



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы покрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$. $= 2^4 \cdot 5 \cdot 7$

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 Пусть первый член геометрической прогрессии равен x_0 , тогда второй равен $x_0 \cdot b$, третий равен $x_0 \cdot b^2$, четвертый равен $x_0 \cdot b^3$, пятнадцатый - $x_0 \cdot b^{14}$, где b - частное двух последовательных членов этой геометрической прогрессии ($b \neq 1$ при делении большего по индексу на меньший).

тогда $\frac{a_{15}}{a_{13}} = b^{28}$ (где a_{15} - пятнадцатый член прогрессии, a_{13} - тринадцатый)

$$\frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = (x+1)^{28} = b^{28} \quad \text{тогда } b^2 = \pm \sqrt[28]{(x+1)^{28}} = \sqrt{|x+1|}$$

($b^2 \neq -\sqrt{|x+1|}$, т.к. $b^2 \geq 0$, а $x+1 \neq 0$)

тогда $a_{13} \cdot b^2 = a_{15}$, т.е. $(5-x) \sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

но заметим, что $b^2 \geq 0$ и значит $x+1 \geq 0$, т.е. $x \geq -1$, не тогда

возведем обе части в квадрат:

$$(13x-35)(x+1) = (5-x)^2(x+1)$$

т.к. $x+1 \neq 0$, т.к.

\exists число $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, а дроби на ноль неопределено, мы можем поделить обе части на $x+1$ если $(x+1) > 0$

$$13x-35 = (5-x)^2$$

$$\text{т.е. } x^2 - 23x + 60 = 0$$

применяя т. Виета получаем, что корни уравнения это $x=20$ и $x=3$

т.е. если ~~какая~~ последовательность существует, то ~~какая~~ $x=20$ или 3 (все переходы не были равносильными, но они являлись следствием)

Пример: при $x=20$ $a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{225 \cdot 21} = 15\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

но при $x=20$ получаем, что

$$b^2 = \sqrt{21}, \text{ а } a_{15} = a_{13} \cdot b, \text{ т.е.}$$

$$(5-x)(\sqrt{|x+1|}) = \sqrt{(13x-35)(x+1)},$$

но $(5-x)(\sqrt{|x+1|}) < 0$, а $\sqrt{(13x-35)(x+1)} > 0$,
противоречие, $x \neq 20$

также нужно рассмотреть вариант, когда $x+1 < 0$,

тогда $(13x-35) = (5-x)^2 - 1$ (мы сократили на $|x+1|$)

т.е. $x^2 - 10x + 25 + 13x - 35 = 0$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

но т.е. Виета получаем корни

-5 и 2, но нам подходит только
-5, т.к. по предположению $x+1 < 0$, т.е.

$$x < -1, \text{ а } 2 > -1.$$

остается вариант,

где $x = -5$ или $x = 3$

если $x = -5$, то $a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{100 \cdot -4} = 10 \cdot 2$,

а $b = \sqrt{|x+1|} = 2$,

$a_{17} = \sqrt{\frac{-100}{-8}}$, а $a_{13} = 10$,

т.е. нам подходит последов-ть, где

$$b = \pm\sqrt{2}, \text{ а } a_7 = \sqrt{\frac{-100}{-8}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

при $x = 3$

$$b = \sqrt{|x+1|} = 2, \text{ а } a_7 = \sqrt{\frac{4}{4 \cdot 3}} = \frac{1}{4},$$

т.е. нам подходит н-ть, где $b = \pm\sqrt{2}$,

$$a_7 = \frac{1}{4} \quad (a_{15} = 4, \text{ а } a_{13} = 2)$$

ответ: $x = 3$ или -5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{13^2 - z^2}$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & (13-z)(13+z) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$\cos^2 x$ по формуле двойного угла $= 2\cos^2 x - 1$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= 2\cos^2 x \cos x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos x \cdot (2\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 4\cos^3 x - \sin^2 x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$3\cos 2x = (2\cos^2 x - 1) \cdot 3$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x &= 4\cos^3 x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x - 3\cos x = \\ &= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p + 3 \end{aligned}$$

$$\cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) = p + 3$$

$$\begin{matrix} \wedge & \wedge & \wedge \\ 1 & 4 & 6 \end{matrix}$$

↓

$$p + 3 < 13, \quad p < 10$$

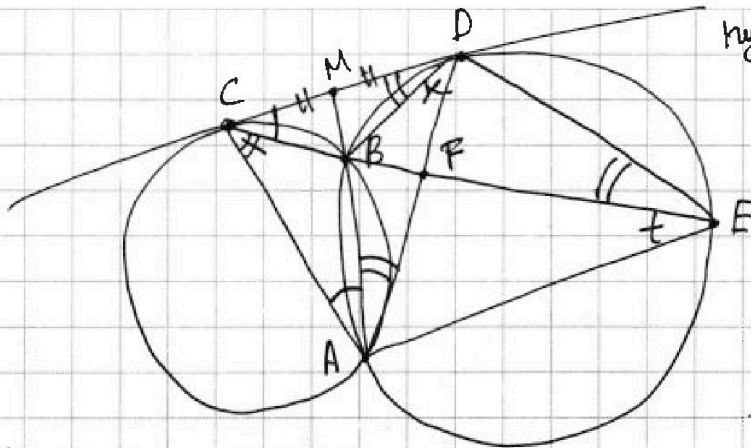


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



пусть $\angle DCB = \alpha$,
 $\angle CDB = \beta$

тогда
по т. об угле
между касательной
и хордой

$\angle DCB = \angle CAB$, а

$\angle CDB = \angle DAB$

(хорды CB и BD и
касательная (одна из) CD)

F - точка пересечения
 $AD \cap CE$, M - точка пересечения
 $AB \cap CD$

Также, по т. об
угле между касательной
и хордой $\angle CDB = \angle DEB$ (хорда BD)

тогда по т. синусов в $\triangle CDE$ имеем, что

$$\frac{CD}{\sin \beta} = \frac{DE}{\sin \alpha}, \text{ т.е. } \frac{CD}{DE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Далее рассмотрим 2 т. синусов в $\triangle BAD$ и $\triangle BAC$:

$$\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \angle BDA}, \quad \frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \angle BCA} \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BDA} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

но по т. синусов в $\triangle CBD$ $\frac{CB}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin \alpha}$, т.е. $\frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$,
а значит $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BDA} = \frac{BD}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, значит

$$\frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle BDA} = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2$$

Далее заметим, что $\angle DAE = \angle DBE$ (углы опираются на хорду DE), а $\angle DBE = \alpha + \beta$, как внешний в $\triangle CBD$, тогда $\angle DAE = \angle DBE = \alpha + \beta$. Но $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \alpha + \beta \Rightarrow \angle CAD = \angle DAE$

\Leftarrow AF - биссектриса в $\triangle CAE \Rightarrow$ по свойству биссектрисы $CF/FE = AC/AE$. по условию задачи $CF/FE = 3/10$, а по т. синусов в $\triangle CAE$ $CA/AE = \sin \angle CEA / \sin \angle BCA$, но $\angle CEA = \angle BDA$ (они опираются на одну хорду BA), тогда



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sin \angle CEA}{\sin \angle BCA} = \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CF} = \frac{10}{3} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BCA}, \text{ но мы доказали,}$$

$$\text{что } \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BCA} = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2, \text{ поэтому } \frac{10}{3} = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right)^2, \text{ тогда}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}} \quad (\sin \text{ углов треугольника } > 0)$$

Заметим тогда, что по т. синусов в $\triangle CDE$

$$\frac{CD}{\sin \beta} = \frac{DE}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}, \text{ ЧТД}$$

$$\text{ответ: } \frac{DE}{CE} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

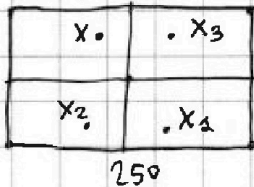
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введем систему координат для удобства обозначения
№5 клеток * ~~закрашенных~~ (см. выделенный * комментарий)

Заметим, что если фигура одновременно обладает
в двумя из перечисленных симметрий, то она обладает
всеми перечисленными симметриями:

Расположим прямоугольник так, что его сторона длиной 200 вертикальна

1) Если она обладает центральной симметрией и
симметрией относительно одной из средних линий
(без ограничения общности, пусть это ср. линия, параллель-
ная стороне из 200 клеток)



рассмотрим произвольную точку (клетку)
 x_1 , тогда в силу центральной симметрии фигуры закрашена
клетка x_3 симметричная x_1 относитель-
но центра (пересечение двух средних
линий), а в силу осевой
симметрии (симметрии относительно
средней линии) закрашена клетка x_2 ,

симметричная x_4 относительно ср. линии, параллельной
стороне из 200 клеток. Осталось заметить, что

в силу центральной симметрии закрашена клетка
 x_3 , симметричная x_2 относительно центра

но пусть у клетки x_1 были координаты (a, b) , тогда
у клетки x_3 это $(250 - a, 200 - b)$, у x_2 это
 $(a, 200 - b)$, у x_4 это $(200 - a, b)$

* первая координата - расстояние до верхней стороны
прямоугольника, вторая - до левой стороны прямоугольника
(у верхней левой клетки координаты $(0, 0)$, у
нижней правой - $(250, 200)$, у нижней левой $(0, 200)$,
у верхней правой - $(250, 0)$)

но тогда точки x_1 и x_3 симметричны относите-
льно второй средней линии, т.е. у произволь-
ной точки x (клетки) клетки, симметричные ей
относительно центра и обеих средних линий
закрашены, значит фигура обладает всеми
перечисленными симметриями



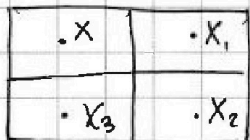
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Фигура обладает симметриями относительно обеих средних линий:



Тогда рассмотрим произвольную клетку X с координатами (a, b) , в силу симметрии относительно вертикаль-и-средней линии ~~каждая~~ клетка X_1 с координатами $(250 - a, b)$ закрашена, а в силу симметрии относительно горизонтальной средней линии точка X_2 с координатами $(250 - a, 250 - b)$ закрашена (она симметрична X_1 относительно вертикальной средней линии) \Rightarrow у произвольной ~~точки~~ клетки X ~~каждая~~ клетка, центрально-симметричная ей (в данном случае это клетка X_2) закрашена. Тогда вся фигура центрально симметрична (и остальными двумя симметриями она обладает) \Rightarrow она обладает всеми видами симметрий)

Заметим, что чтобы посчитать кол-во фигур, обладающих всеми видами симметрий, достаточно посчитать кол-во вариантов выбрать 2 клетки из прямоугольника $100 \cdot 125$, т.к. ~~любая~~ такая фигура определяется двумя клетками в верхней левой четверти прямоугольника (в силу симметрий в каждой четверти прямоугольника одинаково кол-во закрашенных клеток - 2, и чтобы получить всю фигуру, достаточно отразить эти две клетки ~~от~~ от горизонтальной, от вертикальной средней линии, и от центра (их пересечение), и закрасить образы ~~этих~~ этих двух ~~клеток~~ клеток при пересечениях симметрий \Rightarrow 2 клетки в верхней левой четверти определяют всю фигуру \Rightarrow таких фигур равно $\binom{100 \cdot 125}{2}$ штук. Теперь заметим, что фигур, обладающих

одним типом симметрии равно $3 \cdot \binom{100 \cdot 125}{2}$

т.к. по отдельности фигур, обладающих центр. симметрией $\binom{100 \cdot 125}{2}$ (выбираем 4 из верхней половины прямоугольника, это однозначно определяет всю фигуру), относительно горизонтальной и вертикальной ~~тоже~~ $\binom{100 \cdot 125}{2}$ (выбираем 4 клетки из верхней половины в случае горизонт-й симметрии и из левой в случае вертикаль-й ср. линии).

~~Тогда вся фигура, обладающая всеми симметриями в сумме $\binom{100 \cdot 125}{2} \cdot 3$ вариантов~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если ~~каждая~~ одна из фигур ~~с~~ симметрией, Тогда
в сумме $C_{100-250}^4 \cdot 3$ ~~каждой~~ во фигури,
обладающие ~~каждой~~ равно одним ~~каждой~~ типом симметрии
~~каждой~~ ~~каждой~~ один раз, а обладающие

всеми тремя типами - все три раза (поскольку
фигур, обладающих равно двумя типами, нет,
мы посчитали во фигуры). Тогда количество
фигур общее равно

$$\left(\begin{array}{l} \text{Кол-во фигур} \\ \text{с центральной} \\ \text{симметрией} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Кол-во фигур} \\ \text{с симметрией} \\ \text{относительно} \\ \text{горизонтальной} \\ \text{средней линии} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Кол-во фигур} \\ \text{с симметрией} \\ \text{относительно} \\ \text{вертикальной} \\ \text{средней линии} \end{array} \right) -$$

$$- 2 \cdot \left(\begin{array}{l} \text{кол-во фигур} \\ \text{обладающих} \\ \text{всеми} \\ \text{типами} \\ \text{симметрий} \end{array} \right) = 3 \cdot C_{100-250}^4 - 2 \cdot C_{100-125}^2$$

ответ: $3 \cdot C_{100-250}^4 - 2 \cdot C_{100-125}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Заметим, что если произведение двух целых чисел является квадратом простого числа p , то либо по модулю оба эти числа равны p , либо одно по модулю равно p^2 , а второе по модулю равно 1

1) если оба числа (т.е. $a-c$ и $b-c$) по модулю равны $p \Rightarrow$ либо $\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases}$ либо $\begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases}$

(знак квадрат p будет < 0 , \emptyset)
но тогда ~~а~~ $a-b = 0$ (в обеих системах),
и не выполняется условие $a-b \not\equiv 3$,
противоречие

2) если одно число по модулю равно 1, а второе p^2 , то возможны четыре варианта:

$$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

Заметим, что в этих двух случаях $a-b = 1 - p^2$ ~~или~~, но $|p| > 1$ (т.к. наименьший ~~и~~ модуль простого = 2),
тогда $a-b = 1 - p^2 < 0$, но тогда a значит \leftarrow
 $p^2 > 1$

но тогда $a < b$, что противоречит условию,
противоречие
остается два варианта:

$\begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$, в этих случаях $a-b = p^2 - 1$, но заметим, что если p - простое, которое не делится на 3, то $p^2 \equiv 1 \pmod 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(т.к. p может иметь остаток или 1 или 2, а квадраты 1 и 2 имеют остаток 1 по модулю 3)

но в таком случае $a-b = (p^2-1):3$,
а значит $a-b$ кратно 3, что противоречит условию $\Rightarrow p:3$, т.е. $p=3$ (т.к. p -простое)

то есть пока возможны два варианта:

$$\begin{cases} a-c=3^2 \\ b-c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-3^2 \end{cases} \quad \text{в этих случаях } a-b=8$$

такие мы знаем, что $a+b^2=560$,

т.е.
$$\begin{cases} a+b^2=560 \\ a-b=8 \end{cases}, \text{ т.е. } \cancel{a=b+8}, b=a-8$$

т.е. ~~$a^2+64+8a-64=560$ или $b^2+8b-552=a$~~

$$a+a^2-16a+64=560, \text{ т.е.}$$

$$a^2-15a+496=0$$

но т.е. Виета имеем корни -16 и 31 ,

$$\begin{cases} a=-16 \\ b=-24 \end{cases} \quad \begin{cases} a=31 \\ b=23 \end{cases}$$

если $a-c=3^2 \rightarrow$ тогда $c=-25$ тогда $c=32$ ← если $a-c=1$

если $a-c=-1 \rightarrow$ или $c=-15$ или $c=22$ ← если $a-c=3^2$

получаются возможные тройки чисел

(a, b, c) это $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15),$
 $(31, 23, 32), (31, 23, 22)$

ответ: $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15),$
 $(31, 23, 32), (31, 23, 22)$

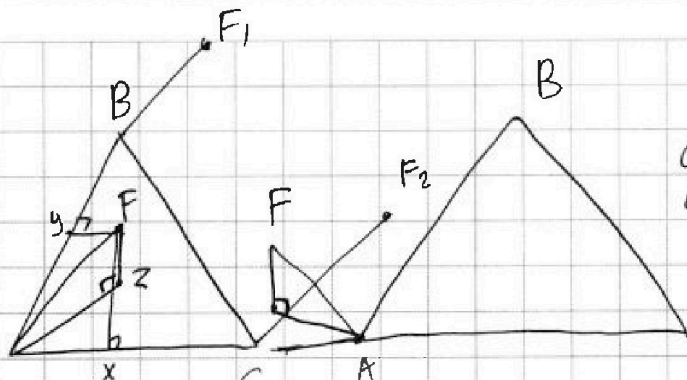


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.



назовем ребром
ребро призмы,
соединяющее вершины
верхнего и нижнего
основание (образующая
призмы)
 $\triangle ABC$ - основание
призмы

(AB, C) - плоскость, проходящая через точки A, B и C
Тк площадь грани (которая является параллелограммом)
определяется как $l \cdot x \cdot \sin \alpha$, где x - длина ребра,
 $\sin \alpha$ - угол между ребром и стороной основания
синус

и площади двух граней равны, какое-то ребро
составляет с двумя сторонами (ребро и эти две
стороны имеют общую точку) равные с точностью
до 180 углы (либо α и α , либо α и $180 - \alpha$) т.к.
синусы $\sin \alpha$ произведения должны быть равны
для подсчета площадей граней

Тогда заметим, что если с обоими ~~сторонами~~ сторонами
~~ребра~~ ~~составляет~~ ~~угол~~ (без ограничения общности
 AB и AC) ребро AF составляет угол α (т.е. $\angle FAB = \angle FAC = \alpha$)
то пусть x, y - основания перпендикуляров из F на
 AC и AB соответственно, ~~тогда $AX = AY = AF \cdot \cos \alpha$~~
то $AX = AY = AF \cdot \cos \alpha$. Заметим, что если z - основание
перпендикуляра из F на (A, B, C) , то zx и $yz \perp FZ$
и $\perp AC$ и AB соответственно ~~но~~ из теоремы о трех
перпендикулярах. Тогда заметим, что $zx = yz = \sqrt{AZ^2 - (AX)^2}$
по т. Пифагора (и т.к. $AX = AY$) $\Rightarrow zx = zy$, тогда
 AZ - биссектриса ~~но в~~ равнобедренном $\triangle ABC$
биссектриса \perp основанию $\Rightarrow AZ \perp BC \Rightarrow$ по т. о трех
перпендикулярах $AF \perp BC$ (или т.к. $BC \perp FZ$ и $\perp AZ$, $BC \perp$ плоско-
сти $(A, F, z) \Rightarrow BC \perp AF$ но тогда площадь грани $BCF_2F_2 =$
 $= x(x - \text{длина ребра}) \Rightarrow x = 3, x \sin \alpha = 4$, тогда $\sin \alpha = \frac{4}{3} > 1$,
это невозможно ($|\sin \alpha| \leq 1$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

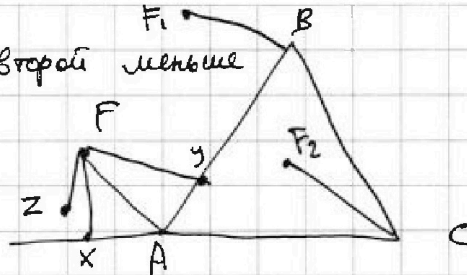
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит один из углов $\angle FAC$ и $\angle FAB$ больше 90° , а второй меньше. Пусть это без ограничения общности $\angle FAC > 90^\circ$.

Пусть x, y - по перпендикуляры из F на AC и AB соответственно \Rightarrow тогда, т.к. $\angle FAC > 90^\circ$, x не лежит на отрезке AC , а т.к. y лежит на отрезке AB . Тогда $\angle FAX = 180^\circ - \angle FAC = \angle FAB$.



\Downarrow
Тогда $\angle FAX = 180^\circ - \angle FAC = \angle FAB$.

$$AX = Ay = FA \cdot \cos \alpha, \text{ где } \alpha = \angle FAB$$

Пусть z - основание перпендикуляра из F на (ABC) , тогда $XA \perp FX$ и $XA \perp FZ$ (т.к. $XA \in (ABC)$)

$XA \perp$ плоскости $(FXZ) \Rightarrow XA \perp ZX$ аналогично $YA \perp zy$

Тогда по т. Пифагора $ZX = \sqrt{AZ^2 - AX^2}$, $Zy = \sqrt{AZ^2 - Ay^2}$,

по $Ay = AX \Rightarrow ZX = Zy \Rightarrow Z \in$ биссектрисе $\angle XAY \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ZAX = 60^\circ$, но тогда $ZA \parallel BC$, т.к. $\angle BCA =$

$= \angle ZAX = 60^\circ$ (углы при секущей равны \Rightarrow прямые

параллельны) \Rightarrow угол между прямыми BC и AF

равен $\angle FAZ$ (\angle между прямыми AF и AZ), но тогда

(т.к. $AF \parallel CF_2$) $\sin \angle F_2CB = \sin \angle FAZ$ (нам не важно,

$\angle F_2CB$ равен $\angle FAZ$ или $180^\circ - \angle FAZ$, т.к. синус от этого

не меняется), $\sin \angle FAZ = FZ / AF = H/x$, где

H - высота призмы, а x - длина ребра (образующей)

но тогда площадь $F_2CBF_1 = 1 \cdot x \cdot \sin \angle F_2CB =$

$$= x \cdot \frac{H}{x} = H = 3 \Rightarrow \text{высота призмы равна } 3$$

\Downarrow
ответ: высота призмы равна 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

