



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a < b$ ,
  - число  $b - a$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① Пусть же конкретное  $x$  такая прогрессия существует.

$$\text{Плюс: } b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = b \cdot q^0$$

$$b_{12} = 2-x = b \cdot q^{11}$$

$$b_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = b \cdot q^{17}$$

$$\begin{aligned} 1) b \cdot q^0 \geq 0 &\Rightarrow b \cdot q^{11} = b \cdot q^0 \cdot q^{11} \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2-x \geq 0 \quad x \leq 2. \end{aligned}$$

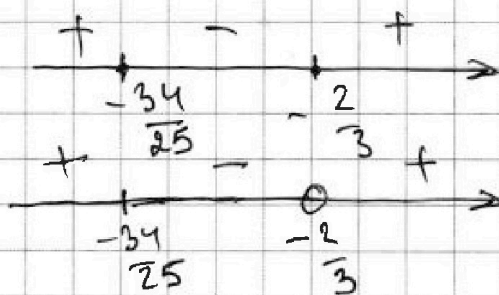
ОАБ:

2) ~~Т.к.  $x \leq 2$  ~~то~~~~

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0$$

$$\frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0$$

$$3x+2 \neq 0$$



$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

Если  $\exists i: b_i = 0 \Rightarrow \forall i: b_i = 0$

ноже  $x=2$  но же  $b_{10} \neq 0 \Rightarrow \forall i: b_i \neq 0$

$$\frac{b_{18}}{b_{10}} = q^8 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$\frac{q^{12}}{q^0} = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

~~не~~  $\rightarrow$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Непонятно!!!

~~Умножить 2 выражения и вынести~~

~~$y = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$  либо  $y^2 = \frac{1}{3x+2}$~~

~~Уг ОА 3: либо  $x > -\frac{2}{3}$~~

~~либо  $x \leq -\frac{34}{25}$~~

~~Или  $x > -\frac{2}{3}$ , тогда возьмем~~

~~$y^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$       $b(x) = 2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} - y^2 =$   
 $= \sqrt{|25x+34|}$      т.к.~~

~~$\frac{(25x+34)(3x+2)}{|3x+2|} = (25+34) \cdot \text{не знак } (3x+2) \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$  система имеет все знаки~~

~~Что и по этому, но если  $\geq 0$~~

~~$(2-x)^2 = |25x+34|$      1)  $x > -\frac{34}{25}$~~

~~$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$~~

~~$x^2 - 29x - 3020$       $x = -1, 3020$~~

~~2)  $x \leq -\frac{34}{25}$       $x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad x^2 + 21x + 38 = 0$$

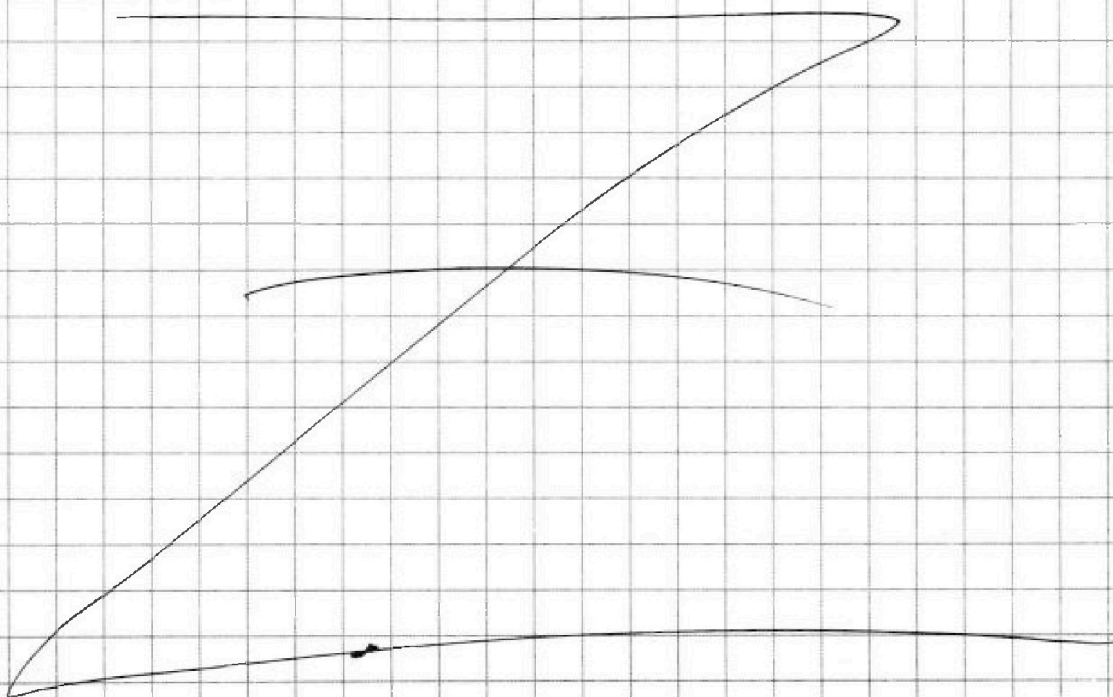
$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 152}}{2} = \frac{-21 \pm \sqrt{289}}{2} =$$

$$= \frac{-21 \pm 17}{2} = -2; -19 \leq -\frac{34}{25}$$

И тогда получаем только  $x \in \{-1; 30; -2; -19\}$

При этом для каждого из них  $x \in \mathbb{Z}$  манера прогрессии.

Ответ:  $-19; -2; -1; 30$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{3} \quad p: \quad p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6(2 \cos^2 x - 1) + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$\underline{4p \cos^3 x} - \underline{3p \cos x} + \underline{12 \cos^2 x} - 6 + \underline{3(p+4) \cos x} + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 = \cancel{p-1} (1-p) \cos^3 x$$

$$(\cos x + 1)^3 = (\sqrt[3]{1-p} \cos x)^3$$

$$\cos x + 1 = \sqrt[3]{1-p} \cos x$$

$$\cos x (\sqrt[3]{1-p} - 1) = 1$$

$$1) \quad p = 0 \quad \cos x \cdot 0 = 1 \quad x \in \emptyset$$

$$2) \quad p \neq 0 \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$b) \quad -1 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} > -1 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Фиго и левее!!!

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 1$$

$$\frac{1 - \sqrt[3]{1-p} \leq 1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 0$$

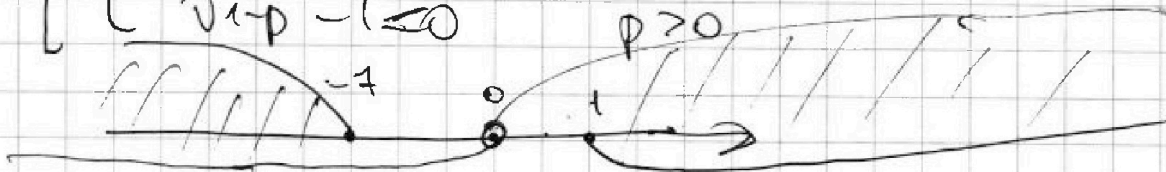
$$\frac{2 - \sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \leq 0$$

[	{	$2 - \sqrt[3]{1-p} \geq 0$	$1-p \leq 8$	$p \geq -7$
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 < 0$	$1-p < 1$	$p > 0$
		$2 - \sqrt[3]{1-p} \leq 0$	$p \leq -7$	
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 > 0$	$p < 0$	

$$2) \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq -1$$

$$\frac{1 + \sqrt[3]{1-p} \geq -1}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq 0 \quad \frac{\sqrt[3]{1-p}}{\sqrt[3]{1-p} - 1} \geq 0$$

[	{	$\sqrt[3]{1-p} \geq 0$	$p \leq 1$
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 > 0$	$p < 0$
		$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$	$p \geq 1$
		$\sqrt[3]{1-p} - 1 \leq 0$	$p \geq 0$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Для любого } p \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

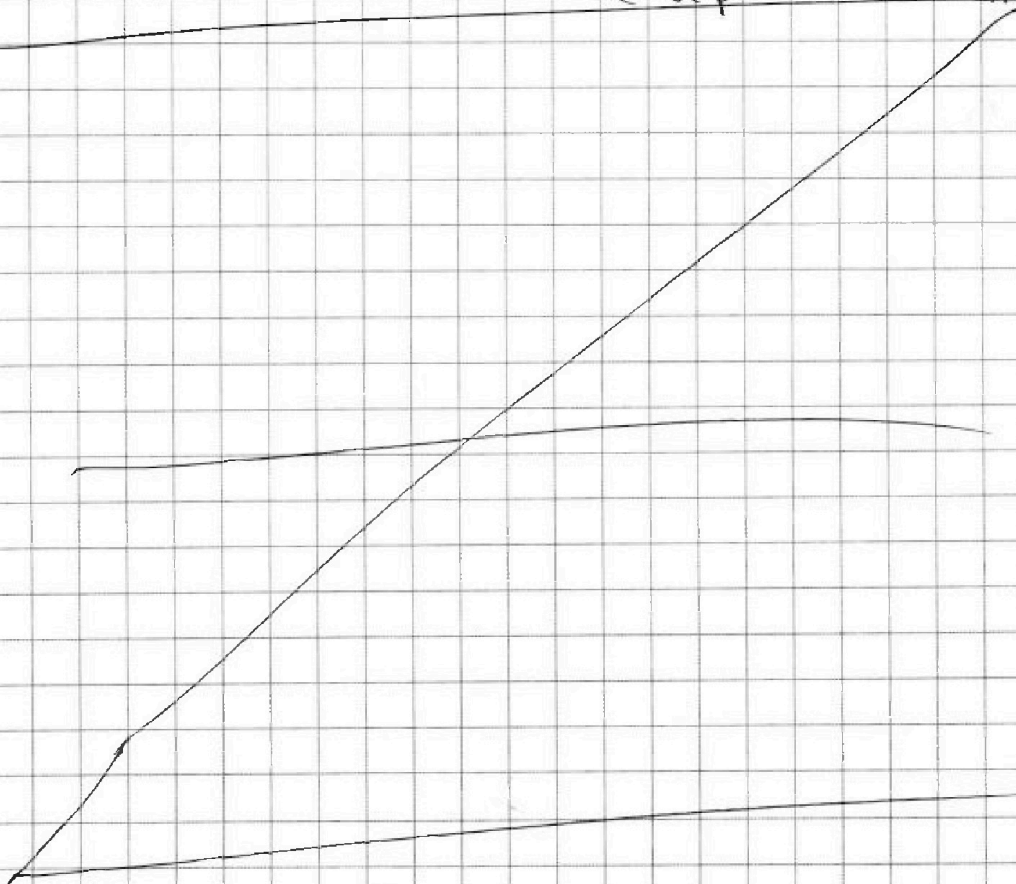
Решение: Для  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$\exists$  такое  $s \in \mathbb{R}$  (когда), что

можно для каждого  $p$  выбрать

$$\text{корень } x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-p} - 1}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$





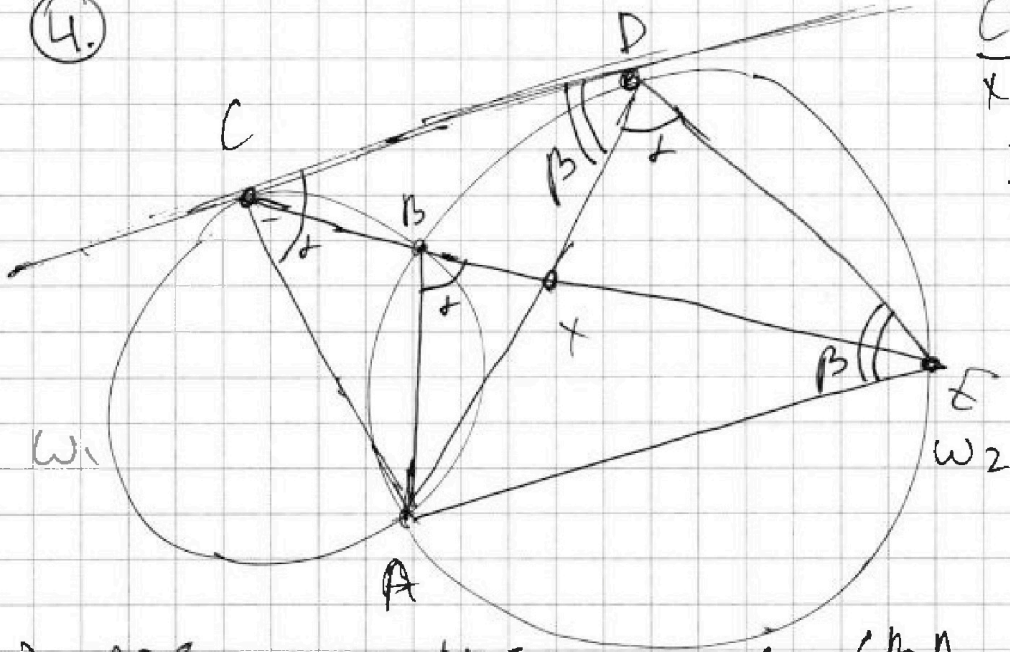
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



$$\frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

1)  $\angle ADE = \alpha = \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA =$   
(внеш. угол дуги)

= внешний угол в  $\omega_1$  опирающийся на дугу CA

не ругу A (так как не содержит точку B) =

$$= \angle ACD = \alpha$$

(углы между кас. и хордой)

2)  $\angle AGD = \beta = \angle CDA$  (углы между кас. и хордой)

3)  $\begin{cases} \angle ACD = \angle ADE \\ \angle ADC = \angle AED \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} \quad \text{4) } \triangle ADE: \frac{AE}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Итого ответ  $\rightarrow$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

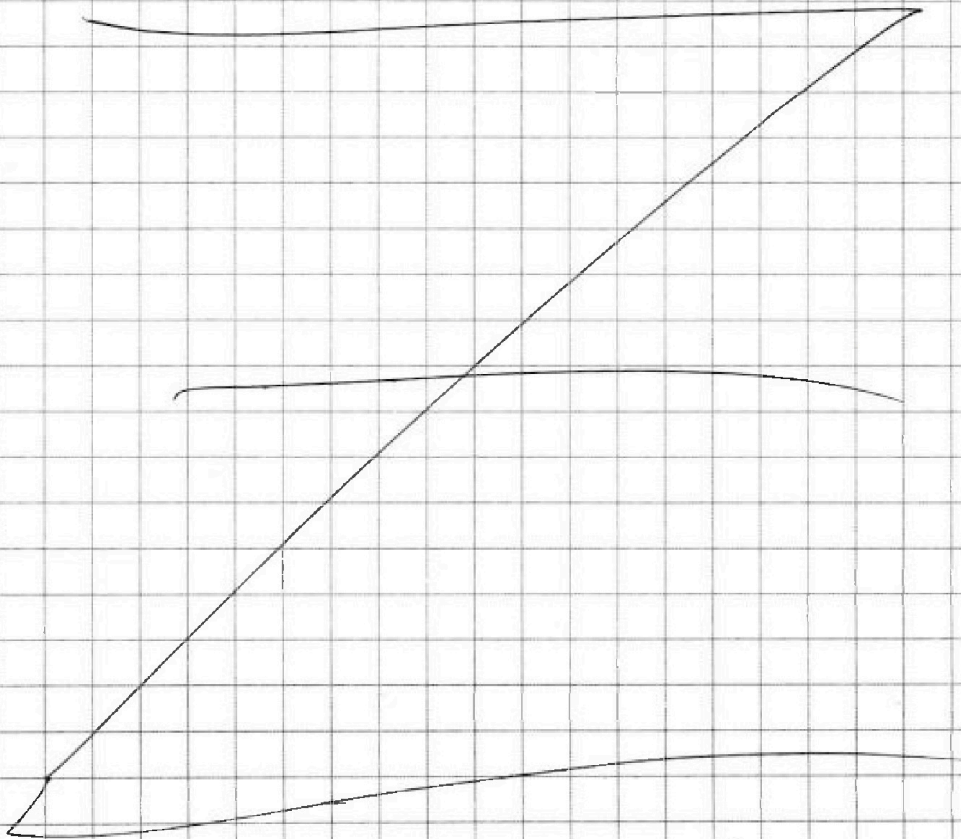
4. Продолжение!!!

$$5) \triangle CDE: \frac{7}{20} = \frac{CX}{XE} = \frac{S_{CDX}}{S_{XDE}} = \frac{CD \cdot \sin \angle CDX}{ED \cdot \sin \angle XDE}$$

$$\frac{CD \cdot \sin \beta}{ED \sin \alpha} = \frac{7}{20} \quad \frac{ED}{CD} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow \left( \frac{ED}{CD} \right)^2 = \frac{20}{7} \quad \left. \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} \right\}$$

$$\text{Итак, } \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть  $AB$  - есть и симметрия  $A$  и симметрия  $B$   
~~и~~ пусть зафиксируем точку, пусть

была выбранной симметрия - это  $X$ ,

пусть была симметрия относительно

одной прямой линии -  $Y$  и другой -  $Z$ .

1) По формуле "включения элементов":

$$\# X \cup Y \cup Z = \# X + \# Y + \# Z -$$

$$- \# X \cap Y - \# X \cap Z - \# Y \cap Z + \# X \cap Y \cap Z.$$

2). Т.к. все три симметрии относительно одной и той же точки и в этом отношении являются друг другу

перпендикулярными - две и есть перпендикулярная

симметрии относительно одной точки

$$\text{пересекаются} \Rightarrow X \cap Y \cap Z = Y \cap Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \# X \cup Y \cup Z = \# X + \# Y + \# Z - X \cap Y -$$

$$- X \cap Z. \text{ 3) По смыслу } \# X:$$

Каждый пример будет сконструирован

следующим образом: рассмотрим,

~~и~~ пусть и точки





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Воспользуемся симметрией и  
покажем, что между двумя 4-узловыми  
сетями симметрией. Инвертируем ее,  
что пока мы переберем все распе-  
новки с центральной симметрией,  
покажем, что мы брали только  
централно-симметричные распе-  
новки, а все центрально-симмет-  
ричные расположения мы ~~уже~~  
рассмотрели в т.к. ~~уже~~ на каждой  
расстановке можно восстановить  
первое зеркало и сетки. И тогда

$$\#X = \binom{4}{\frac{500 \cdot 120}{2}} \quad \text{аналогично } \#Y = \#Z = \binom{4}{500 \cdot 60}$$

Теперь рассмотрим  $\#X \cap Y$  и  $\#X \cap Z$ ,  
обидно, что  $\#X \cap Y = \#X \cap Z$  ~~не~~.

в т.к. для любой симметричной  
расстановки а на сетки



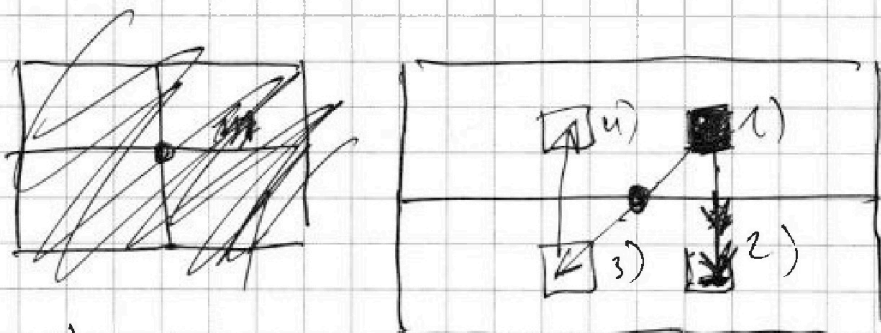
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) Две усложненные обобщенные носители  $X \wedge Y$ , где  $Y$  — эргодическая мера. Интерпретируется, что выбор одной клетки, еще 3 выбираем это не мешает. Расстояние не меньше. Расстояние не меньше. Расстояние не меньше.



Кг (1) по условию 2), 3) и 4)  
 для тем 4) — симметрично 1) относительно  
 уже функции средней меры, потому  
 что это ее по условию точек эргодичности  
 центральную относительно точки пересечения.  
 Значит будем показывать  
 пример так: 1) выбираем





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. 2 пункта ~~была~~ ~~нужна~~ форма ~~на~~ ~~исходной~~  
~~сферической~~ ~~матрице~~ ~~матрице~~, ~~чтобы~~ ~~они~~  
~~не~~ ~~интерпретируются~~ ~~интерпретируются~~  
~~вершины~~ ~~матрицы~~ ~~сферической~~ ~~матрицы~~.  
Из ~~конца~~ ~~по~~ ~~лучшим~~ ~~лучше~~ ~~по~~ ~~3~~,  
~~и~~ ~~того~~ ~~8~~. ~~Очень~~ ~~хв.~~ ~~матрица~~  
~~представляет~~ ~~все~~, ~~т.к.~~ ~~матрица~~ ~~конечная~~  
~~матрица~~ ~~пример~~ ~~сод~~ ~~любой~~ ~~и~~ ~~главное~~,  
~~при~~ ~~этом~~ ~~и~~ ~~равно~~ ~~вершинной~~.  
Поэтому ~~из~~ ~~конца~~ ~~по~~ ~~лучшим~~ ~~как~~ ~~не~~  
~~пример~~ ~~лучше~~ ~~по~~ ~~3~~. ~~и~~ ~~того~~ ~~8~~. ~~Очень~~  
~~не~~ ~~так~~ ~~матрица~~ ~~представляет~~ ~~все~~, ~~т.к.~~  
~~конечная~~ ~~матрица~~ ~~и~~ ~~матрица~~ ~~из~~  
~~лучше~~, ~~то~~ ~~матрица~~ ~~и~~ ~~представляет~~, ~~а~~  
~~значит~~ ~~каждая~~ ~~матрица~~ ~~по~~ ~~крайности~~ ~~и~~  
~~отражает~~ ~~структуру~~ ~~вершин~~ ~~матрицы~~ ~~каждой~~  
~~матрицы~~ ~~можно~~ ~~по~~ ~~структуре~~ ~~матрицы~~ ~~и~~  
~~центру~~.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 5

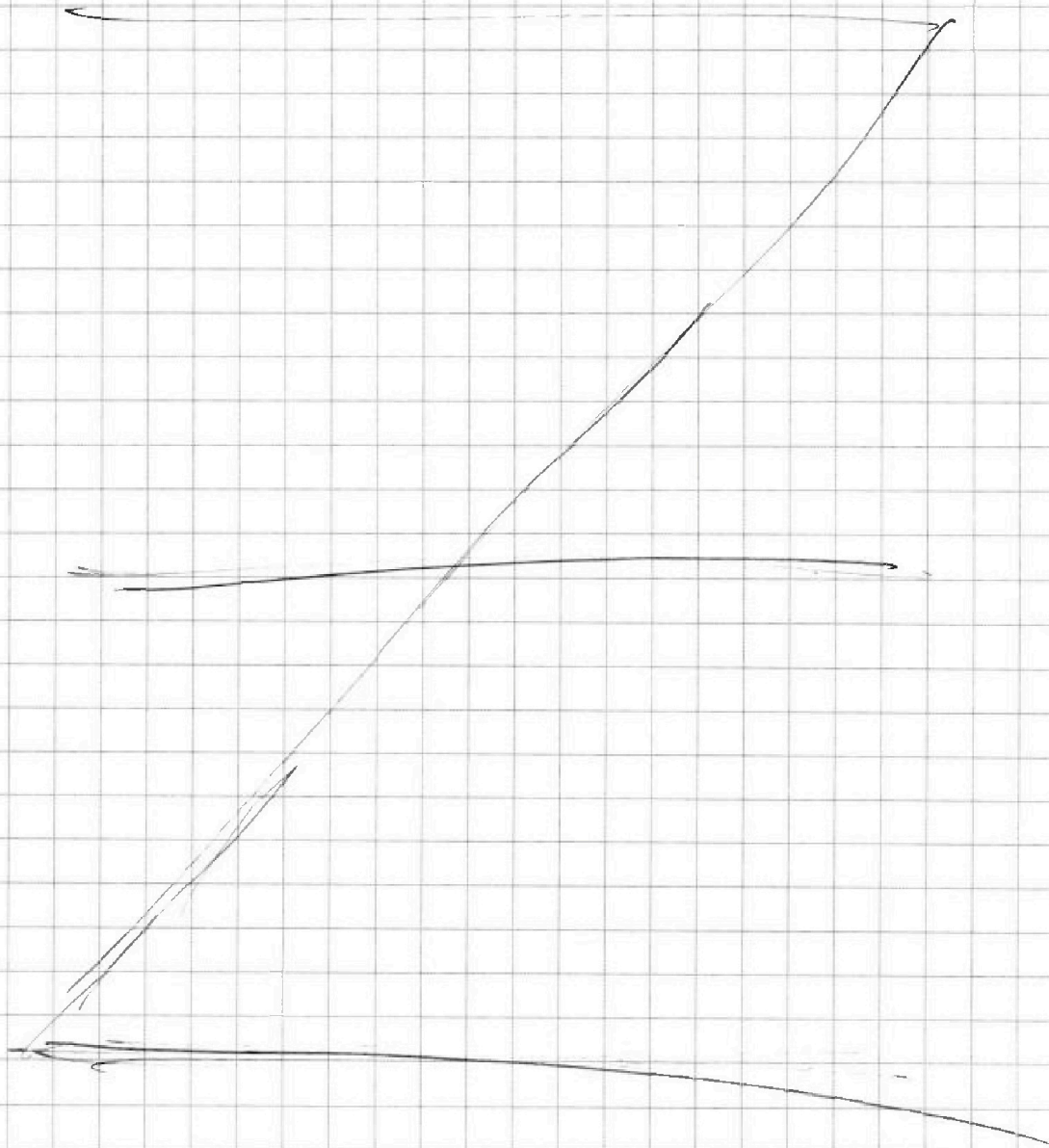
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) ~~21~~ ~~120~~ и того получится:

$$\binom{500-120}{4}$$

$$\# \times U \times V \times Z = 3 \binom{500-60}{4} - 2 \binom{500-30}{2}$$

Ответ: ~~3~~  ~~$\binom{500-60}{4}$~~  ~~3~~  $\binom{30000}{4} - 2 \binom{15000}{2}$







1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.  $(a; b; c):$   $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{Z} \\ a < b \\ b - a \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a^2 + b = 1000 \end{array} \right.$

Если  $a \equiv 0 \Rightarrow a^2 \equiv 0$   
 $a \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1$   
 $a \equiv 2 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 \equiv 1 \\ a^2 \equiv 0 \end{array} \right. \quad a^2 + b = 1000 \Rightarrow a^2 + b \equiv 1$   
 1)  $a^2 \equiv 1 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b \not\equiv a \Rightarrow$   
 2)  $a^2 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow a \not\equiv b$

$\Rightarrow$  Если  $a^2 + b = 1000$ , то  $b - a \not\equiv 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  просто пропустим условие  $b - a \not\equiv 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$

$\left. \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ p \\ -p \\ -p^2 \\ p^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p^2 \\ -p^2 \\ p \\ -p \\ -1 \\ 1 \end{array}$

- все возможные варианты

$\left\{ \begin{array}{l} a+c < b-c \\ |p| > 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$  рассмотрим  $(1; p^2), (-p^2; -1)$

1)  $\left\{ \begin{array}{l} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (c+1)^2 + c + p^2 = 1000 \\ c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000 \end{array}$

$c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000 \Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(p^2 - 999)}}{2}$

~~$9 - 4(p^2 - 999) \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 999 \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$~~

$9 - 4(p^2 - 999) = x^2, \text{ где } x \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6) x^2 + (2p)^2 \equiv 3 + 999 \cdot 4 \pmod{3}$$

$$x^2 + (2p)^2 \equiv 3 \pmod{3} \quad \text{т.к. } \begin{cases} x^2 \equiv 0 \\ (2p)^2 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 + 0 \equiv 0 \\ 0 + 1 \equiv 1 \\ 1 + 0 \equiv 1 \\ 1 + 1 \equiv 2 \end{array} \right\} = x^2 \equiv 0$$

$$(2p)^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 2p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(9 - 999)}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 990}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{1 + 440}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3 \cdot 21}{2} = 30; -33$$

1) $c = 30$	$a = 31$
	$b = 30$
2) $c = -33$	$a = -32$
	$b = -24$

$$2) \begin{cases} a - c = -p^2 & a = c - p^2 \\ b - c = -1 & b = c - 1 \end{cases}$$

$$(c - p^2)^2 + (c - 1) = 1000$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1001 = 0$$

$$c^2 - c(2p^2 - 1) + p^4 - 1001 = 0$$

$$c = \frac{(2p^2 - 1) \pm \sqrt{(2p^2 - 1)^2 - 4p^4 + 4004}}{2}$$

$$(2p^2 - 1)^2 - 4p^4 + 4004 = 4p^4 - 4p^2 - 4p^4 + 4005 = 4005 - 4p^2$$

$$-4p^2 = x^2, \text{ где } x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + (2p)^2 \equiv 4005 \pmod{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Аналогично  $p = 3$ ,  $\text{mod } 2$

$$c = 17 \pm \sqrt{4005 - 4 \cdot 17^2}$$

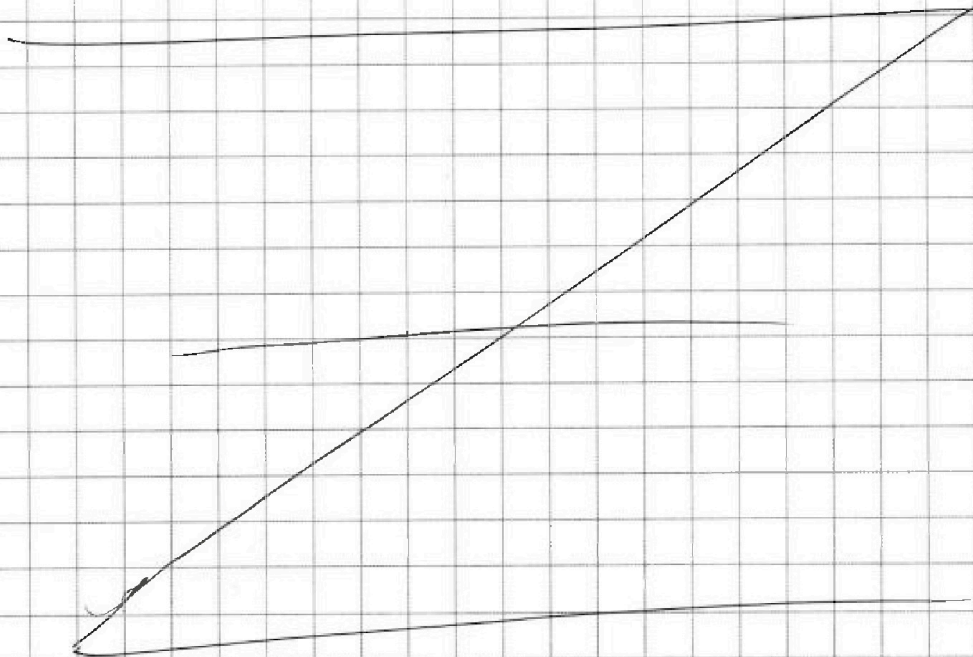
$$= \frac{17 \pm \sqrt{4005 - 4 \cdot 289}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{4005 - 1156}}{2}$$

$$= \frac{17 \pm 3\sqrt{441}}{2} = \frac{17 \pm 63}{2} = 40; -23$$

$$1) \begin{cases} c = 40 \\ a = 31 \\ b = 39 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} c = -23 \\ a = -32 \\ b = -24 \end{cases}$$

ответ:  $(31; 39; 40); (-32; -24; -23); (31; 39; 40); (-32; -24; -23)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a circle and a secant line.

**Diagram 1 (top):** A circle with center  $O$  and diameter  $AE$ . A secant line  $BCD$  intersects the circle at points  $B$ ,  $C$ , and  $D$ . Point  $X$  is on  $BC$ . A tangent line  $AP$  is drawn from point  $A$  to the secant line at point  $P$ . A line  $AD$  is drawn. Angles  $\alpha$  and  $\beta$  are marked at  $A$ .

**Diagram 2 (bottom):** Similar to Diagram 1, but with a different construction. A line  $ED$  is drawn, and a line  $AD$  is drawn. Angles  $\alpha$  and  $\beta$  are marked at  $A$ .

**Handwritten Equations and Calculations:**

- $x = 29 \pm \sqrt{29^2 + 120}$
- $17 - 65 = (6^2 - 18) = -46$
- $29^2 = 841$
- $900 - 60 + 12 = 841$
- $\frac{ED}{CD} = ?$
- $\frac{CX}{XE} = \frac{7}{20}$
- $\frac{AD}{AE} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
- $CD^2 = CB(CB + BE)$
- $3600 + 360 + 45 = 400 + 40 + 5$
- $\frac{ED \cdot \sin \alpha}{CD \cdot \sin \beta} = \frac{20}{7}$
- $\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р:  
 ③  $p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$   
 2 (корень).

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2(1 - \cos^2 x)) = \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x) = \\ &= \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12\cos^2 x - 6 + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12\cos^2 x + \cos x (3p + 12 - 3p) + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 4 = 0$$

$$t = \cos^3 x$$

~~$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 4 = 0$$~~

~~$$(p-1)t^3 + (t+1)^3 + 4 = 0$$~~

$$(p-1)x^3 + (x+1)^3 = 0$$

$$(p-1)x^3 = - (x+1)^3$$

$$\sqrt[3]{p-1} x = - (x+1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

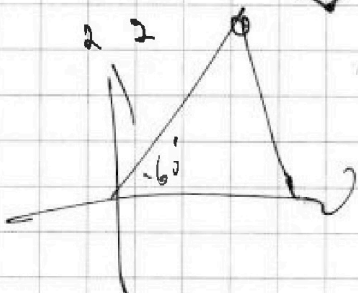
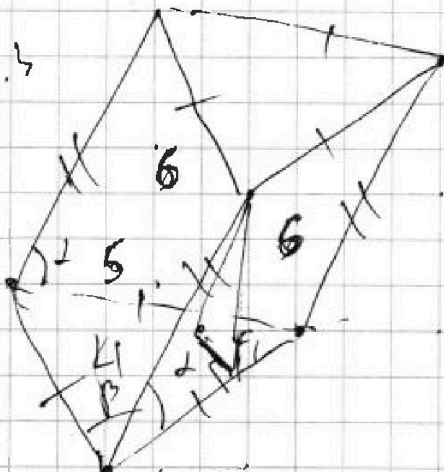
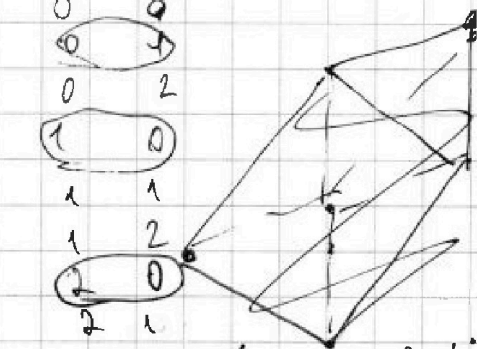
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$   $(b-a) \neq 3$   $(c;b;c)$   
 $(a-c)(b-c) = p^3$   $v-?$

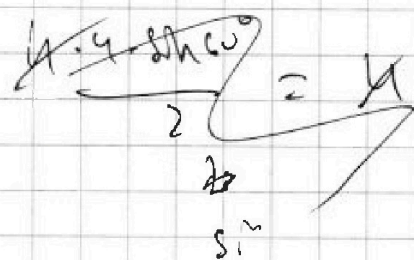
$a^2 + b^2 = 1000$   $p:3$

- 0 0
- 0 2
- 1 0
- 1 1
- 1 2
- 2 0
- 2 1
- 2 2



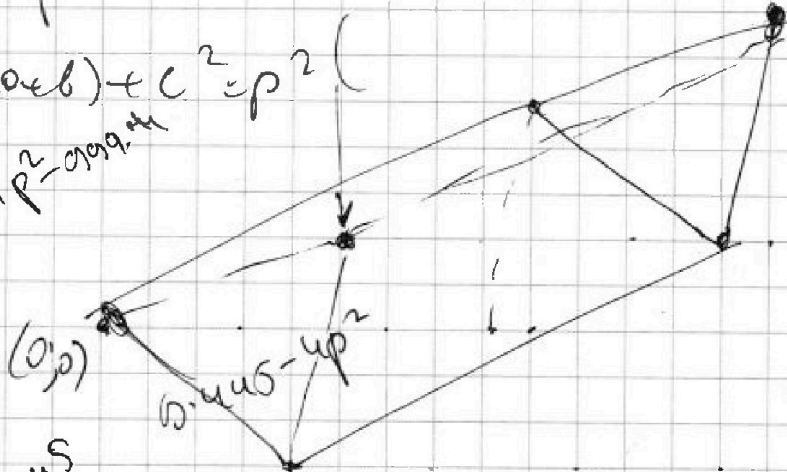
$x^2 + (pr)^2 = 9 \cdot \text{чис}$

$(a-c) = p$   
 $(b-c) = p$



$a^2 - c(a+b) + c^2 = p^2$

$9 = x^2 + pr^2 - 9 \cdot \text{чис}$



$\frac{x^2 \sin 60^\circ}{2} = 4$

$x^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$x^2 + pr^2 = 9 \cdot \text{чис}$

$9 - 4 (p^2 = 999) = x^2$

$-4 (p^2 = 999) = (x-3)(x+3)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$e < b$$

$$e^2 + b^2 = 1000$$

32

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a-c < b-c$$

$$\begin{array}{r} -p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -p^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + p^2 \\ e = c - p^2 \\ b = c - 1 \end{cases} \quad p^2 = 1 \frac{3}{4}$$

$$b - 4(p^2 - 999) \geq 0$$

$$(c+1)^2 + c + p^2 = 1000$$

$$p^2 - 999 \leq \frac{9}{4}$$

$$p^2 \leq 999 \frac{9}{4}$$

$$p \leq 31$$

$$(c-p^2)^2 + c - 1 = 1000$$

$$(c+1)^2 + c$$

$$e^2 + 3c + p^2 - 1001 = 0 \quad p^2 - 999 = 0$$

$$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(p^2 - 999)}}{2}$$

$$(c-p^2)^2 + (c-1) = 1000$$

$$c^2 - c(2p^2 - 1) + p^4 - 1001 = 0$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c - 1001 = 0$$

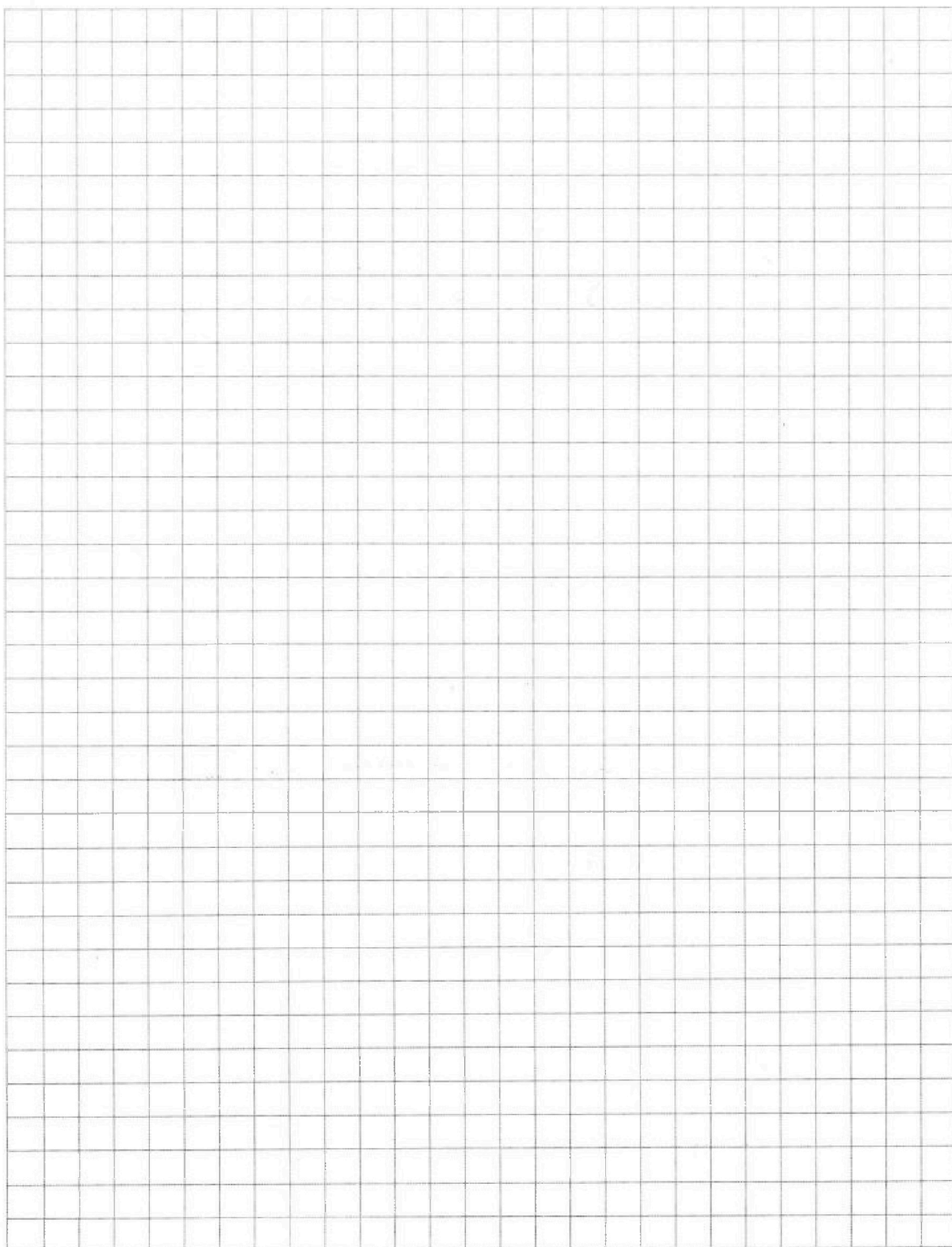


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⑥  $(a; b; c) \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

1)  $a < b$

2)  $b - a \neq 3$

3)  $(a - c)(b - c) = p^2$

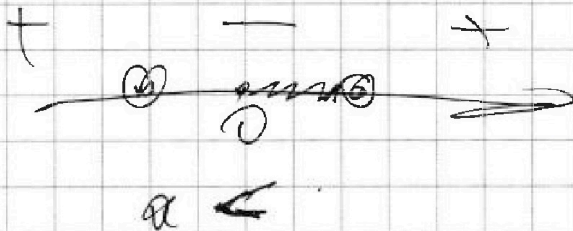
4)  $a^2 + b = 1000$

$$a < 1000 - a^2$$

$$a^2 + a - 1000 < 0$$

$$(b - a)^2 = 999 + 120$$

$$a = -1 \pm \sqrt{1 + 1000}$$



$$a \neq b \quad a \leq 31$$

$$a^2 + b \equiv 1 \pmod{3}$$

0	4
1	0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①  $x \in \mathbb{R}$  :

$\exists b_n : b_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$

$b_{12} = 2-x$

$b_{18} = \sqrt{\frac{(25x+34)}{(3x+2)^2}}$

$g = \frac{1}{\sqrt[4]{3x+2}}$

$x \leq 2$

$x \geq -\frac{2}{3}$

$b \cdot g^9$   
 $b \cdot g^{12}$        $g^8 =$

$b \cdot g^9 \geq 0$

$b \cdot g^{12} \geq 0$

$b \cdot g^{17} \geq 0$

$g^8 > 0$   
 $g^2$   
 $g^5$



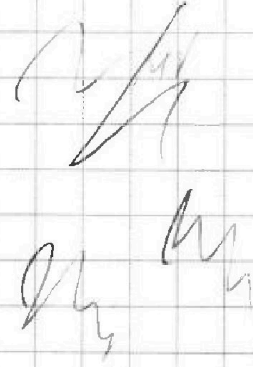
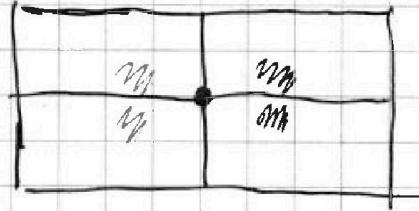


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1), 2), 3)

$$1) + 2) + 3) - 1) \cap 2) - 1) \cap 3) - 2) \cap 3) + 1) \cap 2) \cap 3)$$

