



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в данной геометрической прогрессии $a_n = bq^{n-1}$

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = bq^9$$

$$a_{12} = 2-x = bq^{11}$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = bq^{17}$$

$$(3x+2) \neq 0$$

если $25x+34=0$, то $a_{10}=a_{18}=0$, но $a_{12} \neq 0$.

Тогда a_n - не геометрическая прогрессия.

$$\frac{a_{18}}{a_{10}} = \frac{bq^{17}}{bq^9} = q^8 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

Тогда $q^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$

$$a_{12} = a_{10} \cdot q^2 = \frac{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}{\sqrt{|3x+2|}} = 2-x$$

Раскроем модуль:

$$1) \quad 3x+2 > 0 \quad x > -\frac{2}{3}$$

$$\sqrt{25x+34} = 2-x$$

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 25x+34 = 4+x^2-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-29x-30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 25x+34 = 4+x^2-4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-29x-30 = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -x = -1 \\ x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \quad \text{НО. при } x = -1 \\ 3x + 2 = -1 < 0.$$

То есть решений нет.

2) $3x + 2 < 0. \quad x < -\frac{2}{3}.$

$$\sqrt{-25x - 34} = 2 - x,$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$

При $x = -19$:

$$a_{10} = \sqrt{(34 - 25 \cdot 19)(-49)} = 7 \cdot 21.$$

$$a_{12} = 21.$$

$$a_{18} = \frac{21}{73}.$$

Существует геометрическая

прогрессия $a_n = 21 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{n-12} =$

$$= 21 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(21 \cdot (\sqrt{7})^{11}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{n-1}$$

При $x = -2$:

Существует геометрическая прогрессия:

$$a_{10} = \sqrt{(-16) \cdot (-4)} = 8.$$

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-12} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-11} =$$

$$a_{12} = 4.$$

$$= 4 \cdot (\sqrt{2})^{-11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-11}$$

$$a_{18} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $-19; -2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+7} \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

Левая часть, $|y+2| + 2|y-18| \geq |y+2| + |y-18| \geq 20$ (т.к. $|y+2| + |y-18|$ - это расстояние от y до -2 и 18 , а оно не меньше, чем расстояние от -2 до 18).

Правая часть.

$$\begin{aligned} z^2 &\geq 0 \\ -z^2 &\leq 0 \\ 400 - z^2 &\leq 400 \\ \sqrt{400 - z^2} &\leq 20. \end{aligned}$$

Равенство достигается, когда левая и правая части равны 20:

$$z=0, \quad y=18. \quad (\text{т.к. } |y-18|=0.)$$

Подставим полученные значения в первое уравнение системы:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} \quad x \in [-6; 3]$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{x+6} \sqrt{3-x}$$

Пусть $\sqrt{x+6} = a$, $\sqrt{3-x} = b$. $a, b \geq 0$ $a, b \leq 3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b+7 = 2ab \\ a^2+b^2 = 9 \end{cases}$$

$$0 \leq \sqrt{x+6} \leq 3 \text{ м.к. } x \in [-6; 3]$$

$$0 \leq \sqrt{3-x} \leq 3, \text{ м.к. } x \in [-6; 3]$$

$$a-b+7 \geq 0 \text{ при любых } x.$$

$$(a-b) = 2ab - 7; \quad a^2+b^2 = (a-b)^2 + 2ab =$$

$$= 4a^2b^2 - 28ab + 49 + 2ab = 4a^2b^2 - 26ab + 49 = 9$$

Решаем относительно ab :

$$D = 13^2 - 4 \cdot 20 = 169 - 80 = 89 < 0 \text{ решений нет.}$$

$$4a^2b^2 - 26ab + 40 = 0$$

$$2a^2b^2 - 13ab + 20 = 0$$

Решаем относительно ab .

$$D = 169 - 4 \cdot 20 \cdot 2 = 169 - 160 = 9$$

$$ab > 0, \text{ поэтому: } (ab)_1 = \frac{13 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$(ab)_2 = \frac{13 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$1) \quad ab = 4$$

$$(x+6)(3-x) = ab^2 = 16$$

$$18 - 3x - x^2 = 16$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 2 = 17$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1, x_2 \in [-6; 3].$$

$$2) ab = \frac{5}{2}$$

$$18 - 3x - x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + 3x + \left(\frac{25}{4} - 18\right) = 0.$$

$$x^2 + 3x - \frac{47}{4}$$

$$D = 9 + 47 = 56$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{56}}{2} = -\frac{3}{2} + \sqrt{14}$$

$$x_2 = \frac{-3}{2} - \sqrt{14}$$

$$x_1, x_2 \in [-6; 3].$$

$$\text{Ответ: } z = 0, \quad y = 18, \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{14}}{2}; \quad x = \frac{-3}{2} \pm \sqrt{14}$$

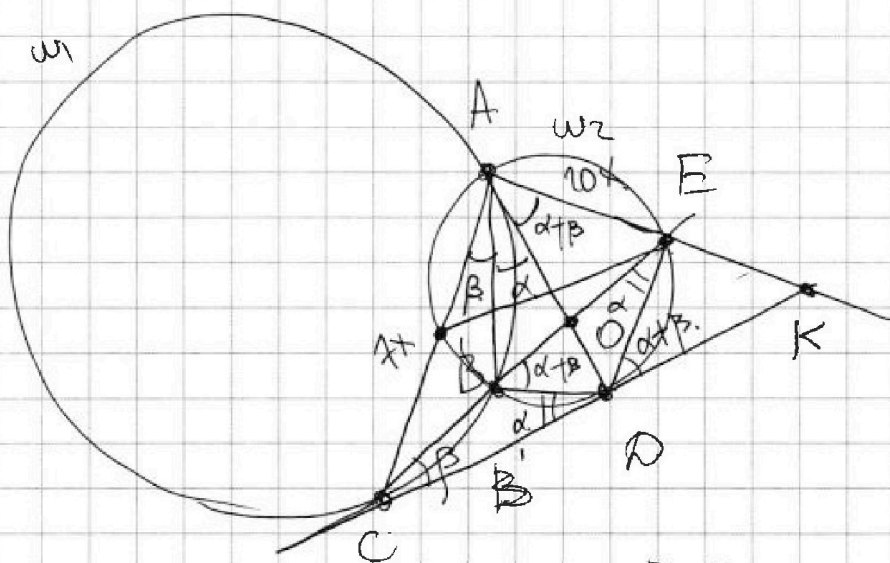
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть $\angle CAB = \beta$, тогда $\angle BCD = \beta$.

2) Пусть $\angle CED = d$, тогда $\angle BDC = d$.

3) $\angle OBD = d + \beta \Rightarrow \angle DAE$.

4) $\angle BAD = d$.

5) Тогда AO — биссектриса $\angle CAE$.

То есть $\frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{r}{2r} = \frac{r}{20r}$.

6) $\frac{CD}{DK} = \frac{AC}{AK} = \frac{r}{AK} \Rightarrow AK = \frac{DK \cdot r}{CD}$.

7) По м. Менелая ($\triangle CEK, AD$):

~~$\frac{CO}{EO} \cdot \frac{AE}{AK} \cdot \frac{KD}{CD} = 1$~~

7) По м. Менелая ($\triangle DAK, CE$):
 $\frac{DO}{AO} \cdot \frac{AE}{EK} \cdot \frac{CK}{CD} = 1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) $\triangle EDK \sim \triangle DAK$:

$$\frac{ED}{DA} = \frac{EK}{AK} = \frac{DK}{AK} = \frac{CD}{AC}$$

9) $\triangle CBD \sim \triangle CDE$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BD}{DE} = \frac{CD}{CE} \quad \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{BC}$$

10) ~~$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{CD}{ED} = \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$ м.к.~~

~~$R_1 = \frac{BC}{\sin \beta}$ $R_2 = \frac{BD}{\sin \alpha}$~~
~~Ответ: 20:7~~

три по формуле
 синусов (относительно A)
 $C \rightarrow E$, $AC \rightarrow AE$

10) $R_1 = \frac{BC}{\sin \beta}$ $R_2 = \frac{BD}{\sin \alpha}$

$$\frac{\sin \beta}{BC} : \frac{\sin \alpha}{AD} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{20}{7} \text{ м.к.} \quad \left(\text{а } \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20} \right)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{BC}{AD} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{20}{7} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{20}{7}} = \frac{ED}{CD} \quad (\triangle ECD)$$

Ответ: $\sqrt{\frac{20}{7}}$

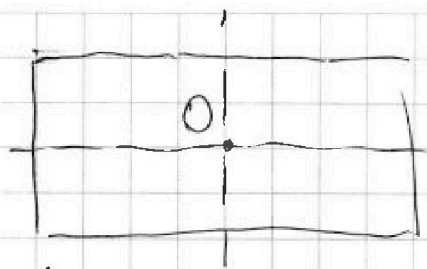
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Найдём кол-во способов выбрать 8 клеток, чтобы они были симметричны относительно одной из средних линий.

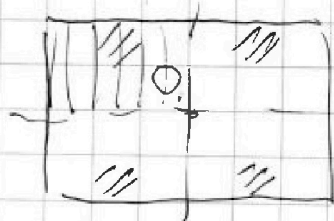
Выберем 4 клетки в верхней / левой части прямоугольника, остальные 4 поучатся единственно образом (500 и 120 в числ., поэтому клетки не пересекаются).

Таких способов $C_{\frac{20 \cdot 500}{2}}^4 = C_{30000}^4$ (две каждой из средних линий).

2) Найдём кол-во способов выбрать 8 клеток так, чтобы они были симметричны точке O.

Заметим, что все клетки разбиваются на пары симметричных относительно O. То есть в каждом из способов мы выбираем какие-то 4 из 30000 пар способов C_{30000}^4 .

3) Какие-то множества из 8 клеток достигаются дважды.



Заметим, что если множество "обладает" двумя из трех симметрий, то оно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

обладает 4 шрешей. Тогда по левому верхнему

прямоугольнику 60×250 можно восстановить

весь прямоугольник 110×500 . То есть

мы выбираем 2 из 15000 точек!

C_{15000}^2 способов. Тогда всего способов

выбрать требуемое множество:

$$3C_{30000}^4 - C_{15000}^2$$

Ответ: $3C_{30000}^4 - C_{15000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a < b$. если $a=c$ или $b=c$. $(a-c)(b-c) = 0$,
то если не является квадратом простого числа.
Значит $a \neq c$ и $b \neq c$.

$$(a-c)(b-c) = p^2 = p \cdot p.$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a-c$ может быть равно ± 1 ,
если $a-c = p$, $b-c = p$: $\pm p$ и $\pm p^2$.

$$a-b = a-c - (b-c) = p-p = 0 \quad - \text{это невозможно по условию.}$$

если $a-c = -p$ и $b-c = -p$.

$$a-b = a-c - (b-c) = -p - (-p) = 0. \quad - \text{это невозможно по условию.}$$

если $a < c < b$, то.

$(a-c)(b-c) < 0$, но если не является квадратом простого числа.

1) $c < a < b$.

$$b-c = (b-a) + (a-c) > a-c > 0.$$

$$\text{Поэтому } \begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b-a = (b-c) - (a-c) = \\ = p^2 - 1. \end{cases}$$

если $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv -1 \pmod{3}$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$.
(противоречие с условием)

2) Значит $p \equiv 3$. p - простое, значит $p \equiv 3$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b-c=9 \\ a-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=c+9 \\ a=c+1 \end{cases} \quad a^2+b = (c+1)^2 + c+9 = c^2+3c+10 = 1000.$$

$$c^2+3c-990=0.$$

$$\begin{cases} c=30 \\ c=-33 \end{cases} \quad \text{Отсюда решения: } (31; 39; 30) \quad (-32; \overset{-24}{\cancel{33}}; -33).$$

2) $a < b < c$.

$a-c = (b-a) + (b-c) < 0$. Поэтому:

$$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad (b-a) = 1-p^2.$$

если $p \equiv 1 \pmod{3}$ или $p \equiv -1 \pmod{3}$, то $p^2-1 \vdots 3$ (противоречие с условием)

значит $p \vdots 3$, p - простое, значит $p=3$.

$$\begin{cases} a-c = -9 \\ b-c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c-9 \\ b=c-1 \end{cases}$$

$$a^2+b = c^2-18c+81+c-1 = c^2-17c+80 = 1000$$

$$c^2-17c-920=0. \quad \begin{cases} c=40 \\ c=-23 \end{cases}$$

Отсюда решения: $(31; 39; 40)$ и $(-32; -24; -23)$.

Ответ: $a=31, b=39, c=30$ $a=-32, b=-24, c=-33$
 $a=31, b=39, c=40$ $a=-32, b=-24, c=-23$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4xy^3 - 3y^2 + 12y^2 + 3xy + 12y + 4 = 0$$

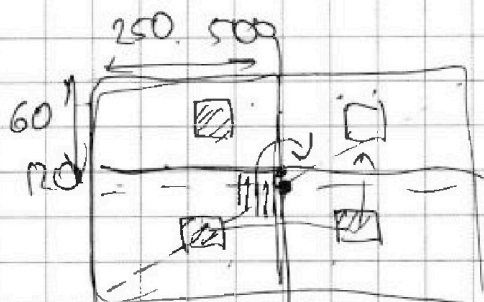
$$y^2(4y^2 + 3)$$

$$4xy^3 - 3y^2 + 3xy + 4$$

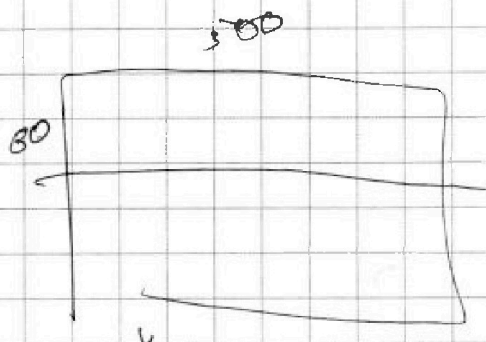
$$y^2(4y^2 + 3y - 3) + 4$$

$$8y = t + 5 - 8 \uparrow$$

$$: e = x$$

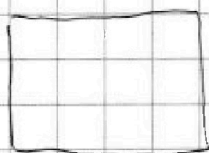


8 КЛЕМОК



$$C_4^{250 \cdot 500} = 250 \cdot 500$$

$$C_4^{60 \cdot 500}$$



$$\frac{120 \cdot 500}{2} = 30000$$

$$= \frac{60 \cdot 500}{2} = 15000$$

$$C_4^{120 \cdot 500}$$

$$3 C_4^{15000} - C_2^{10000}$$

$$h = 5 - t = 7 - 3 = 4$$

$$= (9 - 6) = 3$$

корень

на [-6; -15]

[-6; 3]

[-6; 3]

$$+ 7 = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{9+x} = 7$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

with square root



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Печать QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{x+6} - 1)(\sqrt{3-x} - 1) = 0$$

на $[-6; 3]$.

$$\sqrt{x+6} - 1 \quad | \quad x \geq -6$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$x+6 \leq 9$$

$$-x \leq 6$$

$$2ab + b - a + 2 = 9$$

$$\sqrt{x+6} \leq 3$$

$$\sqrt{3-x} \leq 3$$

$$2a(b - \frac{1}{2}) + b - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\sqrt{x+6} - 1 \leq 2$$

$$\sqrt{3-x} - 1 \leq 2$$

$$(2a+1)(b - \frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+1) \cos x + 10 = 0 \quad \geq 1 \text{ решение}$$

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - (2 \sin x \cdot \cos x) \cdot \sin x =$$

$$= \cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$p \cos^3 x - 3p \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos^2 x - 6 \sin^2 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (\sin^2 x) =$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$4p \cos^3 x - 3p + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$\cos x = y$$

$$4py^3 - 3p + 12y^2 - 6 + 3py + 12y + 10 = 0$$

$$4py^3 - 3p + 12y^2 + 3py + 12y + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

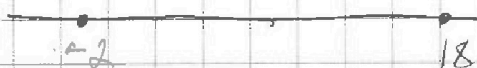
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

$$z^2 \leq 400$$



$$-20 \leq z \leq 20$$

$$y = 18$$

$$\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} \leq 20$$

$$\begin{cases} z = 20 \\ z = -20 \end{cases}$$

$$z = -20$$

$$1) \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x+40} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2-20}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{43-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2-3x-2}$$

$$x+6 \geq 0$$

$$x \leq 43$$

$$-x^2-3x-2 \geq 0$$

$$x \geq -6$$

А.У. ↑

$$x^2+3x+2 \leq 0$$

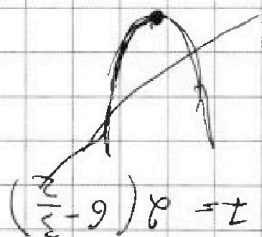
$$(x+1)(x+2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$\sqrt{x+6} \leq \sqrt{5}$$

$$\sqrt{43-x} \geq \sqrt{41}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{41} + 7$$



$$\left(\frac{z}{2}-9\right)^2 = z$$

$$(9+x)^2 = z$$

$$\frac{z}{2} = 9$$

$$\frac{z}{2} = x$$

$$x+6 = 3-x$$

$$8 > 0$$

$$8 < 0$$

$$8 \neq 2 \neq 0$$

$$8 \neq 0$$

$$5 = 2z - 2 - 9 + 9$$

$$10 = 4z - 4 = 4z - 4$$

$$14 = 4z \Rightarrow z = 3.5$$

$$14 = 4z - 4 = 4z - 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

10: $\sqrt{(25x+34)(3x+2)} = bq^9$

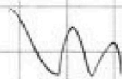
12: $2-x$

Процессия $a_n = bq^{n-1}$

18: $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} = bq^{17}$

$b \neq 0 \quad q \neq 0 \quad q \neq 1$

$bq^9 = (25x+34)^{\frac{1}{2}} (3x+2)^{\frac{1}{2}}$



$bq^{17} = (25x+34)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x+2)^{-\frac{3}{2}}$

$q^8 = (3x+2)^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = (3x+2)^{-2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$

$bq^{11} = 2-x$

$q = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

$bq^{11} = bq^9 q^2 =$

$= (25x+34)^{\frac{1}{2}} (3x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x+2)^{-2} = \sqrt{25x+34} = 2-x$

$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 25x+34 = 4+x^2-4x \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 29x - 30 = 0 \end{cases}$

$25x+34 = 4+x^2-4x$

$x^2 - 29x - 30 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ (x+1)(x-30) = 0 \end{cases}$

$(x+1)(x-30) = 0$

$x = -1$

10: $\sqrt{(34-25)(2-3)}$

$q = (25x+34)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x+2)^{-\frac{3}{2}} = (25x+34)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x+2)^{-\frac{3}{2}}$

$= (3x+2)^{-2} = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad q = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~77720~~
~~z=0.~~

$y = 18$

$|20| + 2 \cdot 0 = \sqrt{400} - 0$

$a^2 + b^2 + 49 - 2ab$
 $a - b = 2ab - 7$
 $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 14a$
 $-14b + 14a$

$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x+x^2}$

~~$x \geq -6$~~

$x \leq 3$

~~$x^2 + 3x - 18 < 0$~~

$(x+6)(x-3) < 0$

$\left(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{x+6}\sqrt{x-3} \right) - 6 \leq x \leq 3$

$a - b + 7 = 2ab$

$a^2 + b^2 = 3$

~~$a - b + 2a^2 + ab^2 + 1 - 2ab = 0$~~

75
18-3=9

~~$a(2a+1) - b(2a-1)$~~

$2\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{x}{3} = \frac{x}{2\sqrt{9}+9}$

~~$2ab - a + b - 7 = 0$~~

$(2\sqrt{9}) = 2 \cdot 3 = 6 \cdot 2 + 9 = \frac{4}{2}$

$a(2b-1) = 7-b$

$0 = 5 - \ln|4| + \ln 4$

$a = \frac{7-b}{2b-1}$

$\frac{(7-b)^2}{(2b-1)^2} + b^2 = 3$

7-2
6-1
2/2

$49 - 14b + b^2 + b^2(4b^2 - 4b + 1) = 3(4b^2 - 4b + 1)$
 $b^2 + 49 - 14b + 4b^4 - 4b^3 + b^2 = 12b^2 - 12b + 3$

$x+6+3 \cdot 7 = 9$

~~77720~~

~~169-144~~

169-144

$\frac{156}{4 \cdot 100}$

$ab = 90$

12-

$(7-2ab) = 7(2ab-7)$
 $14a-14b =$

$\frac{169}{25}$

$\frac{1408-49}{148}$

$9 + 12ab = 4a^2b^2$

$8a^2b^2 = 4a^2b^2$

$a^2 + b^2 + 49 - 2ab = 2ab$

$a - b + 7 = 2ab$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} + 7 = \sqrt{18-3x^2-x^2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 18 \\ \hline 54 \\ \times 4 \\ \hline 12 \\ \hline 92 \\ - 18 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} + 7 = -\sqrt{x+6} \sqrt{x-3}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-3} + 7 \leq 0$$

$$a - b + 7 + ab = 0$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x-3}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 25 \\ \hline 47 \end{array}$$

$$(x+6)(3-x) =$$

$$= 3x + 18 - x^2 - 6x = -x^2 - 3x + 18$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x-3}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = \sqrt{x+6} \sqrt{3-x}$$

$$+6; -\frac{3}{a} \downarrow$$

пошлом \uparrow .

$$a - b + 7 = ab$$

$$\sqrt{3-x} = \frac{\sqrt{x+6} + 1}{\sqrt{x+6} + 7}$$

$$b(a+1) = a+7$$

$$a^2 + b^2 = 3$$

$$14 \cdot 3 = 42$$

$$b = \frac{a+1}{a+7}$$

$$\frac{(a+1)^2}{(a+7)^2} + a^2 = 3$$

$$a^2 + 2a + 1 + a^4 + 14a^3 + 49a^2 = 3a^2 + 42a + 49 \cdot 3$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$-2: \quad \frac{-3}{+2} = \frac{3}{2} \quad y_{\max} = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 18 =$$

$$\frac{a+1}{a+7} = 1 - \frac{6}{a+7}$$

$$= 18 - \frac{9}{4} = 9 \left(2 - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 7}{4}$$

$$-3 - \sqrt{17} \neq -12$$

$$-\sqrt{17} \neq -9$$

$$\left(1 - \frac{6}{a+7} \right)^2 + a^2 = 3$$

$$a - b + 7 = ab \quad \sqrt{17} < 9$$

$$17 < 81$$

$$x = -2:$$

$$4 - 1 + 7 \neq \sqrt{4 \cdot 1}$$

$$10 \neq 2$$

$$ab + b - a - 1 = 6$$

$$(a-1)(b-1) = 6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$

$a < b$

$b - a = 3$

$a^2 + a - 1000 < 0$

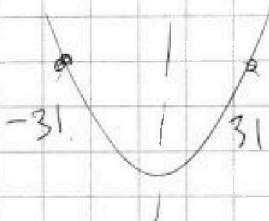
$(a-c)(b-c) = p^2$

~~$a^2 + a - 1000 = 0$~~

$a^2 + b = 1000 \equiv 1 \pmod{3}$

$a = 31$

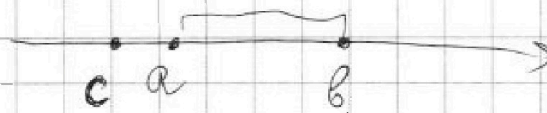
$-32 \leq a \leq 32$



$1000 = a^2 + b > a^2 + a$

$a-c \neq 0$
 $b-c \neq 0$

$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ + 31 \\ \hline 93 \\ + 93 \\ \hline 961 \end{array}$



To
remb

$(a-c)(b-c) = p^2$

$$\begin{array}{r} 3969 \overline{) 3} \\ \underline{-3} \\ 9 \\ \underline{-9} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$\begin{cases} c < a \\ c > b \end{cases}$

$\begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases} \Rightarrow b-a$

$441 \cdot 9 = (21 \cdot 3)^2$

ВА: если c слева a .

1) $a-c = 1$

$a-c = 1$

$a = c+1$

$\begin{array}{r} 3 \\ \times 990 \\ \hline 2970 \end{array}$

$b-c = p^2$

$b-c = 9$

$b = c+9$

$\begin{array}{r} 3969 \end{array}$

$b-a = b-c - a+c = p^2 - 1$

$p^2 = 9 \quad p = 3$

$(c+1)^2 + c+9 = 1000$

$c^2 + 2c+1 + c+9 = 1000$

$c^2 + 3c - 990 = 0$

$c_1 = \frac{-3 + 21 \cdot 3}{2} = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$

$\begin{array}{r} 33 \\ \times 9 \\ \hline 24 \end{array}$

$c_2 = \frac{-3 - 21 \cdot 3}{2} = -\frac{22 \cdot 3}{2} = -33$

$(31; 39; 30)$

$(-32; -26; -33)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{43-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2-3x-2} \quad \text{на } [-2; -1].$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{43-x} + 49 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{43-x} - \sqrt{43-x} + 14\sqrt{x+6} =$$

$$= -4x^2 - 12x - 8.$$

$$\begin{array}{r} +49 \\ 43 \\ \hline 92 \\ +16 \\ \hline 108 \\ 8 \\ \hline 106 \end{array}$$

Пусть $x = -\frac{3}{2}$:

$$\sqrt{6-\frac{3}{2}} - \sqrt{43-\frac{3}{2}} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{8} \quad 86-3=83$$

$$\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{83}{2}} + 7 = 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{2}} + 7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3 - \sqrt{83} + 7\sqrt{2} = 1 \quad 2 + 7\sqrt{2} = \sqrt{83}$$

$$2 = \sqrt{83} - 7\sqrt{2} \quad 4 + 28\sqrt{2} + 49 \cdot 2 = 83$$

$$\begin{cases} a-c = -9 \\ b-c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

$$a = c-9 \quad b = c-1 \quad b-a = b-c - a+c = -1 + p^2$$

$$c^2 + 18c + 81 + c - 1 = 1000 \quad = -1 + p^2 \quad \sqrt{3} \quad p=3$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$D = 289 + 4 \cdot 920$$

$$\frac{17 + 2 \cdot 3}{2} = \frac{17+63}{2} = 40 \quad \begin{array}{r} 820 \mid \quad \times 920 \\ \quad \quad \quad 4 \\ \hline \quad \quad \quad 3680 \\ \quad \quad \quad 289 \\ \hline \quad \quad \quad 3969 \end{array} \quad \begin{array}{r} 920 \\ 289 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$92 = 46 \cdot 2 = 23 \cdot 4$$

$$\frac{17}{2} - \frac{63}{2} = -23$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) $z = 20$

$y = 18$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-40} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2} + 20$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{-x-37} + 7 = 2\sqrt{-x^2-3x+38}$$

$x \geq -6$

$-x-37 \geq 0$

$x \leq -37$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 43 \\ +49 \\ \hline 82 \end{array}$$

1) $z = -20$, $y = 18$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{43-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2-3x-2} \quad [-2; -1]$$

min затрат при $x = -2$:

max затрат:

~~$\sqrt{x+6}$~~

$$2\sqrt{-\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2} =$$

$$2 - \sqrt{45} + 7 =$$

$$= 2\sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 2\sqrt{\frac{1}{8}} =$$

$$= 9 - \sqrt{45} = 9 - 3\sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$9 - 3\sqrt{5} \quad \sqrt{\frac{1}{2}}$$

~~$14 - 6\sqrt{5}$~~ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

~~$3(3 - \sqrt{5})$~~ $\sqrt{\frac{1}{5}}$

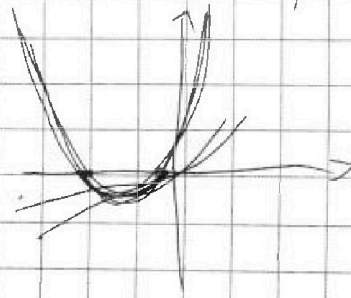
~~$18 - 6\sqrt{5}$~~

~~$3 - \sqrt{5}$~~ $\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{2}}}$

~~$169 - 36\sqrt{5}$~~ $\Rightarrow 80$

~~$9 + 5 - 6\sqrt{5}$~~ $\sqrt{\frac{1}{18}}$

~~$14 - 6\sqrt{5}$~~ $\sqrt{\frac{1}{18}}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_q'' = b_q^s \cdot q^2 = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x+2}} = 2-x.$$

1) если $3x+2 \geq 0$.

$$\sqrt{(25x+34)} \leq 2-x.$$

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 25x+34 \leq 4-4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 29x - 30 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1.$$

и $3x+2 \leq 0$

2) если $3x+2 < 0$.

$$\sqrt{-25x-34} = 2-x.$$

$$-25x-34 = 4-4x+x^2.$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 38 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 19 \\ \hline 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 25 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$x^2 + 21x + 38 = 0.$$

при $x = -19$:

$$D = 121 - 4 \cdot 38$$

$$D = \sqrt{34 - 25 \cdot 19} =$$

$$\begin{array}{r} +225 \\ 25 \\ \hline -475 \\ 34 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$(x+19)(x+2) \geq 0.$$

$$= \sqrt{441} \cdot (-19) = 7 \cdot 21.$$

$$\begin{cases} x = -19 \\ x = -2 \end{cases}$$

12: $2+19 = 21$

18: $\frac{21}{7 \cdot 3} \quad b = 21.$

$$q = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

$x = -2$:

10: $\sqrt{-16} = -4 = 4 \cdot 2 = 8$

$$b = 4.$$

12: 4

$$q = \sqrt{2}.$$

18: $\frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{4}{8}.$