



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

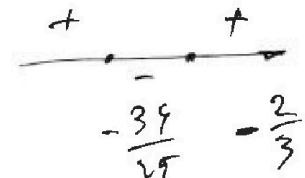


1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2-x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$



3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .



7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_1 = b$$

$$b_{10} = b \cdot 9^9$$

$$b_{12} = b \cdot 9^{11}$$

$$b_{18} = b \cdot 9^{17}$$

0 93:

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$x \in (-\infty; -\frac{34}{25}] \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

1 ступень  $b_{10} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{b_{18}}{b_{10}} = 9^8 = \sqrt[4]{\frac{(25x+34)(3x+2)^4}{(3x+2)^3 \cdot (25x+34)}} = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$\Rightarrow 9^2 = \sqrt[4]{|3x+2|} \Rightarrow 9^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

~~$$9^2 = \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = (2-x) \cdot \sqrt[4]{|3x+2|}$$~~

~~$$b_{18} = b_{10} \cdot 9^8 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$= \frac{1}{|3x+2|}$$~~

~~$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{|3x+2|}} = 2-x$$~~

~~$$(25x+34)^2 (3x+2)^2 = (2-x)^4 \cdot |3x+2|$$~~

~~$$(25x+34)^2 |3x+2| = (2-x)^4$$~~





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из   

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{b_{10} \cdot b_{18}} = b_{14}$$

см в

$$\frac{|25x+34|}{|3x+2|} = b_{14}$$

$$\frac{25x+34}{3x+2} \geq 0 \text{ с у } \neq 3$$

$$\left| \frac{25x+34}{3x+2} \right| = b_{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{25x+34}{3x+2} = b \cdot 9^{13} \\ 2-x = b \cdot 9^9 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22



0 <math>31</math>

$$x + 6 \geq 0$$

$$\del{3 - x - 2z} \geq 0$$

$$y - 3x - x^2 + 2z \geq 0 \quad (2)$$

$$400 - z^2 \geq 0$$

$$x \geq -6$$

$$-2z \geq x - 3$$

$$y - 3x - x^2 + 2z \geq 0$$

$$2z \geq x - 3$$

$$0 \leq |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400 - z^2}$$



~~31~~

$$(y+2)^2 + 4(y-18)^2 + 4|y+2||y-18| = 400 - z^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по формуле корней  $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

~~$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

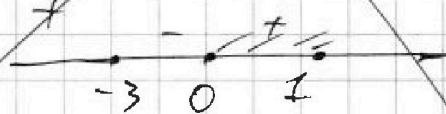
$p > 0$

~~$-1 \pm \sqrt{1-p} > p$~~

~~$\pm \sqrt{1-p} > p+1$~~

~~$1-p > p^2 + 2p + 1$~~

~~$\uparrow p^2 + 3p < 0$~~



~~$p > p > 0$~~

~~при  $p > 0$   
нет миним  
и макс  
не пересекае  
0 +~~

~~тогда  
минимум/макс  
не до  
ств  $(-1; 1)$~~

~~$\rightarrow$  нет  
 $f(t)$~~

~~монотон  
на  $[1; +\infty)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(t)$

у меня формула  $\Rightarrow$  точки на графике

$f(t) \geq 0 \quad t_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$~~   $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$   $(p > 0)$   
 $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \leq 1$

$1 > \sqrt{1-p} \leq p \leq 1 > 1$

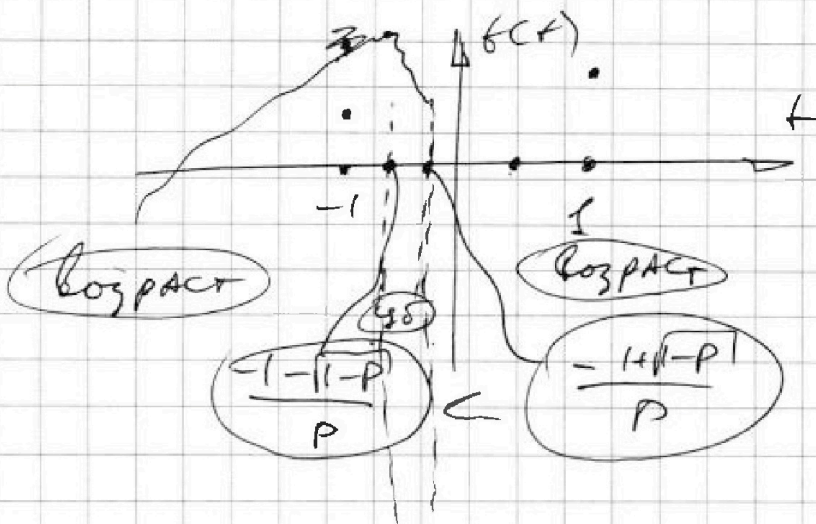
~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$~~   $\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$

$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} \geq -1$   
 $\sqrt{1-p} \geq 1-p$

$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \geq 1$   
 $\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \geq 1$   
 $-\sqrt{1-p} \geq p+1$   
 $\sqrt{1-p} \leq -1-p$

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -1$~~   $\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -1$

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -p$~~   $\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} \leq -p$   
 $1 < 1+p \leq \sqrt{1-p}$   
 $1 < 1$



$f\left(\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p}\right) > 0$   
 $\Rightarrow$  не решение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 случай  $p=0$

$$f(-1) = 4$$

$$f(1) = 28$$

$$f'(t) = 2t + 1$$



тогда найдем мин/макс

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13 > 0$$

⇒ нет решений

4 случай  $-7 < p < 0$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) > 0$$

$$f'(t) = 7t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 28}}{14} < 0$$

$$\Rightarrow f'(t) > 0$$

⇒  $f(t)$  — непрерывная

р.ч. не пересекает

5 случай  $p < -7$

$$f(-1) > 0$$

$$f(1) < 0$$

⇒ непрерывная ⇒ есть решение

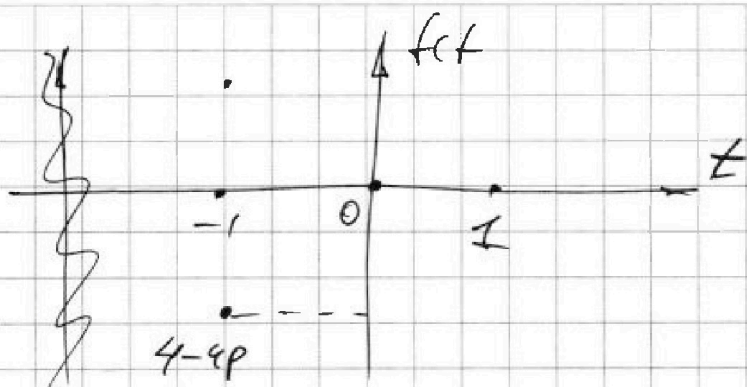


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) 1 ступ  $p \geq 4$   $f(-1) < 0$  /  $\Rightarrow$  есть решение  
 $f(1) > 0$  / т.ч. функция непрерывна  $f(x)$   
на  $[-1, 1]$

2) 2 ступ  $1 > p > 0$   $f(-1) > 0$  / решение  
 $f(1) > 0$  / максимум  $f(x)$   
рассмотрим на отрезке минимум  $f(x)$   
при этом условии  $f'(x) = 0$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

~~$$pt^2 + 2\sqrt{p}t + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 0$$~~

~~$$(\sqrt{p}t + \frac{1}{\sqrt{p}})^2 - \frac{1}{p} + 1 = 0$$~~

~~$$t = \pm 2$$~~

~~$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4p}}{2p} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$$~~

~~$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} \in [-1, 1]$$~~

~~$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-p}}{p} \in [-1, 1]$$~~

~~$$p^2$$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{23} \quad \cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\sin x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right.$$

$$p(4t^3 - 3t) + 6(2t^2 - 1) + 3(p+4)t + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$f(t) = 4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

~~$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$~~

~~$$f'(t) = 12pt^2 + 24t + 12 = 0$$~~

~~$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$~~

~~$$4f(pt^2 + 1) \quad f'(t) = 12pt^2 + 24t + 12 = 0$$~~

~~$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$~~

$$f(-1) = -4p + 12 - 12 + 4 = 4 - 4p$$

$$f(1) = 4p + 28$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

PZ 4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Т. треугольник  $\triangle CPE \sim \triangle CPE$

$$\frac{CP}{\sin \alpha} = \frac{EP}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} &= \frac{EP}{CP} = \frac{EP}{CB} = \\ &= \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta} \end{aligned}$$

б)  $\triangle CBP \Rightarrow \angle PAE = \angle CPB = \angle APE$

$\triangle APE$  - б.п. - ч

$\Rightarrow AP$  - биссектриса  $\angle CAE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$

$$\begin{aligned} AC &= 7 \text{ г} \\ AE &= 20 \text{ г} \end{aligned}$$

в) Т. треугольник  $\triangle ABC \sim \triangle ABE$

$$\frac{AC}{\sin \angle CPA} = 2R_1$$

$$\frac{AE}{\sin \angle ABE} = 2R_2$$

( $\sin \angle CPA = \sin \angle ABE$ )

$$\frac{AC}{AE} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{20}$$

г) по п. 4  $\Rightarrow$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{20}{7}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$$

д) по п. 4

$$\frac{EP}{CP} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{7}}$$

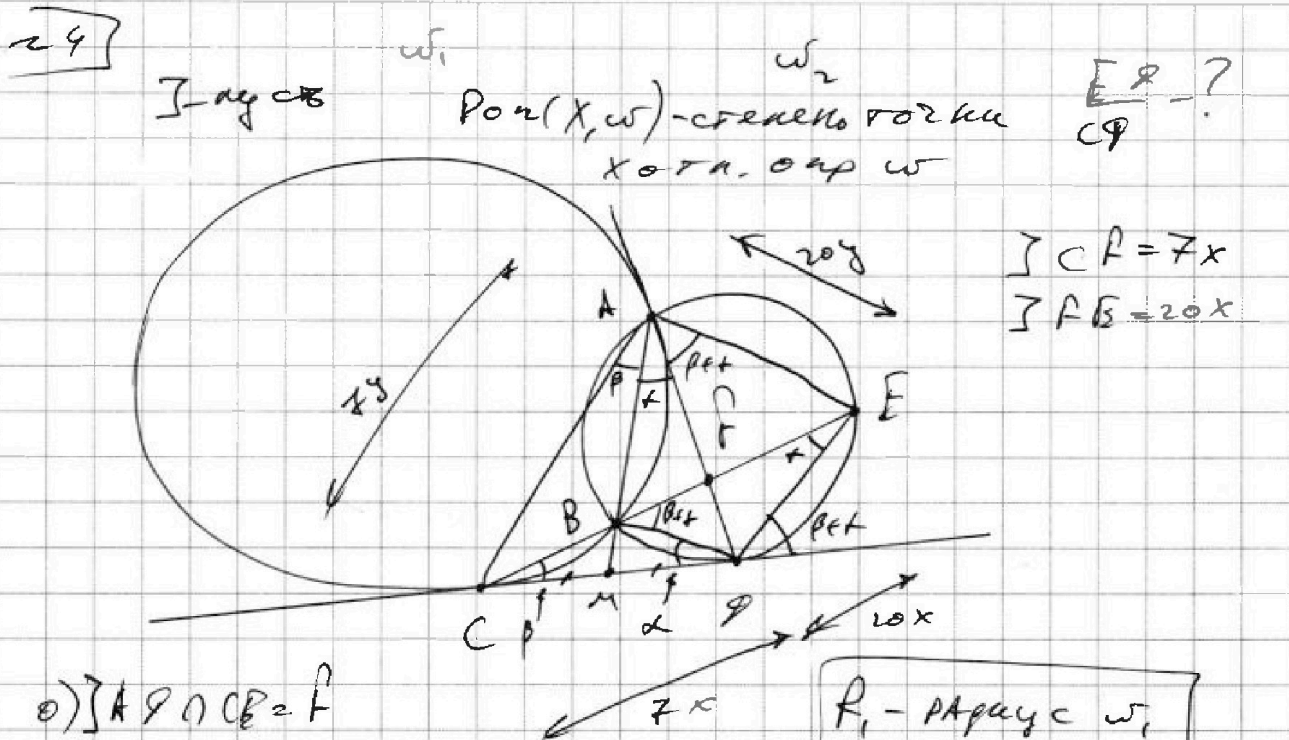
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



0)  $\Gamma \cap \varphi \cap \text{CB} = P$

$\Gamma \angle \text{CAN} = \angle \text{ABQ} = \alpha = \angle \text{BQC}$

AB-пар. осе  $\omega_1$  и  $\omega_2 \Rightarrow \Gamma \text{AB} \cap \text{CP} = M$

$\text{Pon}(M, \omega_1) = \text{Pon}(M, \omega_2) \Rightarrow \text{MC}^2 = \text{MQ}^2$

1)  $\Gamma \angle \text{CAM} = \beta = \angle \text{BCM}$  (из касания)

2)  $\triangle \text{CPE} \sim \triangle \text{CBQ}$  (по двум углам)

$\Rightarrow \frac{\text{CE}}{\text{CP}} = \frac{\text{CQ}}{\text{CB}}$

3) по т. синусов  $\triangle \text{ABC}$  и  $\triangle \text{ABQ}$

$\frac{\text{CB}}{\sin \beta} = 2R_1, \quad \frac{\text{BQ}}{\sin \alpha} = 2R_2 \Rightarrow \frac{\text{BQ}}{\text{BC}} = \frac{R_2 \sin \alpha}{R_1 \sin \beta}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

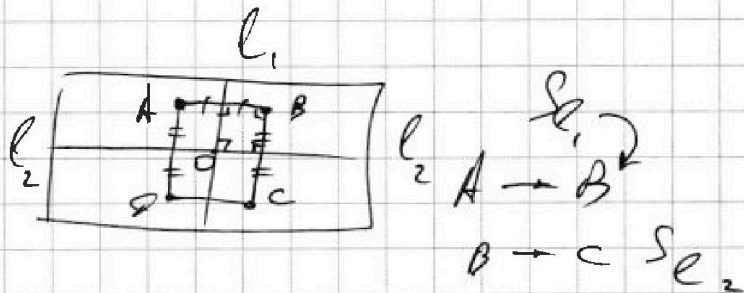
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) В симметрии отображают углы  
 центра симметрии симметрии  
 и углы

1)   $2CB + 2CB$



по т. Уинд

$A \rightarrow D (S_{l_1})$

$\Rightarrow A \in O$  является на одной  
 прямой с  $O$

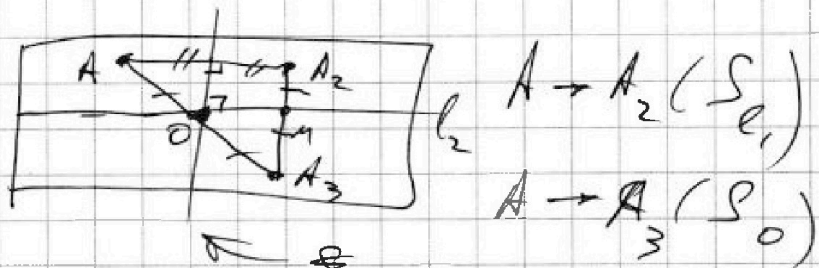
$\Rightarrow ABCD$  прямоугольник

( $AD \parallel BC, AD = BC$   
 $\Rightarrow$  паралл + угол  $\angle A = \angle C$ )

$\Rightarrow$  точка  $O$  является центральной

2)  $OB +$  центр

без  $OB$   $OB \Rightarrow$



$A \rightarrow A_2 (S_{l_1})$

$A \rightarrow A_3 (S_{l_2})$

(2)

$A_2 A_3 \parallel l_1 \Rightarrow \angle A_2 A_3 O = 90^\circ$

(2)

$AA_2 \parallel l_2$

$\Rightarrow O$  — центр

образует  
 углы  
 симметрией

$\Rightarrow A_2 A_3 \cap l_2 = M \in AA_2 \cap A_3 A_2$   
 $\Downarrow A_2 M = A_3 M$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

①  $120:2, 500:2 \rightarrow$  0-центр в центре досочки сетки



посчитаем число способов размещения флета чтобы он обладал симметрией

отн. центра ~~и др.~~  $A_1 - ?$ , (и возможно горизонтальной вертикальной диагональной)

отн. Гор. прямой (средней)  $A_2 - ?$

отн. Верт. прямой (средней)  $A_3 - ?$

для этого разделим прямоугольник

на две половинки по соот. средней

линии, а разместим там 4 флета

то  $\sum_{i=1}^4 C_n^4$  для всех трех

случаев получим их отн. центра

или соотв. средней. Получим

следующие 4 варианта итого

$$A_1 = C_n^4$$

$$A_2 = C_n^4$$

$$A_3 = C_n^4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) рассмотрим # размещем на доске  
которые образуют симметрии  
отн. в двух срезах (и возможно  
отн. центра)  
для этого возьмем четверть

кратчайшими

поп на рисунке

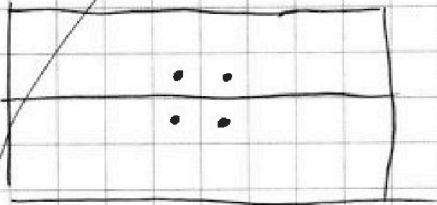
и выберем там две клетки

это  $C_{\frac{n}{2}}^2$  способов оставшиеся

$$A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$$

однозначно определяются по ним

3) # # размещем образуют  
одною из осей симметрии и  
центральной  $A_5$  (и возможно отн  
центральной оси)



приведем соответс



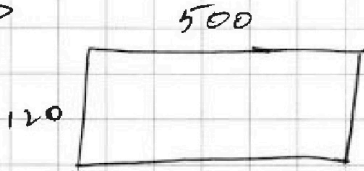
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

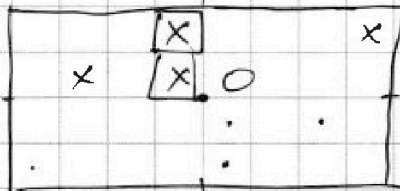
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25



отн. центра  
отн. середины  
# - поперек  
] - по с/б

1



$$n = 500 - 120 \cdot \frac{1}{2}$$

получим # способов

разместим фалеек т.ч. 2-го и 3-го б/г симметрично отн. к с/б.  $120; 2; 500; 2 \Rightarrow$  диаметр в пересечении

с/б. первую линию n способов  
вторую (n-2) т.ч. небыл в той же с  
в симметричную. третью (n-4) симм. н.о.  
четвертую (n-6) а оставшиеся 4-х сделаем  
и еще учтем углы в пересечениях с/б!  
(однозначно)  $A_1 = n(n-2)(n-4)(n-6) \cdot \frac{1}{8!}$

2) получаем # способов размещения

$$500 - 60 =$$

$$\approx 30000$$



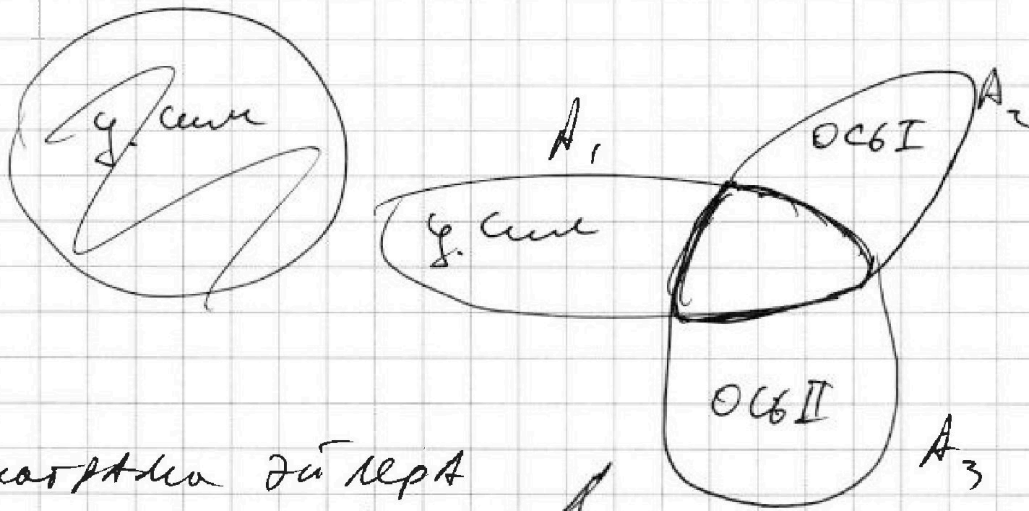


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



квадратная дилерская  
таблица

3) кол-во способов размещения  
элементов гонок образуют все  
симметричные  
возьмем дуги  $C_{\frac{n}{2}}^2$  - # способов  
выбрать тем 2 клетки  
остальные беспорядочно  
оразнообразно (yTB (см))  $A_4 = C_{\frac{n}{2}}^2$

итого у квадратной  $\Rightarrow$  общее число  
равно  $A_1 + A_2 + A_3 - 2 C_{\frac{n}{2}}^2 = 3 C_n^4 - 2 C_{\frac{n}{2}}^2$

$$= -2 C_{15000}^2 + 3 C_{30000}^4 \leftarrow \text{yTB!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~26) (a, b, c)~~

1)  $a < b$

2)  $b - a \neq 3$

3)  $(a - c)(b - c) = p^2$  - простое

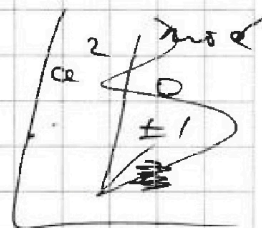
3)  $a^2 + b = 1000$

a	a <sup>2</sup> (mod 3)
0	0
1	1
2	0
3	1

a	a <sup>2</sup>
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	

a	a <sup>2</sup>
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	

3)  $a^2 + b = 0$   
4



1)  $a \equiv b \pmod{p} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$

$a^2 + b + c^2 + c(a + b) = p^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

26  $(a, b, c)$

1)  $a < b$

2)  $b - a \neq 3$

3)  $(a - c)(b - c) = a^2 + c^2 - c(a + b) = p^2$

4)  $a^2 + b = 1000$

$a$	$(\text{mod } 4) a^2$
$\equiv 1$	1
$\equiv 2$	0
0	0

1)  ~~$a^2 + b = 1000$~~

1)  $a \equiv 4 \quad b \equiv 4$

2)  $a \equiv 1 \quad b \equiv 3$

$a = 4k$   
 $b = 4d$

$16k^2 + 4d = 1000$

$4k^2 + d = 250$

$d \equiv 2 \Rightarrow d = 2l$

$4k^2 + 2l = 250$

$2k^2 + l = 125$

$l \equiv 1 \Rightarrow l = 2m + 1 = 16m + 8$

$2k^2 + 2m + 1 = 125$

$k^2 + m = 62$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 1000 - a^2$$

~~$$1) a \in 1000 - a^2$$~~

~~$$2) 1000 - a^2 - a \div 3 \Leftrightarrow 1000 - a(a+1) \div 3$$~~

~~$$(a+c)(b+c) = p^2$$~~

~~$$(a-c)(1000 - a^2 - c) = p^2$$~~

~~$$1000a - 1000c - a^3 + a^2c - ac + c^2 = p^2$$~~

~~$$(a+c) + c(b+c) = p$$~~

$$\text{уб)} \quad (a-c)(b-c) = p^2$$

$$1) \begin{cases} (a-c) \neq \pm 1 \\ (b-c) \neq \pm 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a-c = p = b-c$$

$$\Downarrow a = b \quad \text{но } a < b \quad \neq$$

$$2) \begin{cases} (a-c) = +1 \\ (b-c) = +p^2 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b < p^2+1 \\ a < b^2+p \end{cases}$$~~

$$a = c+1$$

$$b = p^2 + c$$

~~$$c+1 < c-p^2$$~~

~~$$1+p^2 < 0 \quad \neq$$~~

$$b = a \div 3$$

$$p^2 - 1 \div 3$$

$$p^2 \neq 1$$

$$\text{случ } p \neq 3 \quad \text{случ } p = 3$$

$$a' \mid (a')^2 \pmod{3}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{matrix}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
9 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c_{1,2} = \frac{-3 \pm 63}{2} \neq$$

$$c = \frac{-66}{2} = -33$$

$$c = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -33 \end{array} \right. \text{ (a)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 30 \end{array} \right.$$

проверки  
"все да"

$$\text{(b)} \quad c^2 = 17c - 920 =$$

$$c = \frac{17 \pm 63}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 40 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

$$- \frac{63 - 17}{2} = - \frac{46}{2} = 23$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 31 \\ b = 29 \\ c = 40 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -32 \\ b = -24 \\ c = -23 \end{array} \right.$$

проверки  
"все да"



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)  ~~$a^2 + b = c^2$~~

~~$a^2 + b = c^2 + 9 - 6c + c - 1 = 289$   
 $= c^2 - 5c + 8 = 1000$~~

~~$20 \cdot 9 = 360 \quad c^2 - 5c - 992 = 0$~~

~~$+ 289$   
 $3969$   
 $9 = 29 + 4 \cdot 992 = 11 \cdot 3$~~

~~$992 \overline{) 2}$   
 $496 \overline{) 2}$~~

~~$\Rightarrow c \notin \mathbb{Z}$~~

$c^2 + 81 - 18c + c - 1 = 1000$   
 $c^2 - 17c + 920 = 0$

$3969 \overline{) 3}$   
 $1323 \overline{) 3}$   
 $441 \overline{) 7}$   
 $63 \overline{) 7}$   
 $9$

~~$121$   
 $121 \overline{) 121}$   
 $337$~~

$3969 \overline{) 11}$   
 $3$

$4000$   
 $\underline{- 32}$   
 $3968$   
 $+ 25$   
 $3993 \overline{) 11}$   
 $363 \overline{) 11}$   
 $33 \overline{) 11}$   
 $3$

6) 2.1)  $p = 3$

~~$a - c = 1$   
 $b - c = 9$~~   $\begin{cases} a = c + 1 \\ b = 9 + c \end{cases}$

$25 \cdot 2 \cdot 11$   
 $(1000 - 10) \cdot 4 =$   
 $= 4000 - 40$   
 $= 3960$

$a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000$

$c = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 3960}}{2}$   
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3}}{2}$

$c^2 + 3c + 10 = 1000$

$c^2 + 3c = 990$

~~$c \in \mathbb{Z}$~~   $\Rightarrow c(c + 3) = 990$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2)  $(a-c) = 1$   
 $(b-c) = p^2$~~   
множители

$x^0$  - противоречие

3)  $(a-c) = -1$   
 $(b-c) = p^2$   $\Rightarrow$   $a = c - 1$   
 $b = c - p^2$

$a < b$   
 $c - 1 < c - p^2$   
 $p^2 < 1 \quad x^0$

4)  $(a-c) = p^2$   
 $(b-c) = 1$   $\Rightarrow$   $a = p^2 + c$   
 $b = 1 + c$

$p^2 < 1 \quad (a < b)$   
 $\Rightarrow x^0$

5)  $(a-c) = -p^2$   
 $(b-c) = -1$   $\Rightarrow$   $a = c - p^2$   
 $b = c - 1$

$a < b \quad \odot$

$b - a = -1 + p^2 \neq 3$

из п. 2  $\Rightarrow p = 3$

$\Rightarrow \begin{cases} a = c - 9 \\ b = c - 1 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кривая задана на координатной

системе  $\triangle ABC$  на координатной

системе  $\vec{AB}$  в данной задаче

$\vec{BB_1} \perp \vec{AC}$  (дог-от  $\perp$   $\vec{AB}$ )

$\Rightarrow (\vec{BB_1} = \vec{AA_1} = \vec{CC_1})$

$\Rightarrow \vec{AA_1} \perp \vec{AC}, \vec{CC_1} \perp \vec{AC}$

$\Rightarrow A, C, C_1$  — принадлежат одной прямой

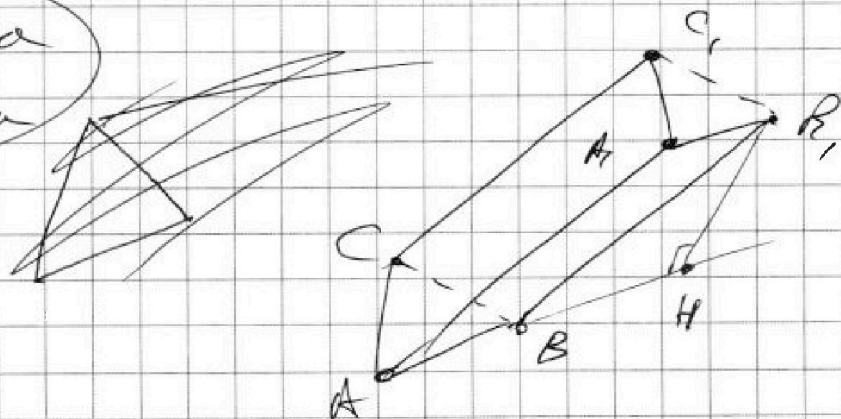
$\sum \vec{CC_1}, \vec{CA} = 5 = a \cdot \vec{AA_1} \Rightarrow \vec{AA_1} = \frac{5}{a}$

$\sum \vec{AA_1}, \vec{AB} = 6 \Rightarrow \vec{BB_1} = \frac{6}{a}$

Т. к.  $\triangle BB_1K \Rightarrow KB^2 = \frac{25}{a^2} - \frac{36}{a^2} < 0$

$\Rightarrow$  кривая — прямая

3 варианта  
исчерпаны







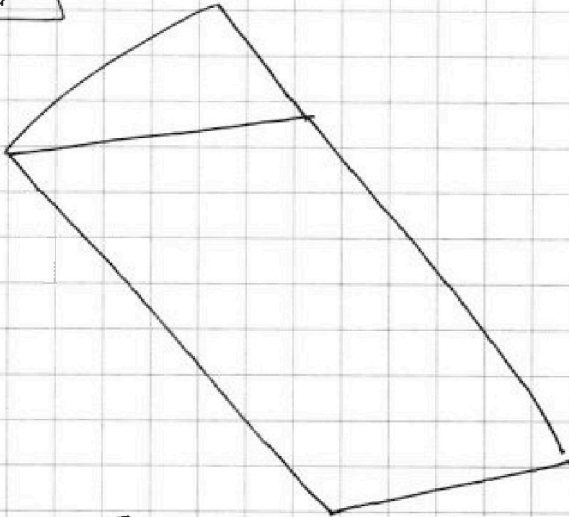
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
← ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

27



$$\angle AB = a$$

$$\Rightarrow S_{A, B, AB} = S_{C, B, BC} = b$$

$$\angle B_1 K \perp AB, K \in AD$$

$$B_1 L \perp AB, L \in CD$$

$$\Rightarrow B_1 K = B_1 L$$

$$B_1 \in (ABC)$$

$$\triangle B_0 B_1 L = \triangle B_0 B_1 K$$

по т. о з х

$$\Rightarrow B_0 L = B_0 K$$

по т. о з х  $\perp AC$

$$(B_0 L \perp AC \Rightarrow \angle B_0 K B = 90^\circ)$$

$$B_0 B_1 L = \triangle B_0 B_1 K$$

по кат и гип

$$\Rightarrow B_0 B_1 - \text{висс}$$

$$\perp ABC$$

$$B_0 B_1 \perp AC \quad (BC = AB)$$

$$B_0 B_1 \cap AC = M$$

M - сеп AC

по т. о з х  $\perp AC$   $B_1 M \perp AC$

по т. о проецировки висс  $B_0 B_1 \cap AC = M$

$$(\angle B_0 B_1 A = \angle B_0 B_1 C) \Rightarrow$$

$$\angle A B_1 A_1 = \angle C B_1 C_1$$

$$AB_1 \perp AC \quad CB_1 \perp AC$$

$$S_{A, B_1, BA} = S_{C, B_1, BC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

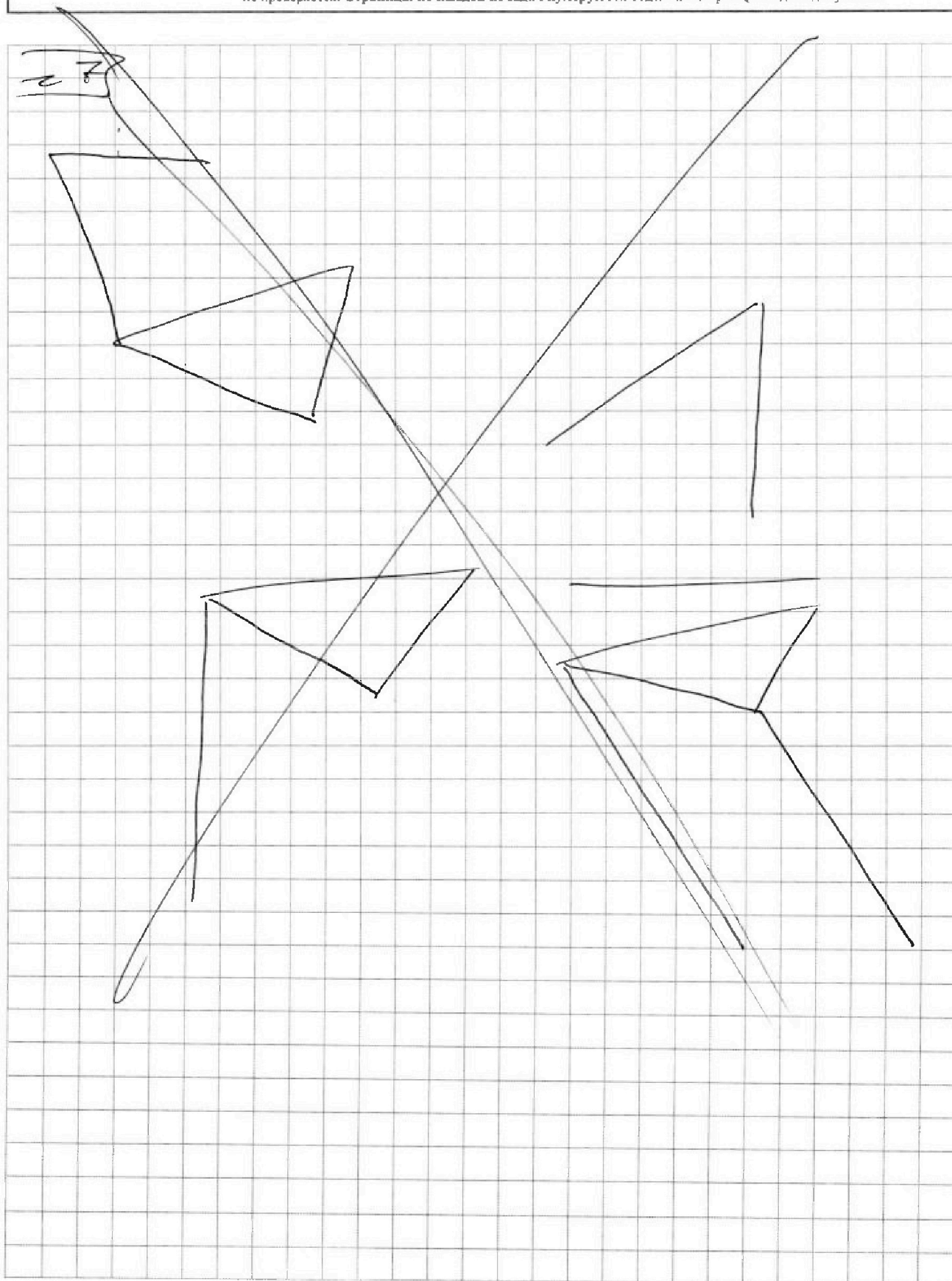
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







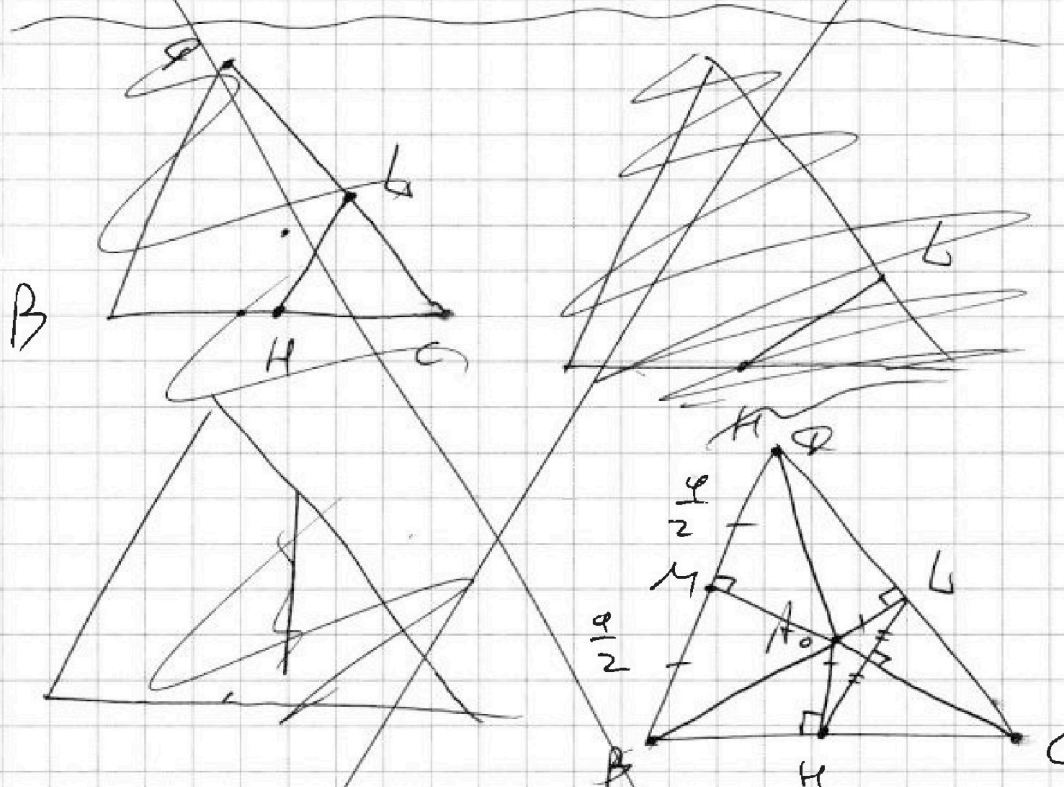
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ГОТОВИТЬ  $\perp$  РАД:  $\angle PMA_0 = 90^\circ \angle A_0LC$   
 $\angle A_0M \Rightarrow \dots$



$A_0L = A_0H$  (из 1, 2)  $\Delta A_0CL = \Delta A_0CH$   
 (кр. кат)

$\Rightarrow A_0C$  - бисс  $\angle ACB$   $A_0C \perp AB \Rightarrow M$   
 (т.к.  $A_0M \perp BC$ )  $A_0C \perp HL$  (из симметрии  $A_0$ )

$S_{ABH} = \frac{AM \cdot a}{2} = 5 \Rightarrow AM = \frac{10}{a} \Rightarrow AA_0 = p$

по т. Пифагора в  $\Delta A_0M \Rightarrow AM^2 - AA_0^2 = MA_0^2$   
 $MA_0^2 = \frac{100}{a^2} - p^2$

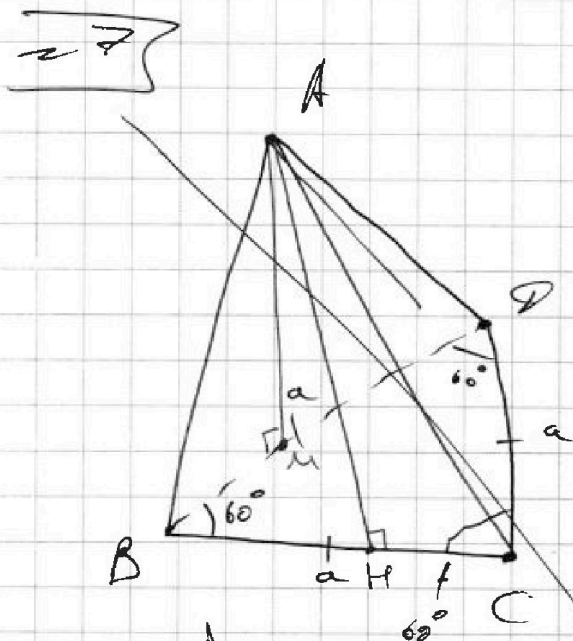


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \quad ] \quad B D = a$$

$$B D = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2a$$

$$2) \quad S_{BCD} = \frac{B D \cdot \sqrt{3}}{4} = 4$$

$] \quad A H \perp B C, H \in B C$

$A D \perp B C, D \in B C$

$A L \perp B C, L \in B C$

$\Rightarrow$

без отрезка

$$S_{ABC} = S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{A H \cdot B C}{2} = \frac{A D \cdot A C}{2} = b$$

$$\Rightarrow A H = A L = \frac{12}{a}$$

$] \quad A Q \perp H L, Q \in H L$

$\times \quad A H L - \text{пр. б. в.}$

$$Q L = Q H$$

2)  $Q$  - середина  $H L$

$] \quad A A_0 \perp B C, A_0 \in (B C D)$

$\text{прямые } A A_0 \text{ и } A A_0 \perp$

равны по катетам  $\Rightarrow A_0 L = A_0 H \Rightarrow A_0 \in \ell$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~27~~  $\triangle ABC \sim \triangle AA_0L \Rightarrow A_0L^2 = AL^2 - AA_0^2$

$$A_0L^2 = \frac{144}{a^2} - p^2 = A_0H^2$$

$$S_{\triangle AA_0B} = S_{\triangle A_0CB} - 2S_{\triangle A_0OC} =$$

$$= 4 - A_0H \cdot a = \frac{AA_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - A_0H \cdot a = \frac{AA_0 \cdot a}{2}$$

$$4 - \sqrt{\left(\frac{144}{a^2} - p^2\right) a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{a^2} - p^2\right) a^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} p^2 a^2 = t \quad 4 - \sqrt{144 - p^2 a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{100 - p^2 a^2}$$

$$16 + 144 - t - \sqrt{144 - t} = \frac{1}{4} (100 - t)$$

$$160 - t - \sqrt{144 - t} = 25 - \frac{t}{4}$$

$$135 - \sqrt{144 - t} = \frac{3t}{4}$$

$$135 - \frac{3t}{4} = \sqrt{144 - t}$$

$$540 - 3t = 32 \sqrt{144 - t}$$

$$540^2 + 9t^2 - 6 \cdot 540t = 32^2 (144 - t)$$

~~135 \cdot 4 = 540~~  
~~540~~  
~~135 \cdot 3 = 405~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) 3 ступ  $p > 0$

~~$f(-1) = 4$~~

~~$f(1) = 2p$~~

~~$f'(x) = 2x + 1$~~

~~точка мин / макс  
полюс / минус  
точка p f=~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

$p > 0$

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p$~~

~~$0 < \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < p - 1 < 0$~~

не выполняется  
неравенства

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$\frac{-1 - \sqrt{1-p}}{p} < p$~~

~~$\frac{1 + \sqrt{1-p}}{p} > 1$~~

~~$\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1$   
 $\frac{\sqrt{1-p}}{1} < \frac{p+1}{1}$~~

~~$\frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} > -1$~~

~~$0 < \frac{-1 + \sqrt{1-p}}{p} < 1 - p < 0$~~

~~$1 - p < 1 + 2p + p^2$   
 $0 < p^2 - p$~~







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

