



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен

$$\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}, \text{ двенадцатый член равен } 2 - x, \text{ а восемнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1.

Пусть первый член прогрессии равен b , знаменатель равен q .

Тогда по условию $b \cdot q^9 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$,
 $b \cdot q^{11} = 2-x$, $b \cdot q^{17} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) \geq 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} \geq 0 \\ (3x+2)^3 \neq 0 \Rightarrow 3x+2 \neq 0 \end{cases}$$

Если $b=0$ или $q=0$, то $b \cdot q^9 = 0$ и

$b \cdot q^{11} = 0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$, но при $x=2$

$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \neq 0$. Значит $b \neq 0, q \neq 0$.
 Также отсюда $25x+34 \neq 0$.

$\frac{b \cdot q^{17}}{b \cdot q^9} = q^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}} = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}.$

$q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$q^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$ (м.к. $q^2 \geq 0$).

$\frac{1}{\sqrt{3x+2}} = q^2 = \frac{b \cdot q^{11}}{b \cdot q^9} = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x+2} = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

I случай ($3x+2 > 0$):

$$\frac{1}{\sqrt{3x+2}} = \frac{2-x}{\sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{25x+34}} \quad | \cdot \sqrt{3x+2}$$

$$1 = \frac{2-x}{\sqrt{25x+34}}$$

$$\sqrt{25x+34} = 2-x$$

$$\begin{cases} 25x+34 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

$$25x+34 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$

$$(x+1)(x-30) = 0$$

$x = -1$ - не подходит, т.к. $3x+2 > 0$

$x = 30$ - не подходит, т.к. $2-x > 0$

II случай ($3x+2 < 0$):

$$\sqrt{3x+2} = -3x-2$$

$$\frac{1}{\sqrt{-3x-2}} = \frac{2-x}{\sqrt{-3x-2} \cdot \sqrt{-25x-34}} \quad | \cdot \sqrt{-3x-2}$$

$$1 = \frac{2-x}{\sqrt{-25x-34}}$$

$$\sqrt{-25x-34} = 2-x$$

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ -25x-34 > 0 \end{cases}$$



1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 4x + 4 = -25x - 34$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0$$

$$(x+2)(x+19) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$$

Проверка:

1) $x = -2$:

$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{(-50+34)(-6+2)} = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$2 - x = 4$$

$$\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = \sqrt{\frac{-50+34}{(-6+2)^3}} = \sqrt{\frac{16}{4^3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Пусть $q = \sqrt{2}$ и $b = 128\sqrt{2}$:

$$b \cdot q^3 = 8, \quad b \cdot q^4 = 4, \quad b \cdot q^{17} = \frac{1}{2}$$

2) $x = -19$:

$$(25x+34)(3x+2) > 0$$

$$\frac{25x+34}{(3x+2)^3} > 0$$

$$3x+2 < 0$$

$$2 - x > 0$$

$$-25x - 34 > 0$$

Ответ: $x = -2$ или $x = -19$.

Все условия выполнены, преобразования равносильны, подра. b и q найдутся. ~~однозначно~~
 ~~$(q^2 = 1/3x+2)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

023:

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x-2z \geq 0 \\ y-3x-x^2+z \geq 0 \\ 400-z^2 \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что $z^2 \geq 0 \Rightarrow 400 - z^2 \leq 400 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{400 - z^2} \leq 20$

$$|y+2| + 2|y-18| \geq |y+2| + \underbrace{|y-18|}_{\leq 20} \quad (\text{т.к. } |y-18| \geq 0)$$

(т.к. $|y+2|$ - расстояние от т. y до т. -2 на числ. прямой, $|y-18|$ - расстояние от т. y до т. 18 на числ. прямой $\Rightarrow$
 $\Rightarrow |y+2| + |y-18| \geq$ расст. между -2 и $18 = 20$
(р-во достигается когда $y \in [-2, 18]$).

Отсюда $|y+2| + 2|y-18| \geq \sqrt{400 - z^2}$

значит & нер-во достигается

рав-во:

$$\begin{cases} |y-18| = 0 \Rightarrow y = 18 \\ z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим найденные y и z в первое уравнение системы:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{x^2-3x+18}$$

$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{-(x+6)(x-3)}$$

$$\sqrt{x+6} + 7 = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6 \end{cases}$$

$$x \in [-6; 3]$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 \geq 0$$

$$\cancel{x+6} + \cancel{3-x} + \frac{14}{2} + 14\sqrt{x+6} - 14\sqrt{3-x} = 4(x+6)(3-x)$$

$$16 + 14(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}) = 4(x+6)(3-x)$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

$$2\sqrt{(x+6)(3-x)} = \frac{1}{2}$$

$$16 + 14\left(\frac{1}{2} - 7\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - 14 + 14 \cdot 7 - 16 = 0$$

$$\frac{1}{2} - 14 + 82 = 0$$

$$(x+6) + (3-x) + 49 - 2\sqrt{(3-x)(x+6)} + 14\sqrt{x+6} - 14\sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(3-x)(x+6)} = t$$

$$9 + 49 - t + 14(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}) = t^2$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(3-x)(x+6)} - 7 = t - 7$$

$$58 - t + 14t - 14 \cdot 7 = t^2$$

$$t^2 = 13t - 40$$

$$t^2 - 13t + 40 = 0$$

$$(t-5)(t-8) = 0$$

$$\begin{cases} t=5 \\ t=8 \end{cases}$$

1) $t=8$:

$$\sqrt{(3-x)(x+6)} = \frac{t}{2} = 4$$

$$(3-x)(x+6) = 16$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 = 17$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$-\frac{4}{2} = \frac{-3-5}{2} < \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < \frac{-3-4}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-3+4}{2} < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} < \frac{-3+5}{2} = 1$$

- удов. 023



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $t=5$:

$$\sqrt{(3-x)(x+6)} = \frac{5}{2}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = \frac{25}{4}$$

$$-4x^2 - 12x + 72 = 25$$

$$4x^2 + 12x - 47 = 0$$

$$d = 36 + 4 \cdot 47 = 36 + 160 + 28 = 224$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{224}}{4}$$

$$\frac{-21-6-15}{4} < \frac{-6-\sqrt{224}}{4} < \frac{-6-14}{4} = -\frac{20}{4} = -5$$

$$2 = \frac{8}{4} < \frac{-6+14}{4} < \frac{-6+\sqrt{224}}{4} < \frac{-6+15}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{— упр. 003}$$

Ответ: $\left(\frac{-6-\sqrt{224}}{4}, 18, 0\right); \left(\frac{-6+\sqrt{224}}{4}, 18, 0\right);$
 $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 18, 0\right); \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, 18, 0\right).$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3.

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 \cos 2x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 6 \cos 2x - 3p \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 6(2 \cos^2 x - 1) + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)^3 + (p-1) \cos^3 x = 0$$

Пусть $t = \cos x$. Тогда если t -решение и $t \in [-1, 1]$, то $\cos x = t$ также имеет решение $\Rightarrow \exists$ необходимый x . И.е.

нужно, чтобы

$$(t+1)^3 + (p-1)t^3 = 0$$

имело решение на $[-1, 1]$.

$$(t+1)^3 = (1-p)t^3$$

$$t+1 = \sqrt[3]{1-p} t$$

при $\sqrt[3]{1-p} = 1$ решений нет. Иначе:

$$t(\sqrt[3]{1-p} - 1) = -1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1}$$

Нужно, чтобы $|t| \leq 1$. И.е.

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \right| \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-p}-1} \leq 1 \quad | \cdot \sqrt[3]{1-p}-1| > 0$$

$$|\sqrt[3]{1-p}-1| \geq 1$$

$$1) \sqrt[3]{1-p}-1 \leq -1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \leq 0$$

$$1-p \leq 0$$

$$p \geq 1$$

$$2) \sqrt[3]{1-p}-1 \geq 1$$

$$\sqrt[3]{1-p} \geq 2$$

$$1-p \geq 8$$

$$p \leq -7$$

~~Приведённые~~ Приведённые преобразования эквивалентны, т.е. при данных p найдётся подх. $t \in [-1, 1]$, а значит и подх. x .

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty).$$

-7 включена



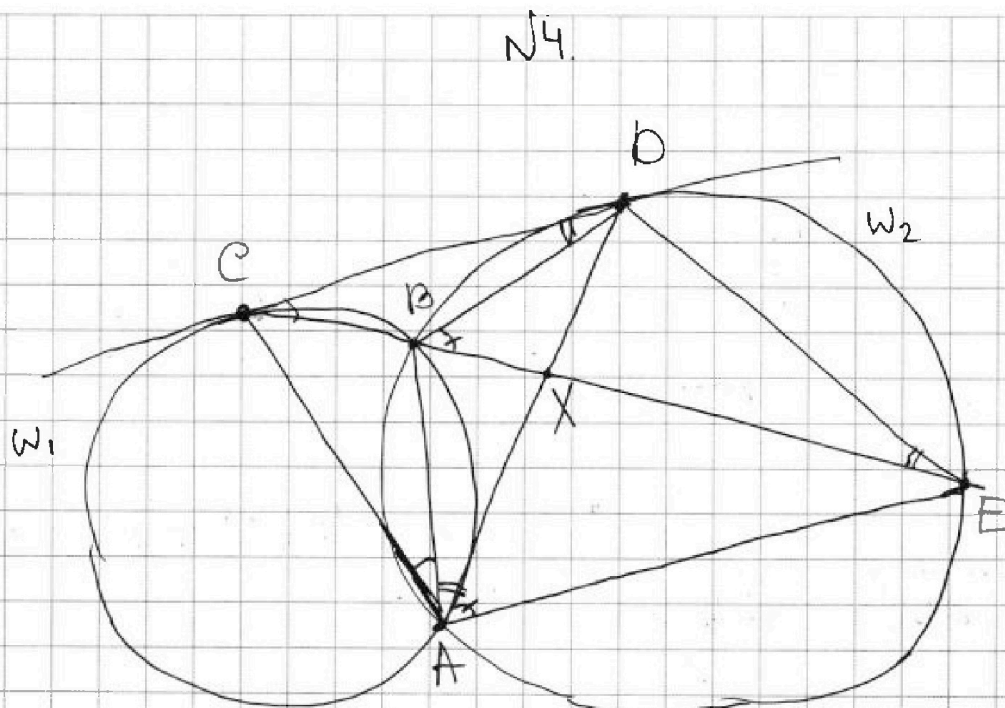
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$\angle BCB = \angle CAB$ (углы между кас. и хордой)

$\angle BDC = \angle BAD$ (углы между кас. и хордой)

$\Rightarrow \angle CAD = \angle BCB + \angle BDC$

$\angle DBE = \angle BCB + \angle BDC$ (внешний для $\triangle BCB$)

$\Rightarrow \angle CAD = \angle DBE$

$\angle DBE = \angle DAE$ (вн. уг. на DE)

$\Rightarrow \angle CAD = \angle DAE$

Пусть CE пересекает AD в м. X $\Rightarrow$ $\triangle CAE$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CX}{XE} = \frac{CA}{AE}$ (по т. о бис.) $\Rightarrow$

По $\frac{CX}{XE} = \frac{CA}{AE}$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{CA}{AE} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{AC}{\sin \angle CBA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB} \quad (\text{по т. синусов для } \triangle ABC)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle CAB}$$

$$\angle DBE = \angle DAE$$

$$\angle BXD = \angle AXE \quad (\text{верт.})$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AE} = \frac{DX}{XE}$$

$$\Rightarrow \triangle BXD \sim \triangle AXE \Rightarrow$$

по т. синусов для $\triangle DEX$:

$$\frac{XD}{\sin \angle XED} = \frac{XE}{\sin \angle XDE} \Rightarrow \frac{DX}{XE} = \frac{\sin \angle XED}{\sin \angle XDE} =$$

$$= \frac{\sin \angle XED}{\sin \angle ABE} \quad (\angle ABE = \angle ADE \text{ — впис. опр. на } \overline{AE})$$

$$= \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABE} \quad (\angle BAD = \angle BED, \text{ опр. на } \overline{BD}) =$$

$$= \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CBA} \quad (\sin \angle CBA = \sin \angle ABE, \text{ т.к. } \angle ABE + \angle CBA = 180^\circ)$$

$$\text{Значит } \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AE} = \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle CAB} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CBA} =$$

$$= \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAB} = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \angle BCD} \quad (\angle CAB = \angle BCD, \angle BDC = \angle BAD)$$

по т. синусов для $\triangle CBD$:

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle BCD} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle BDC}$$

$$\text{Итого } \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AE} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{AE} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{AE} =$$

$$= \frac{7}{20}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7}{20}$$

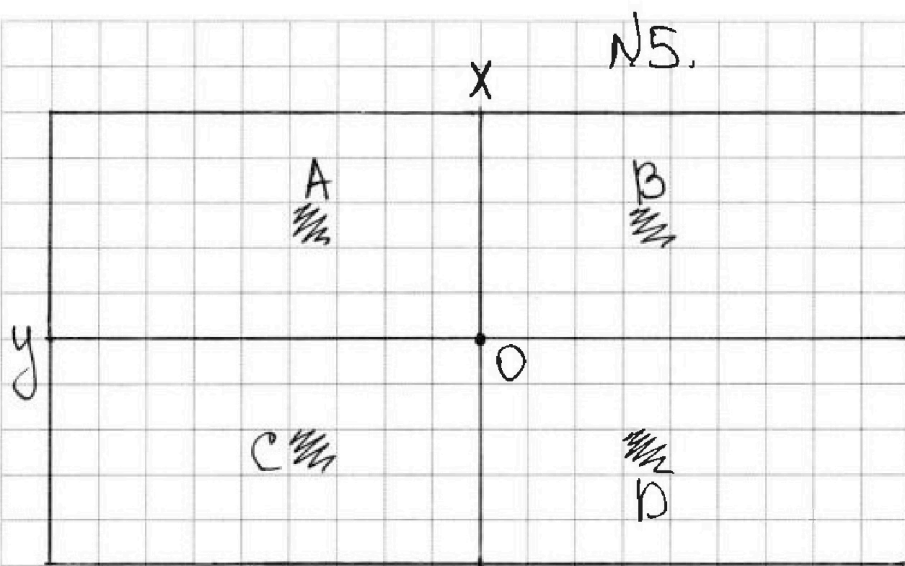


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть x, y - средние линии прям., O - его центр. Тогда $x \perp y$.

Пусть при отр. отр. x клетка A ~~переходит~~ переходит в клетку B , а при отр. отр. y - в клетку C . Пусть при отр. отр. y клетка B переходит в клетку D . Тогда $AB \perp x \Rightarrow AB \parallel y$, $AC \perp y \Rightarrow AC \parallel x$, $BD \perp y \Rightarrow BD \parallel x$, $AC = BD$, т.к. $AC = 2p(A, y)$, а $BD = 2p(B, y)$, из ссл. $p(A, y) = p(B, y)$ (здесь $p(A, y)$ - расстояние от точки A до прямой y). Отсюда $ABDC$ - прям.,



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

из см. x и y -го средних линий.
Значит O -центр $ABCD$. И.е.

при см. отн. O $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$
($\rightarrow$ озн. "переходит").

Значит если mn -во см. отн.
обеих средних линий, то оно
см. и отн. центра O .

* Пусть mn -во см. отн. одной
ср. линии (например x) и центра.

Тогда если т. $A \in mn$ -ву, то B
и $D \in mn$ -ву из см. Но раз $D \in$
 mn -ву, то и $C \in mn$ -ву (см. отн. x).

Значит mn -во см. и отн. y тоже.

Это означает, что из ~~двух~~ см.
автоматически следует ~~и~~ третья.

Пусть N_1, N_2, N_3 -кол-во способов
выбрать 8 точек так, чтобы mn -во
обладало см. 1, 2 и 3 вида соотв.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То формуле включений-исключений:

~~###~~

$$N_1 \cup N_2 \cup N_3 = N_1 + N_2 + N_3 - N_1 \cap N_2 - N_1 \cap N_3 - N_2 \cap N_3 + N_1 \cap N_2 \cap N_3 = N_1 + N_2 + N_3 - 2N_1 \cap N_2$$

(следует из доказанного выше).

~~###~~ Посчитаем $N_1 \cup N_2$. ~~###~~ Выберем произвольную т. А (~~450 · 200~~ 500 · 120 способ). т. В, С, D опр. аналогично и лежат в мк-ве. Далее из ост. точек выберем т. А' (т. В', С', D' опр. аналогично и лежат в мк-ве) 500 · 120 - 4 способа. Итого способов 500 · 120 · (500 · 120 - 4) = $N_1 \cup N_2$.

Посчитаем $N_1 \cap N_2 \cap N_3$. Выберем произв. т. А. Отразим её ^{с помощью сим.} получим А'. ^{А' ∈ мк-ву} Выберем одну из оставшихся кн. X. Отразим её, получим X'. Выберем одну из ост. т. Y → Y'.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

И наконец выберем одну из
ост. кл. $Z \rightarrow Z'$. Итого способов:

$$500 \cdot 120 \cdot (500 - 120 - 2) \cdot (500 - 120 - 4) (500 - 120 - 6)$$

Подставляем в формулу и получаем:

$$3 \cdot 500 \cdot 120 (500 - 120 - 2) \cdot (500 - 120 - 4) (500 - 120 - 6) -$$

$$- 2 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500 - 120 - 4) \cdot \cancel{500 - 120}$$

$$\cancel{(500 - 120 - 4) (3 \cdot (500 - 120 - 2) (500 - 120 - 6))}$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500 - 120 - 2) (500 - 120 - 4) \cdot$$

$$(500 - 120 - 6) - 2 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500 - 120 - 4) \cdot$$

* Прим.: В данном решении клетки
(кл.) также называются точками
(т.).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a < b \Rightarrow a-c < b-c$$

$$\text{Если } a-c = p, \text{ то } b-c = p \Rightarrow a = b \quad \textcircled{\times}$$

$$\text{Если } a-c = -p, \text{ то } b-c = -p \Rightarrow a = b \quad \textcircled{\times}$$

$$\text{III. к. } p - \text{простое; } a-c, b-c \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ или}$$

$$\text{или } \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

III. к. $|p^2| > 1$, 2 и 3 случая невозможны

$$\text{ны } (a-c < b-c),$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

I случай $(a-c = 1)$:

$$\begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b = (c+1)^2 + c + p^2 = c^2 + 2c + 1 + c + p^2$$

$$= c^2 + 3c + p^2 + 1 = 1000$$

$$c^2 + 3c + p^2 = 999$$

$$\cancel{c^2 + 3c} \quad c^2 + 3c + \frac{9}{4} = \left(c + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$c^2 + 3c \geq -\frac{9}{4} \geq -3$$

$$p^2 = 999 - c^2 - 3c \leq 1002$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дл.к. $\begin{pmatrix} 1^2 \equiv 1 \\ 2^2 \equiv 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3^2 \equiv 1 \\ 4^2 \equiv 1 \end{pmatrix}$

Дл.е. $p: 3 \Rightarrow p=3$

$$a = c - 9, \quad b = c - 1$$

$$a^2 + b^2 = (c - 9)^2 + c - 1 = c^2 - 18c + 81 + c - 1 =$$

$$= c^2 - 17c + 80 = \cancel{990} 1000$$

$$c^2 - 17c = 920$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 920 = 289 + 3680 = 3969 = 63^2$$

$$c_1 = \frac{17 + 63}{2} = \frac{80}{2} = 40 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{17 - 63}{2} = \frac{-46}{2} = -23 \Rightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \end{cases}$$

Ответ: $(31, 39, 40); (-32, -24, -23);$
 $(-32, -24, -33); (31, 39, 30).$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$X^2 - 6$$

$$-X \leq 6$$

$$3 - X - 2Z \geq 0$$

$$X + 6 = 3 - X \quad Z \in [-20, 20]$$

$$X + 2Z \leq 3$$

$$2X^2 - 3$$

$$2Z \leq 3 - X \leq 9$$

$$X = -\frac{3}{2}$$

$$6 + 3 + 40 = 49$$

$$4(3-X)(X+6) = 25$$

$$-X^2 - 3X + 18 = \frac{25}{4}$$

$$-X^2 - 3X + Y + Z \geq 0$$

$$\sqrt{3-X} \cdot (\sqrt{4X+6} + 1) \cdot Y - 12X - 4X^2 + 4Z \geq X+6$$

$$-4X^2 - 12X + 7Z = 25$$

$$-\frac{3-\sqrt{17}}{2} X^2 + 3X \leq Y + Z$$

$$4X^2 + 13X + 6 \leq 4(Y+Z)$$

$$4X^2 + 12X - 47 = 0$$

$$\sqrt{X+6} + 7 = 2\sqrt{4-3X-X^2+Z} + \sqrt{3-X-2Z}$$

$$14Y + 4 \cdot 4 \cdot 47$$

$$9 + 4 \cdot 2 = 17$$

$$98 - 16 = 72$$

$$7 \cdot 14 - 16 = 98 - 16 = 92 - 10 = 82$$

$$16 \cdot 47$$

$$640 + 704$$

$$+ 42 = 112 + 640 = 752$$

$$\rho \cos$$

$$\rho \cos 3X + 6 \cos 2X + 3(p+4) \cos X + 10 = 0$$

$$C_1 \quad C_2 \quad C_3$$

$$C_1 = 500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120)$$

$$\cdot (500 - 120 - 4) \cdot (500 \cdot 120)$$

$$C_2 = C_1$$

$$C_3 = C_1$$

$$a + 7 = b + 2$$

$$a^2 - b^2 = 9$$

$$a - b = 2ab - 7$$

$$9 = (2ab - 7)(a + b)$$

$$(500 - 120)(500 \cdot 120 - 4)$$

$$X^2 + 3X - 18 \leq 0$$

$$(X+6)(X-3) \leq 0$$

$$X^2 + 3X \leq 18$$

$$18 - X(X+3)$$

$$X^2 + 3X \leq 18$$

$$|Y+2| + |Y-18| \geq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$Z = 0$$

$$3n - 2m$$

$$18 - X(X+3)$$

$$X^2 + 3X \leq 18$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$|Y+2| + 2|Y-18| \leq 20$$

$$\sqrt{X+6}$$

$$X+6 \geq 0$$

$$X^2 - 3$$

$$3 - X \geq 0$$

$$X \leq 3$$

$$Z = 2$$

$$X(X-3)$$

$$-3 \cdot -6 = 18$$

$$-3 \cdot -6 = 18$$

$$-3 \cdot -6 = 18$$

$$-3 \cdot -6 = 18$$

$$-3 \cdot -6 = 18$$

$$-3 \cdot -6 = 18$$

$$\sqrt{X+6} + 7 = \sqrt{3-X} + 2\sqrt{X^2-3X+18}$$

$$2\sqrt{X^2-3X+18} = \sqrt{X+6} + \sqrt{3-X} + 7$$

$$4(X^2-3X+18) = 9 + 49 + 14\sqrt{X+6} - 14\sqrt{3-X}$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$-2\sqrt{X+6}(3-X)$$

$$X \in [-6, 3]$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

$$\sqrt{X+6} \leq 9 \geq 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

$$-x^2 - 3x + 18 = -(x^2 + 3x - 18) = -(x-3)(x+6)$$

$$= (3-x)(x+6)$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$5\cos 3x + 6\cos 2x +$$

$$+ 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(3-x)(x+6)}$$

$$\sqrt{(3-x)(x+6)} = p$$

$$(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$5\cos 3x + 6\cos$$

$$x+6 + 3-x + 49 + 14(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} =$$

$$= 4p^2 (\cos x + 1)^3 + (p-1)\cos^3 x = 0$$

$$14(2p-7)$$

$$4\cos^3 x + 6(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x + 10 = 0$$

$$4p^2 = 58 + 28p - 98 - 2p$$

$$4p^2 - 26p + 40 = 0$$

$$(t+1)^3 + (p+1)t^2 = 0$$

$$4p\cos^3 x + 4\cos x + 10 + 6\cos 2x = 0$$

$$2p^2 - 13p + 20 = 0$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} > \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(3-x)(x+6) = 16$$

$$-x^2 - 3x + 18 = 16$$

$$-x^2 - 3x = -2$$

$$x^2 + 3x = 2$$

$$169 - 2 \cdot 20 \cdot 2 = 169 - 80 = 89$$

$$2 \cdot 16 - 4 \cdot 13 + 20 = 32 - 52 + 20 = 0$$

$$9 + 4 \cdot 2 = 17$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{2})^2$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=p \\ b-c=-1 \end{cases}$$

$$a=c+1$$

$$a \neq b$$

$$c^2 + p \cdot 3$$

$$b=c+p$$

$$p = 5/3$$

$$p \geq 2$$

$$c^2 + 1$$

$$c^2 + 2c + 1 + c + p = 1000$$

$$c^2 + 3c + p = 999$$

$$a=c+p$$

$$b=c-1$$

$$c^2 - 2cp + p^2 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 2cp + p^2 + c = 1001$$

$$(c-p)^2 + c = 1001$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} b - a \not\equiv 3 &\Rightarrow b \not\equiv a \\ b - a &= p^2 - 1 \\ \text{то если } p &\equiv 1, \text{ то } p^2 &\equiv 1 \\ \text{если } p &\equiv 2, \text{ то } p^2 &\equiv 4 \equiv 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \equiv 0 \Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \text{ (} p \text{ - простое)}$$

$$c^2 + 3c + 9 = 999$$

$$c^2 + 3c = 990$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 990 = 9(1 + 4 \cdot 110) = 9 \cdot 441 = 3^2 \cdot 21^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 3 \cdot 21}{2} = \frac{-3 \pm 63}{2}$$

$$c = \frac{-3 - 63}{2} = \frac{-66}{2} = -33 \Rightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$c = \frac{-3 + 63}{2} = \frac{60}{2} = 30 \Rightarrow \begin{cases} a = 31 \\ b = 39 \end{cases}$$

II случай ($a - c = -p^2$):

$$a - c = -p^2 \Rightarrow a = c - p^2, \quad b - c = -1 \Rightarrow b = c - 1$$

$$a^2 + b^2 = (c - p^2)^2 + c - 1 = c^2 - 2p^2c + p^4 + c - 1 = c^2 - 2p^2c + p^4 + c - 1$$

$$\text{Аналогично } b - a = p^2 - 1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} b - a &= p^2 - 1 \\ b - a &\not\equiv 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \equiv 0$$

$$b - a \not\equiv 3 \Rightarrow b \not\equiv a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

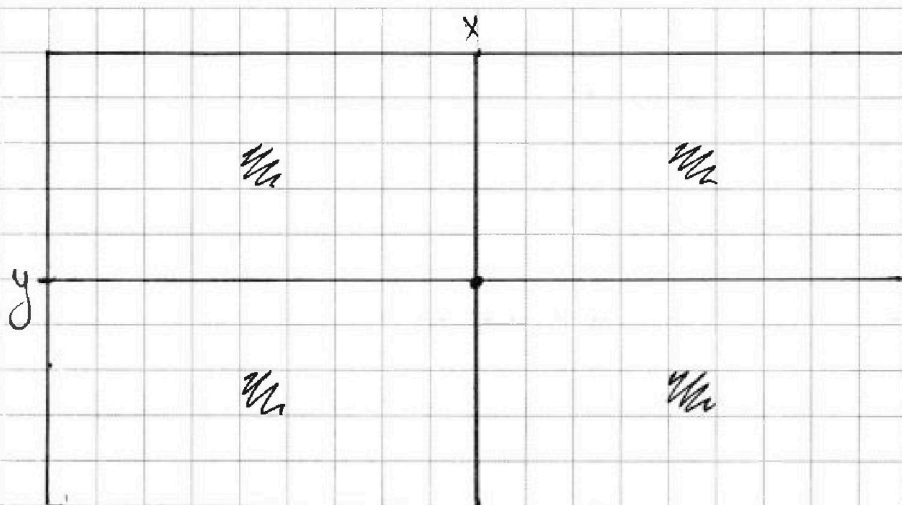
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$500 \cdot 120 = n$$

$$n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot (n-6)$$

$$n \cdot (n-4)$$

$$\begin{aligned} & n(n-2)(n-4)(n-6) - 2n(n-4) = \\ & = \cancel{n} \cancel{(n-4)} (n^2 - 8n + 12 - 2) = n(n-4)(n^2 - 8n + 10) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

