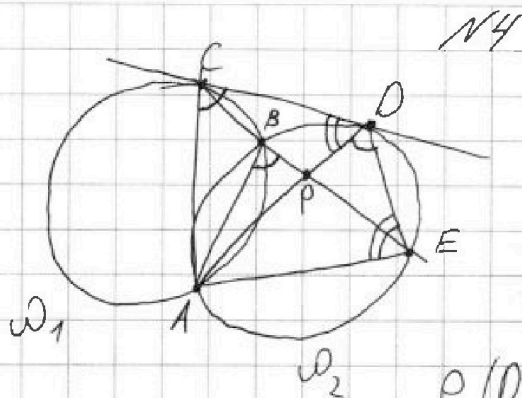
$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD \cap CE = P \Rightarrow \frac{CP}{PE} = \frac{7}{20} \text{ (по усл.)}$$

$$S_{\triangle COP} = \frac{1}{2} CP \cdot \rho(D; CE) *$$

$$S_{\triangle OPE} = \frac{1}{2} PE \cdot \rho(D; CE)$$

$\rho(D; CE)$ - расстояние от D до CE .

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle COP}}{S_{\triangle OPE}} = \frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\angle ADE = \alpha, \angle COP = \beta \Rightarrow S_{\triangle COP} = \frac{1}{2} CP \cdot DP \cdot \sin \beta, S_{\triangle OPE} = \frac{1}{2} DP \cdot DE \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{7}{20} = \frac{S_{\triangle COP}}{S_{\triangle OPE}} = \frac{CD \cdot \sin \beta}{DE \cdot \sin \alpha}$$

$\angle CDA = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ как угол между касательной и хордой

$\angle AED = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ как угол омпр. на $\overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow \angle CDA = \angle AED$, тогда по теореме синусов:

$$\frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{7}{20} = \frac{CD}{DE} \cdot \frac{AD}{AE}$$

$\angle ABE = \angle ADE$ (омпр. на $\overset{\frown}{AE}$)

$\angle CBA = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 180^\circ - \angle ABE$ (внешние \angle -ы) \Rightarrow

$\angle ABE = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \angle ACD$ (\angle между кас. и хордой)

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADE, \angle CDA = \angle DEA \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{7}{20} = \left(\frac{CD}{DE}\right)^2 \Rightarrow \frac{ED}{CD} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

кол-во мн-в обладающих одной симметрией =
 $C_{150 \cdot 70}^4$, т.к. расположив 4 клетки в одной половине,
оставшиеся определяются однозначно в другой половине.
Заметим, что если мн-во обладает двумя симметриями,
то оно обладает и третьей симметрией, т.к.
любими двумя из данных симметрий задается ось
прямоугольника (его вершины), а вершины с
зеркалом в зеркале исходного. Кол-во таких
мн-в считается трижды \Rightarrow вычитаем вместе
его факторы: $3 \cdot C_{150 \cdot 70}^4 - 2 \cdot C_{150 \cdot 70}^2$
Кол-во мн-в с двумя симметриями (третья совб.)
задается двумя клетками в 1 четверти

Ответ: $3 \cdot C_{150 \cdot 70}^4 - 2 \cdot C_{150 \cdot 70}^2$

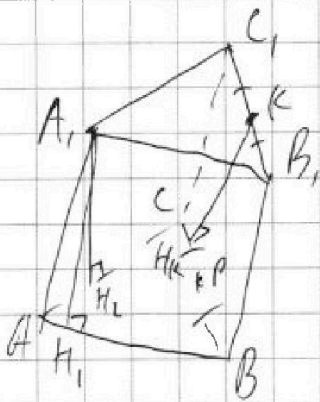


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$A_1H_1 \cdot 4 = 6$$

$$A_1H_1 = \frac{3}{2}$$

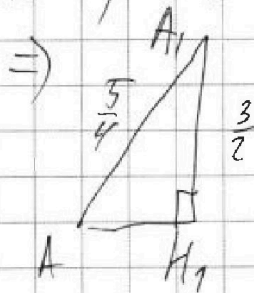
$$A_1H_2 \cdot 4 = 6$$

$$A_1H_2 = \frac{3}{2}$$

$$4 \cdot KH_2 = 5$$

$$KH_2 = \frac{5}{4}$$

$A_1H_1 = A_1H_2 \Rightarrow$ проекция H_1 на BC совпадает с проекцией H_2 на BC (середина BC)
 или $A_1H_1 \perp BC$ и $A_1H_2 \perp BC \Rightarrow A_1H_1 \parallel A_1H_2$
 $\Rightarrow BB_1, C_1C$ - параллельны $\Rightarrow AA_1 = BB_1 = \frac{5}{4}$



треугольник $\triangle AA_1H_1$ - прямоугольный \Rightarrow
 такое AA_1 возможно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6} = 1$$

$$3-x+x+6 - 2\sqrt{(3-x)(x+6)} = 1$$

$$4 = \sqrt{(3-x)(x+6)}$$

$$16 = -x^2 - 3x + 18$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x \in [-6; 3] \quad \text{OK} \quad \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \leq 3 \quad \text{OK} \quad \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \geq -6$$

$\sqrt{17} < 9 \checkmark$ $\sqrt{9} \geq \sqrt{17}$

$$\text{OK} \quad \frac{-3 + \sqrt{56}}{2} \leq 3$$

$\sqrt{56} \leq 9 \checkmark$

$$\text{OK} \quad \frac{-3 - \sqrt{56}}{2} \geq -6$$

$9 \geq \sqrt{56} \checkmark$

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6} = -2$$

$$4 = x+6 + 3-x - 2\sqrt{(3-x)(x+6)}$$

$$2\sqrt{(3-x)(x+6)} = 5$$

$$\frac{25}{4} = -x^2 - 3x + 18$$

$$x^2 + 3x - 47 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16 \cdot 47}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+4 \cdot 47}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+47}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{2} - \frac{25}{4} = \frac{18}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{7}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{(x-3)(x+6)}$$~~

~~$$x+6+7+14\sqrt{x+6} = 3-x+4-4(x-3)(x+6) + 4\sqrt{3-x}\sqrt{(x-3)(x+6)}$$~~

~~$$x+13+14\sqrt{x+6} = 3-x-4(x^2+3x-18) + 4(3-x)\sqrt{x+6}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{3-x}\sqrt{x+6}$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x}(1+2\sqrt{x+6})$$~~

~~$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x}(1+2\sqrt{x+6})$$~~

~~$$x+6+49+14\sqrt{x+6} = (3-x)(1+4x+24+4\sqrt{x+6})$$~~

~~$$x+55+14\sqrt{x+6} = 3+12x+72+12\sqrt{x+6}-x-4x^2-24x-4x\sqrt{x+6}$$~~

~~$$2\sqrt{x+6} + 4x\sqrt{x+6} = -4x^2 - 14x + 20$$~~

~~$$\sqrt{x+6}(1+2x) = -2x^2 - 7x + 10$$~~

$$2x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 80}}{4}$$

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 3-x + 2\sqrt{(3-x)(x+6)} + x+6 - 9$$~~

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = (\sqrt{3-x} + \sqrt{x+6})^2$$~~

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 + 3-x - 2\sqrt{(3-x)(x+6)} + x+6 - 9 = 0$$~~

~~$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} - 2 + (\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6})^2 = 0$$~~

~~$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6} - 2 + (\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x})^2 = 0$$~~

~~$$\left(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6}\right)^2 + \left(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}\right) + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$~~

~~$$\left(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+6} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

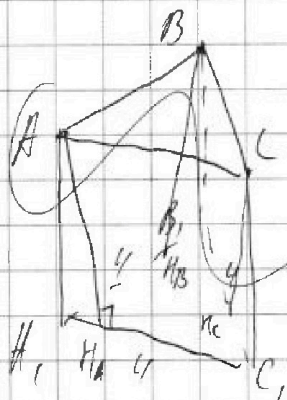
$$a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \quad a < b \quad b - a \neq 0 \pmod{3}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad p\text{-простое}$$

$\leftarrow \Rightarrow c < a < b$ или $c > b > a$
Укажем $p^2 < 0$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a:3: \quad b \equiv 1 \Rightarrow \text{---}$$



$$AH_A \cdot 4 = 6$$

$$BH_B \cdot 4 = 6$$

$$CH_C \cdot 4 = 5$$

$$xH_A = BH_B = \frac{3}{2}$$

$$CH_C = \frac{5}{4}$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1000 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = 1000 + 2ab + b^2$$

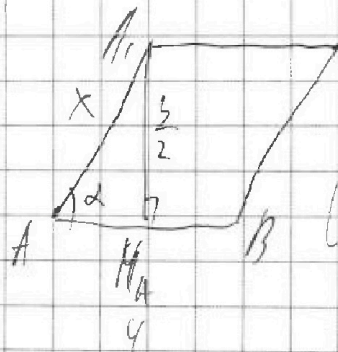
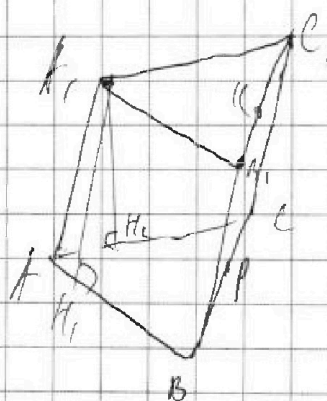
$$(a+b)^2 + b = 1000 + b^2$$

$$ab = \frac{1000 + b^2 - (a+b)^2}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{2x}$$

$$b = 4x \sin \alpha$$

$$ab - c(a+b) + c^2 = p^2$$



$$A_1H_A = H_AH_C = \frac{3}{2} (=)$$

$$p \cos^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha + 5 \cos \alpha - 7 = 0$$

Условие $\alpha \in (0, \pi/2)$

Условие $\alpha \in (0, \pi/2)$ \Rightarrow $\alpha \in (0, \pi/2)$ \Rightarrow $\alpha \in (0, \pi/2)$ \Rightarrow $\alpha \in (0, \pi/2)$

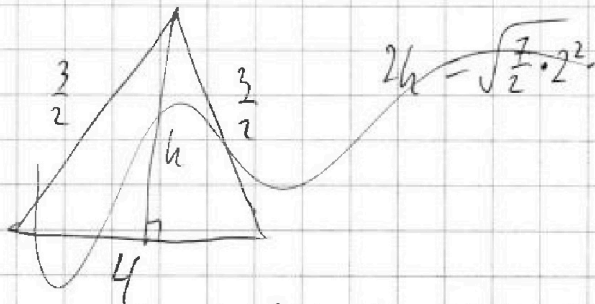
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

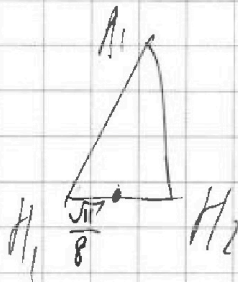
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow K - \text{середина } BC, P - \text{середина } BC \text{ и } AA_1, KP - \text{высота } AA_1 \Rightarrow$
 $AA_1 = KP = \frac{3}{4}$ т.к. $AA_1, KP - \text{высота } AA_1$

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{9}{4} + a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} = \frac{11}{16}$
 $a = \frac{\sqrt{11}}{4}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\cos x \sin^2 x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x. \end{aligned}$$

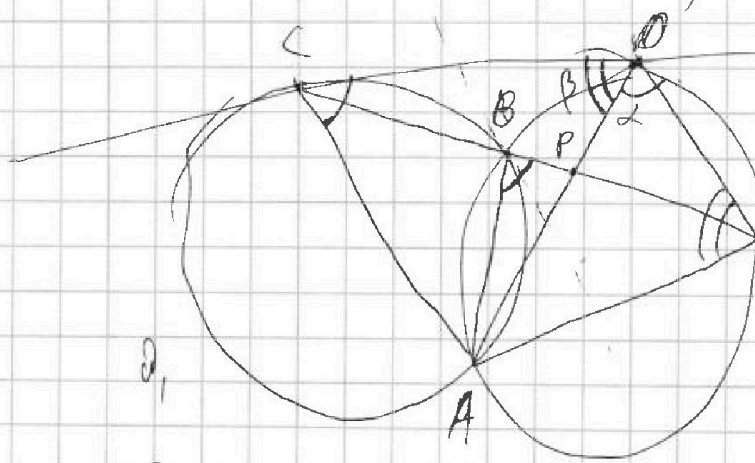
$$4\rho \cos^3 x - 3\rho \cos x + 7\rho \cos^2 x - 6 + 3\rho \cos x + 7\rho \cos x + 10 = 0.$$

$$4\rho \cos^3 x + 7\rho \cos^2 x + 7\rho \cos x + 4 = 0.$$

$$\cos^2 x (4\rho \cos x + 7\rho) + 7\rho \cos x + 4 = 0.$$

$$4(\rho \cos^3 x + 1) + 7\rho \cos x (\cos x + 1) = 0$$

$$(3\rho \cos x + 1) (3\rho^2 \cos^2 x + 3\rho \cos x + 1) = -3 \cos x (\cos x + 1)$$



$$\frac{CP}{PE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{S_{\triangle COP}}{S_{\triangle OPE}} = \frac{7}{20} = \frac{\sin \angle COP \cdot CO}{\sin \angle OPE \cdot OE}$$

$$\angle COA = \angle OEA = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{AO}{\sin \beta} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AO}{AE}$$

$$\angle ABP = \frac{\beta + \alpha}{2} = \angle ACO \Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle APE \Rightarrow \frac{EO}{CO} = \frac{AE}{AO}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{20} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{CO}{EO} = \frac{AO}{AE} \cdot \frac{CO}{EO} = \frac{CO}{EO} \cdot \frac{CO}{EO} \Rightarrow \frac{EO}{CO} = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

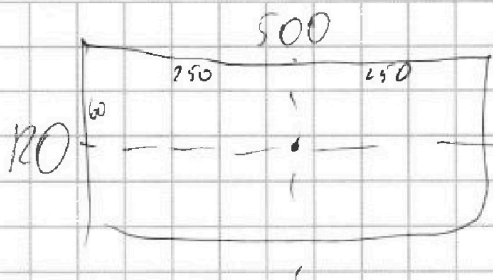
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



для двух параллельных диагоналей

четырех: $250 \cdot 120 \cdot (250 \cdot 120 - 1)$

$C_{250 \cdot 120}^4 - (250 \cdot 120 - 2) \cdot (250 \cdot 120 - 3) \cdot 3$

← рассмотрим 4 клетки в одной стороне, остальные для параллельных диагоналей отброшено

для другой параллельной диагонали все вычислим используем формулу

$\Rightarrow 3 \cdot 250 \cdot 120 / (250 \cdot 120 - 1) \cdot (250 \cdot 120 - 2) \cdot (250 \cdot 120 - 3) \cdot 3 \cdot C_{250 \cdot 120}^4$

значения, что если есть параллельные диагонали, то еще есть и перпендикулярные (еще диагональ) двух пр. диагоналей есть, то есть 4 клетки

параллельных и друг. диагональ, также вычислим

для 60 клеток $250 \cdot 60 \cdot (250 \cdot 60 - 1) \cdot C_{250 \cdot 60}^2$

рассм. 2 клетки в стороне, ост. диагональ отброшено.

этих клеток \Rightarrow ответ: $3 \cdot C_{250 \cdot 120}^4 - C_{250 \cdot 60}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2z - 6 - 10 \leq z \leq 20$$

$$x + 2z \leq 3$$

$$y - 3x - x^2 + 2z \geq 0$$

$$|y+2| + 2|y-18|$$

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ - & + & + \\ \hline & -2 & 18 \end{array} \rightarrow y$$

$$\frac{18}{34}$$

$$\text{I: } -y-2-2y+36 \\ -3y+34$$

$$\text{II: } y+2-2y+36 \\ -y$$

$$\text{III: } y+2+2y-36 \\ 3y-34$$

$$y \leq -2 \Rightarrow \min(-3y+34) = 40$$

$$y \in (-2, 18)$$

$$y \geq 18$$

$$\min(38-y) = 20$$

$$\min(3y-34) = 20$$

$$\Rightarrow |y+2| + 2|y-18| \geq 20$$

$$\sqrt{400-2^2} \leq 20$$

$$\Rightarrow \sqrt{400-2^2} = 20 \Rightarrow z = 0$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-2^2}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = 20$$

$$\begin{cases} -3y+34 = 20 \\ y \leq -2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{14}{3} > -2 \Rightarrow \emptyset$$

$$y \leq -2$$

$$\begin{cases} 38-y = 20 \\ y \in (-2, 18) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{18}{2} = 9$$

$$\begin{cases} 3y-34 = 20 \\ y \geq 18 \end{cases} \Rightarrow y = 18$$

$$y \in (-2, 18)$$

$$y \geq 18$$

$$\Rightarrow y = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+2z}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$x \geq -6$$

$$x \leq 3$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2}$$

$$x = 3 \quad x = -6$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-(x-3)(x+6)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$① \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = b, q^9$$

b_1 - произв. вещ. число

$$② 2-x = b, q^{11}$$

q - произв. число

$$③ \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = b, q^{17}$$

$x \neq -\frac{2}{3}$, иначе ③ $\notin \mathbb{R}$

$x \neq 2$, иначе ② = 0 $\Rightarrow b, \text{ или } q = 0 \Rightarrow$

$$① = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \neq 2$$

$$\text{или } x = -\frac{34}{25} \neq 2$$

$$③: q^8 = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3 (25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

$$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$q = \left(\frac{1}{(3x+2)^2}\right)^{\frac{1}{8}} \quad q = \left(\frac{1}{(3x+2)}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$x \neq -\frac{34}{25}$, иначе ① = 0 \Rightarrow
 $b, \text{ или } q = 0$
 \Rightarrow ② = 0 $\Rightarrow x = 2 \neq -\frac{34}{25}$

$$\begin{aligned} (25x+34)(3x+2) &\geq 0 & \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -\frac{34}{25} \quad -\frac{2}{3} \end{array} \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} &\geq 0 & \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -\frac{34}{25} \quad -\frac{2}{3} \end{array} \end{aligned}$$

$$②: q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^2 \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2)$$

$$q^4 = \frac{(2-x)^2}{(25x+34)(3x+2)}$$

$$(25x+34)(3x+2) = (2-x)^2 | 3x+2|$$

$$x \in (-\frac{2}{3}; 2): 25x+34 = 4-4x+x^2$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$$x = -1 \quad x = 30$$

$$\notin (-\frac{2}{3}; 2) \quad \notin (-\frac{2}{3}; 2)$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}):$$

$$25x+34 = -4+4x-x^2$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 152}}{2} = \frac{-21 \pm 17}{2}$$

$$x = -2$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$b_1 = 4 \cdot 2^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$x = -19$$

$$q = \left(\frac{1}{55}\right)^{\frac{1}{11}} \in \mathbb{R}$$

$$b_1 = 21(55)^{\frac{11}{11}} \in \mathbb{R}$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$