МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z},\\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$$p\cos 3x+6\cos 2x+3(p+4)\cos x+10=0$$
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7:20$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:
   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$\{b_n\}$ – геометр. прогр, $n\in N$, $b_1\neq 0, q\neq 0$

1) $b_{10}=b_1q^9=\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$ О.Д.З: $(25x+34)(3x+2)>0$

2) $b_{12}=b_1q^{11}=2-x$

3) $b_{18}=b_1q^{17}=\sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}$

$+\quad -\frac{34}{25}\quad -\quad -\frac{2}{3}\quad +$

2) : 1) $\quad q^2=\dfrac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$

3) : 1) $\quad q^8=\sqrt{\dfrac{25x+34}{(3x+2)^3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$ ← можно внести все под один корень. О.Д.З не потеряется

$q^8=\sqrt{\dfrac{25x+34}{(25x+34)(3x+2)^4}}$; $q^8=\dfrac{1}{|3x+2|^2}$; $q^8=\dfrac{1}{(3x+2)^2}$

$q^8=(q^2)^4$; $\dfrac{1}{(3x+2)^2}=\left(\dfrac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^4$

$\dfrac{1}{(3x+2)^2}=\dfrac{(2-x)^4}{(25x+34)^2(3x+2)^2}$; $(x-2)^4=(25x+34)^2$;

$((x-2)^2)^2-(25x+34)^2=0$; $\left[\begin{array}{l}(x-2)^2-25x-34=0\\(x-2)^2+25x+34=0\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l}x^2-4x+4-25x-34=0\\x^2-4x+4+25x+34=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x^2-29x-30=0\\x^2+21x+38=0\end{array}\right.$; $19\cdot 2$

$\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=30\\x=-19\\x=-2\end{array}\right.$ – данный корень не подходит под О.Д.З

также $x=30$ не подходит:

$\underset{>0}{q^2}=\dfrac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}>0}$, тогда $2-x>0$

$x<2$

т.о. $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-19\end{array}\right.$

Ответ: $-19; -2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \quad (1) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

(2):

$|y+2| + |y-18| + |y-18| = \sqrt{400-z^2}$

по св-ву модулей: $|y+2| + |y-18| \geq \cancel{|a-b|}\ |y+2-(y-18)|$

$|a| + |b| \geq a-b$

т.о. $|y+2| + |y-18| \geq 20$

но $\sqrt{400-z^2} \leq 20$, т.к. $400-z^2 \leq 400$

т.о. равенство возможно только при: $\begin{cases} |y+2|+|y-18|+|y-18| = 20 \\ \sqrt{400-z^2} = 20 \end{cases}$

$\begin{cases} y=18 \\ z=0 \end{cases}$ только при данных значениях (2) равенство выполн.

подставим эти единств. значения в (1) ур-ие:

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{\underbrace{18-3x-x^2}_{(x+6)(3-x)}} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{3-x}$

~~Замена:~~

~~$\sqrt{x+6} = t$, $t \geq 0$; $x = t^2-6$; $9-t^2 \geq 0$~~

~~$t - \sqrt{9-t^2} + 7 = 2t\sqrt{9-t^2} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow t+7 = \sqrt{9-t^2}(2t+1) \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow t^2+14t+49 = (9-t^2)(4t^2+4t+1) \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow t^2+14t+49 = 36t^2+36t+9-4t^4-4t^3-t^2 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 4t^4+4t^3+2t^2-36t^2+14t-36t+40=0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 4t^4+4t^3-34t^2-22t+40=0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 2t^4+2t^3-17t^2-11t+20=0$~~

О.Д.З.
$3 \geq x \geq -6$

~~$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x}(2\sqrt{x+6}+1) \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6+14\sqrt{x+6}+49 = (3-x)(4(x+6)+4\sqrt{x+6}+1) \Leftrightarrow \\ x \leq 3 \end{cases}$~~

~~$\Leftrightarrow x+55+14\sqrt{x+6} = 12$~~

Замена:

$\sqrt{18-3x-x^2} = t$, $t \geq 0$ при $3 \geq x \geq -6$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2t-7$;

$x+6+3-x \cancel{*} - 2t = 4t^2-28t+49$

~~выполнен неравносильный переход, могут появиться лишние корни~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 Продолжение

$9-2t=4t^2-28t+49$; $4t^2-26t+40=0$;

$2t^2-13t+20=0$; $t=\frac{13\pm\sqrt{169-160}}{4}$; $t=\frac{13\pm3}{4}$ $\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=\frac{5}{2}\end{array}\right.$

т.о.

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{18-3x-x^2}=4 \ (1) \\ \sqrt{18-3x-x^2}=\frac{5}{2} \ (2)\end{array}\right.$ (1): $18-3x-x^2=16$

$x^2+3x-2=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}$; $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

(2): $\cancel{68}$ $72-12x-4x^2=25$;

$4x^2+12x-47=0$; $x=\frac{-6\pm\sqrt{36+4\cdot47}}{4}$; $x=\frac{-6\pm\sqrt{224}}{4}$

под О.Д.З. поиски все значения

Все значения подходят

т.о. $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};18;0\right)$; $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};18;0\right)$;

$\left(\frac{-6+\sqrt{224}}{4};18;0\right)$; $\left(\frac{-6-\sqrt{224}}{4};18;0\right)$

Ответ: $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};18;0\right)$; $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};18;0\right)$; $\left(\frac{-6+\sqrt{224}}{4};18;0\right)$

$\left(\frac{-6-\sqrt{224}}{2};18;0\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$

т.к. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ и $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\Leftrightarrow p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6(\cos^2 x \cdot 2 - 1) + 3p\cos x + 12\cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4p\cos^3 x + 12\cos^2 x + 12\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

Заметим, что наше выражение очень похоже на куб суммы, сделаем его

$\Leftrightarrow \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 + (p-1)\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)^3 = (1-p)\cos^3 x$

т.к. $\cos x \neq 0$ (при $\cos x = 0$ нет выполн. равенства), то

$1 - p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$

1) если $\cos x > 0$, то $\frac{1}{\cos x} \geq 1$; $1 + \frac{1}{\cos x} \geq 2$

$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \geq 8$

т.о. $1 - p \geq 8 \Leftrightarrow \boxed{p \leq -7}$

при таких p и $\cos x > 0$ всегда найдется решение

2) если $\cos x < 0$, то $\frac{1}{\cos x} \leq -1$; $1 + \frac{1}{\cos x} \leq 0$

$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \leq 0$; т.о. $1 - p \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{p \geq 1}$

при $p \geq 1$ всегда найдется реш. такое, что $\cos x < 0$

Решим при этих значениях p исходн. ур-ие.

$1 - p = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-p} - 1 = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

1) если $p \leq -7$, то $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} > 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

2) если $p \geq 1$, то $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$; $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

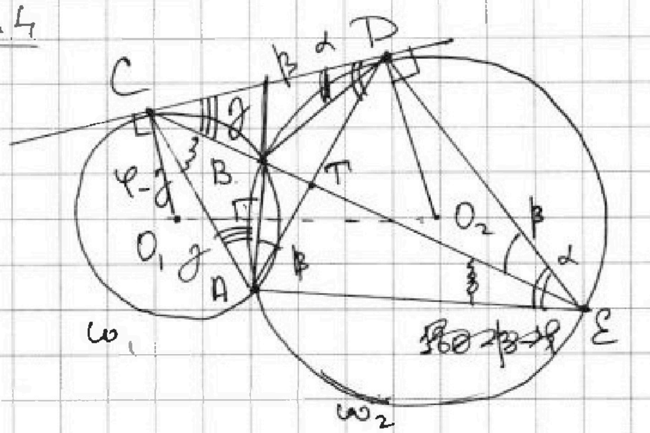
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



CT : TE = 7 : 20
ED : CD - ?

1) по св-ву секущ и кас.: $CB \cdot CE = CD^2$

2) Пусть $\angle CDA = \alpha$, тогда $\angle AED = \alpha$ (как угол между хордой и касат.)

3) проведем AB ($AB \perp O_1O_2$)

4) Пусть $\angle DEC = \beta$, тогда $\angle BAT = \beta$ (как опир. на одну дугу)

5) $\triangle BAT \sim \triangle TDE$ (по 2м угл): $\angle CTA = \angle DTE$ (вертик), $\angle BAT = \angle DET$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{BT}{TD} = \dfrac{AT}{TE} = \dfrac{AB}{ED}$

6) Пусть $\angle DCE = \gamma$, то $\angle CAB = \gamma$ (как угол между хорд. и касат)

7) проведем BD

8) $\angle BDA = \angle BEA = \varphi$ (опир. на одну дугу)

~~9) $\triangle BDT \sim \triangle ATE$ (по 2м углам)~~

9) $\angle CDB = \beta$ (как угол между кас. и хордой)

10) $\triangle CDE \sim \triangle CBD$ (по 2м углам)

$\angle DCE = \gamma$ - общий, $\angle CDB = \angle DEC = \beta$ $\Rightarrow$ $\cancel{\dfrac{CD}{BC}} = \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BD}{ED}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

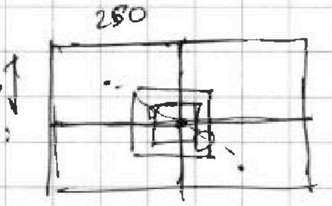
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

500 × 120



Симметр. отн. центра:

кол-во способов

выбрать 1 клетку в одной из 4-х зон: ~~250·60~~ 500·120

необх. взять симметр. ей клетку в друг. области отн. O

такой способ единств.

~~1·250·60~~ (500·120 − 2)·(500·120)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

(a, b, c) - ?

1) $a < b$
2) $b - a \not\vdots 3$
3) $(a-c)(b-c) = p^2$
4) $a^2 + b = 1000$

рассмотрим (3) усл.

$(a-c)(b-c) = p^2$

т.к. $(a-c) \in Z$ и $(b-c) \in Z$, то $(a-c)(b-c) \in Z$

$(a-c)(b-c) \vdots p^2$ - такое может быть в 6 случаях

I. $\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$; $b - a = 0$; $b = a$ (противор. (1) усл)

II. $\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases}$; $b - a = 0$; $b = a$ (против. (1) усл)

III. $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$; $a - b = p^2 - 1 > 0$; $a > b$ (противор. (1) усл)

IV. $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$; $a - b = p^2 - 1 > 0$; $a > b$ (противор. (1) усл)

V. $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$; $p^2 - 1 = b - a$.

Если $b - a \not\vdots 3$, то возм. два случ.

$\left[\begin{array}{l} b-a = 3k+1 \quad (1) \\ b-a = 3k+2 \quad (2) \end{array}\right.$

(1): $b - a = 3k+1$, тогда $p^2 - 1 = 3k+1$; $p^2 = 3k+2$

Посмотрим, какие остатки может дать p^2 при делен. на 3

(mod 3)

p	p^2
0	0
1	1
2	1

т.о. p^2 никогда не дает остат. 2 при дел. на 3, значит $p^2 = 3k+2$ не выполняется и случай невозмож.

(2): $b - a = 3k+2$ тогда $p^2 - 1 = 3k+2$, $p^2 = 3k+3 \Rightarrow$
$\Rightarrow p \vdots 3$, а если p - прост, то $p = 3$. ($\vdots 3 \; \vdots 3$)

и $b - a = p^2 - 1 = 8$; $b = a + 8$

и $a^2 + a + 8 = 1000$; $a^2 + a - \underset{31 \cdot 32}{992} = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = 31 \\ a = -32 \end{array}\right.$

т.о. $\begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \\ c = 30 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{cases}$

VI. $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} b-a = p^2 - 1 \\ c = b+1 \end{cases}$ - тот же самый вариант, что и V

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 Продолжение

но c принимает уже другие знач. $\begin{cases} a=31 \\ b=39 \\ c=40 \end{cases}$ или $\begin{cases} a=-32 \\ b=-24 \\ c=-23 \end{cases}$

Т.О. тройки (a,b,c) следующ.:
$(31;39;40)$; $(-32;-24;-23)$; $(31;39;30)$; $(-32;-24;-33)$

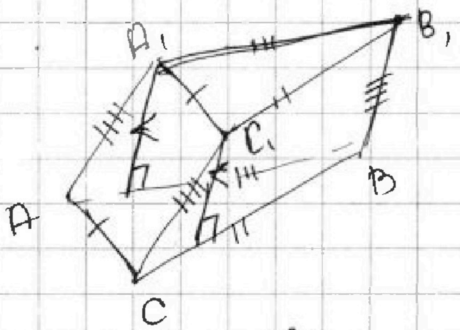
Ответ: $(31;39;40)$; $(-32;-24;-23)$; $(31;39;30)$; $(-32;-24;-33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

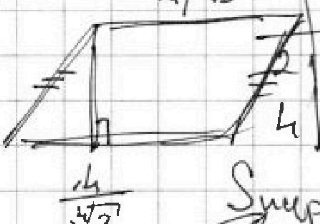
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$S=4$ $S_{гр}=$

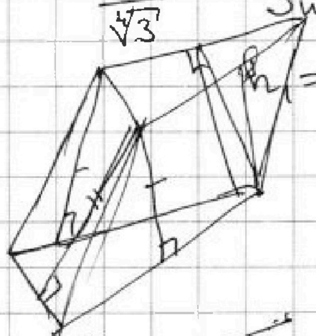
	2	2	−17	−4	20
2	2	6	−5	−21	−1
	2				



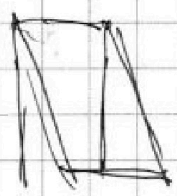
$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

=) $a=\sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}}$

$S_{пер}=h\cdot a$



$h_1=h_2\ \frac{t+7}{2t+1}$



$CB\cdot CE=CD^2$

$AT\cdot TP=ET\cdot BT$

$2\sqrt{18-3x-x^2}=$

$=2\sqrt{18-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-3x-x^2}$

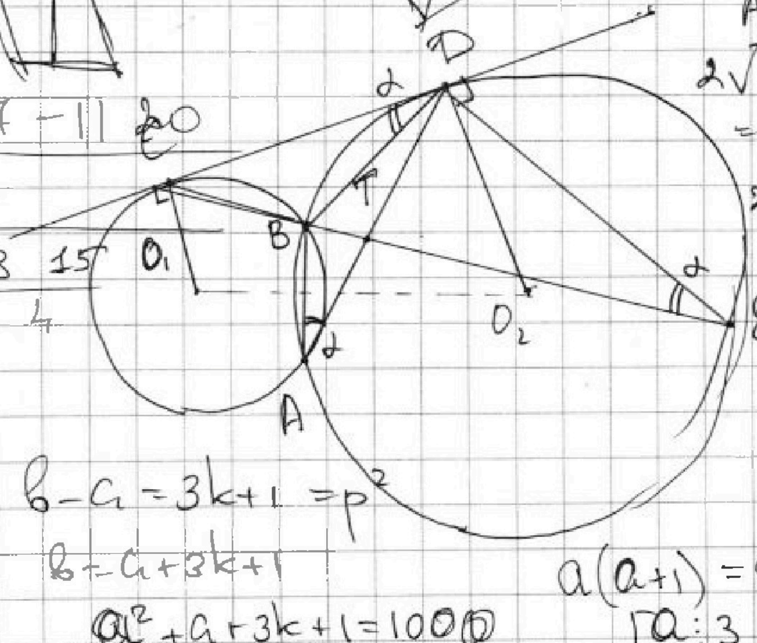
$2\sqrt{18+\frac{9}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}$

20,25 ≤ 9

4,5

≥ 9

	2	2	−17	−1	20
3	2	8	7		
−2	2	−2	−13	15	
−3	2	−4	−5	4	
4	2	10			
−2	2	−6	7		
$-\frac{1}{2}$					



$b-a=3k+1=p^2$

$b=a+3k+1$

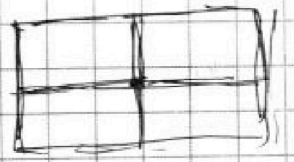
$a^2+a+3k+1=1000$

$a=3t$

$b=3d+1$

$a(a+1)=999-3k$

$\left[\begin{array}{l}a\,\vdots\,3\\(a+1)\,\vdots\,3\end{array}\right.$



$x+6+3-x+49-14\sqrt{3-x}+7\sqrt{}$

$3-x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) I. $b-a=3k+1$

$3k+1=p^2-1$ $3k+2=p^2$

$3k+1=(p-1)(p+1)$

если k-четна то такого не бив.

k-нечет

$\varphi+\alpha+\gamma+\beta=180$

$180-\beta-\varphi$

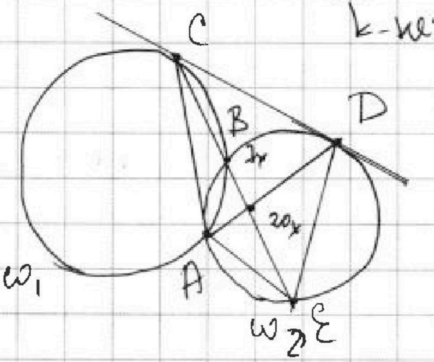
$180=\gamma+\beta+$ $\alpha-\beta$

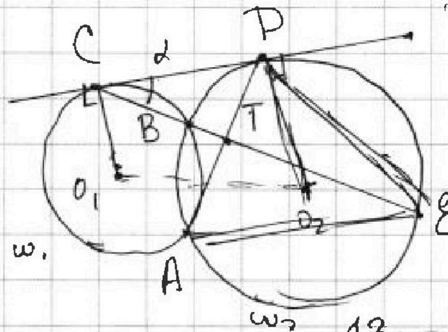
$+180-\beta-\varphi+\cancel{\beta}-$

$ED:CD-?$

$CT:TE=$
$=7:20$

$CE=27x$





$CD^2=CB\cdot CE$

$DE^2=CD^2+CE^2-2CD\cdot CE\cdot\cos\alpha$

$180=\gamma+\alpha$

$\angle DAE=\beta$

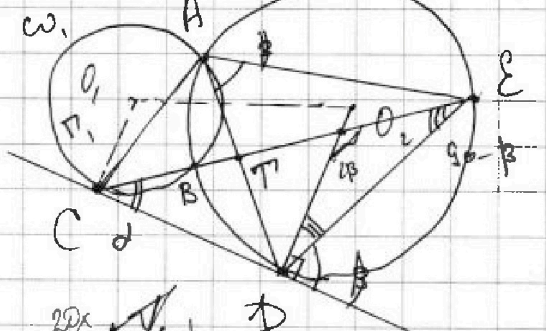
$\angle DO_2E=2\beta$

$90-\beta$

$ED=2r_2\cdot\cos(90-\beta)$

$ED=2r_2\sin\beta$

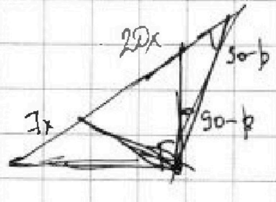
$\alpha+180-2\beta=90$



$\frac{CD}{\sin(90-\beta)}=\frac{ED}{\sin\alpha}$

$\cancel{2\beta}+180-2\beta+\alpha=90°$

$90+\alpha=2\beta$



$\left(\frac{t+7}{2t+1}\right)'$

$t\leq 3$

$t\geq 0$ $(50-3)\cdot 4=$

$=200-12t$

$+36$

2 224

$\frac{\cancel{7}(2t+1)-(t+7)\cdot 2}{(2t+1)^2}=\frac{\cancel{14}\,2t+1-2t-14}{(2t+1)^2}$

$x+6+3-x+2\sqrt{18-3x-x^2}=4(18-3x-x^2)$ $\cancel{4}\sqrt{18-3x-x^2}+$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$

$\cos 3x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) =$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$4p\cos^3 x + 12\cos^2 x - 6 + 3p\cos x + 12\cos x + 10 - 3p\cos x = 0$

$p\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

если $p=1$: $\cos x = -1$

$(\cos x + 1)^3 + (p-1)\cos^3 x = 0$ $\quad \cos x = 0$:

$(\cos x + 1)^3 = (1-p)\cos^3 x$ $\quad 1 \neq 0 = 0 \ \varnothing$

$\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3 = 1-p$ $\quad \left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1-p$

если $\cos x > 0$ $\quad \frac{1}{\cos x} \geq 1$ $\quad 1-p \geq 8$

$\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3 \geq 2^3 = 8$ $\quad p \leq -7$

будет хотя бы 1 реш.

если $\cos x < 0$

$\frac{1}{\cos x} \leq -1$ $\quad 1 + \frac{1}{\cos x} \leq 0$ $\quad 1-p \leq 0$

$\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3 \leq 0$ $\quad p \geq 1$

$p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1-p$ $\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$

если $p \leq -7$ $\quad \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1-p} - 1$ $\quad \cos x > 0$

$\sqrt[3]{1-p} - 1 > 0$ $\quad 1-p > 1$ $\quad p < 2$

$\sqrt[3]{1-p} - 1 \geq 1$ $\quad 2 \leq \sqrt[3]{1-p}$ $\quad 8 \leq 1-p$ $\quad p \leq -7$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x =$

$x =$

№6

$a < b$

$b - a / 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$992 : 2 = 496$, $496 : 2 = 248$, $248 : 2 = 124$, ...

$4 \cdot (992) + 1$

$4000 - 32 + 1 =$

$= 3969$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} (2) \end{array}\right.$

$\left[\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \varnothing\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$ $b-a=p^2-1$ $b-a \vdots 3$

$p^2-1 \vdots 3$ $b=a+p^2-1$

7 13.

$a^2+a+p^2 - 1 = 1000$ $a^2+a=1001-p^2$

$b-a=3k+1$ $b=a+3k+1$

$a^2+a=999-3k$

$p^2=3k+2$ ост. 2

$a \vdots 3 \Rightarrow b=3k+1$

$(a+1) \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3$ $b=3k$

$p \equiv 2$ p^2 (по mod 3)

~~ост.~~ p p^2 ост. 1

p ост при дел. на 3 (p)

0 1 2

p^2: 0, 1, 1

p: 0, 1, 2; p^2: 0, 1, 1

не сущ. ост. 2

такого не быв

не вкиот.

т.е. $p^2-2 \not\equiv 0 \pmod 3$ ни при каких $p \in \mathbb{Z}$

2) $a-c=-p^2$ $b-a=p^2-1$

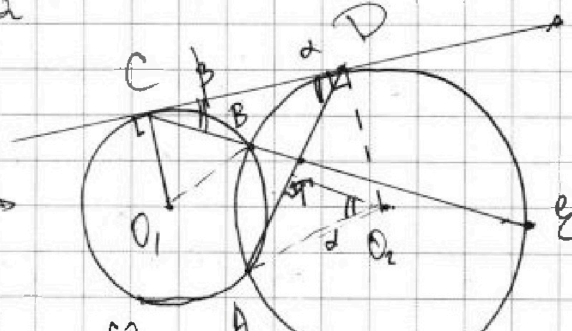
$b-c=-1$

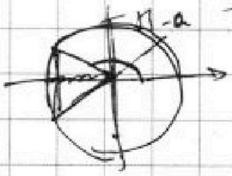
$\cos x = a$

$x=$

ED / CD – ?

CT : TE = 7 : 20





992 | 2

496 | 2

248

$\cos x = a$

$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}\right)$

992	2
496	2
248	2
124	2
62	2
31	31

32

32 · 31

990

$(30+2)(30+1)=$

$31 \cdot 32 =$

$x_1 \cdot x_2 = 992$

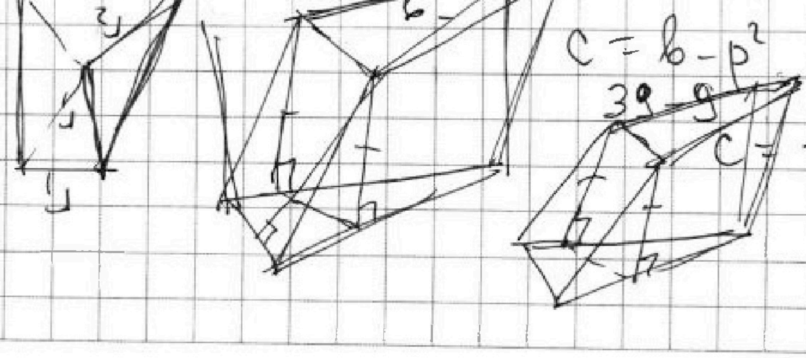
$x_1 + x_2 = -1$

$x_1 = -32$

$c = b - p^2$

39 − 9

$c = -24 - 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

N1 $x-?$

b_{10}, b_{12}, b_{18} – геом прогр.

$b_{10}=\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$ $b_{10}=b_1\cdot q^9$

$b_{12}=2-x$ $b_{12}=b_1\cdot q^{11}$

$b_{18}=\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$ $b_{18}=b_1\cdot q^{17}$

$\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}=q^2$ $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3\cdot(25x+34)(3x+2)}}=$

$=\frac{1}{(3x+2)^2}=q^8=(q^2)^4$

$2-x>0$

$x<2$

$\left(\frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}\right)^4=\frac{1}{(3x+2)^2}$

$\frac{(2-x)^4}{(25x+34)^2\cdot\cancel{(3x+2)^2}}=\frac{1}{\cancel{(3x+2)^2}}$

$(2-x)^4=(25x+34)^2$

$|y+2|+|y-18|$

$y\geq 18$

$2y-16\geq 2\cdot 18-16=$

$=36-16\geq 20$

$y<18$ $y+2-y+18$

$y>-2$ 20

$y\leq -2$

$-y-2-y+18$

$\cancel{18}-y$

$16-2y$

N2 $\begin{cases}\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z}\\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}\end{cases}$

$x_1\cdot x_2=-30$

$x_1+x_2=29$

$\left[\begin{array}{l}x_1=30\\ x_2=-1\end{array}\right.$ -19 -2

$\cancel{|y+2|}$ $2|y-18|\Leftrightarrow|2y-36|$

$|y+2|+|y-18|+|y-18|$
 a b

$|a|+|b|\geq|a-b|=20$

$|y+2|+|y-18|\geq 20$

$20\leq\sqrt{400-z^2}$

$[-6;3]$

$\begin{cases}z=0\\ y=18\end{cases}$ ...

N3. $p\cos 3x+6\cos 2x+3(p+4)\cos x+10=0$

$p-?$ хотя бы 1 реш.

решить у-е

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\cdot\sin x=$

$=(2\cos^2x-1)\cos x-2\sin^2x\cos x=$

$=4\cos^3x-3\cos x$

$\cos 2x=2\cos^2x-1$

$t^2-6=x$

$-x=6-t^2$

$t=\sqrt{x+6}$

$t-\sqrt{9-t^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p(4\cos^3x-3\cos x)+6(2\cos^2x-1)+3(p+4)\cos x+10=0$

$\cos x=t$

$4pt^3-\cancel{3pt}+12t^2-6+\cancel{3pt}+12t+10=0$

$4p\cos^3x-\cancel{3p\cos x}+12\cos^2x-6+\cancel{3p\cos x}+12\cos x+10=0$

$4p\cos^3x+12\cos^2x+12\cos x+4=0$

$p\cos^3x+3\cos^2x+3\cos x+1=0$ $\qquad (a+b)^3=a^3+3a^2b+b$ $\quad 3ab^2+1$

$\cos^3x+3\cos^2x+3\cos x+1+(p-1)\cos^3x=0$

$(\cos x+1)^3+(p-1)\cos^3x=0$

если $\cos x\ne0$, то :

$\left(\frac{\cos x+1}{\cos x}\right)^3+(p-1)=0$ $\qquad 1-p=\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3$

если $\cos x>0$ $\qquad 1+\frac{1}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}$

$p=1-\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^3=\left(1-1-\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+1+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2x}\right)$

$p=-\frac{1}{\cos x}\cdot\left(2+\frac{\cos x+1}{\cos^2x}\right)=-\frac{2\cos^2x+\cos x+1}{\cos^2x\cdot\cos x}=$

$=-\frac{}{\cos^3x}$

можно упасть что-то доказать!

№6. $(a,b,c)\in Z$ $\qquad$ т.к. $a,b,c\in Z$ $\qquad$ 1) $b-a=3k+1$ $\quad$ 2) $b-a=3k+2$

$a<b$ $\qquad a-b\in Z$

$b-a\not\vdots\, 3$ $\qquad$ −1 !! $\qquad b-c\in Z$

$(a-c)(b-c)=p^2$ $\qquad a-c=p$ $\quad a-c=b-c$

$a^2+b=1000$ $\qquad b-c=p$ $\quad \underline{a=b}$

$\left[\begin{array}{l}a-c=p^2\\ b-c=p^2\\ a-c=p\\ b-c=p\end{array}\right.$ $\qquad$ 1) $a-c=p^2$

$b-c=1 \Rightarrow \underline{b=c+1}$

$a-c-b=p^2-c-1$

$a-b=p^2-1>0$

$\underline{a>b}$!!

$b-c=p^2$ $\qquad \underline{b-a=p^2-1}$

$a-c=1$ $\qquad \underline{c=a-1}$

I. 2) $b-a=3k+2$ $\qquad 3k+2=p^2-1$ $\qquad p^2\vdots3\Rightarrow$

$3k=p^2-3\,\vdots\,3 \Rightarrow$ $\qquad \Rightarrow \underline{p=3}$