



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен  $6x + 18$ , седьмой член равен  $(x^2 - 4x)^2$ , а одиннадцатый равен  $(-3x^2)$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $14x + 7y$  при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$  и  $B = m^2n - mn^2 + 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $3q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 12$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $9 \times 9$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 26$ ,  $AN = 20$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть арифм. прогр. будет вида  $a_n = a + k(n-1)$ , тогда

$$a_5 = a + 4k = 6x + 18; \quad a_7 = a + 6k = (x^2 - 4x)^2, \quad a_{11} = a + 10k = (3x^2)$$

2) Тогда

$$a + 6k - (a + 4k) = 2k = (x^2 - 4x)^2 - (6x + 18)$$

$$a + 10k - (a + 6k) = 4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$\Rightarrow 2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 4x + (x^2 - 4x)^2 - 4 = 0$$

Пусть  $(x^2 - 4x) = t$

$$t^2 + t - 4 = 0$$

$$(t + 4)(t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow t + 4 = 0 \quad \text{или} \quad t - 3 = 0$$

$$t = -4 \quad \quad \quad t = 3$$

Согл. зам:

$$x^2 - 4x = -4$$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

3) Так как каждое уравнение было либо линейным, либо квадратным, либо кубическим, а все с нулем корней (если их не считать, в крайних случаях), эти 3 значения - наш ответ.

Ответ:  $2 - \sqrt{7}; 2; 2 + \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | +3 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \leq -18 \leq 12x - 9y \leq 18 \\ -32 \leq -12x + 16y \leq 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -50 \leq (12x - 9y) + (-12x + 16y) \leq 32 + 18$$

$$-50 \leq 7y \leq 50$$

$$-\frac{50}{7} \leq y \leq \frac{50}{7}$$

(максимальное значение функции  $y$ )

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6 \quad | \cdot 4 \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \quad | \cdot (-3) \end{cases} \quad \begin{cases} -24 \leq 16x - 12y \leq 24 \\ -24 \leq -9x + 12y \leq 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -24 + (24) \leq (16x - 12y) + (-9x + 12y) \leq 24 + 24$$

$$-48 \leq 7x \leq 48$$

$$-\frac{48}{7} \leq x \leq \frac{48}{7}$$

(все значения  $x$ )

1) Максимальное значение  $4x + 7y$  будет при максимальных  $x$  и  $y$ , т.е.  $x$  и  $y$  равны  $\frac{48}{7}$  и  $\frac{50}{7}$  соответственно.

2) Максимальное  $4x + 7y = \frac{48}{7} \cdot 4 + \left(-\frac{50}{7}\right) \cdot 7 = -48 \cdot 2 + (-50) = -146$   
Ответ:  $-146$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Трапеция  $m - n = -13$  или  $m - n = 9 = 13$

$m = n - 13$   $m = n + 4$

7) Тогда

(1)  $B = m \cdot n \cdot (m - n + 3) = (n - 13) \cdot n \cdot (n - 13 - n + 3) = (n^2 - 13n) \cdot (-12) = 39^2$

либо (2)  $B = (n + 4) \cdot (n + 4 - n + 3) \cdot n = (n^2 + 4n) \cdot 7 = 39^2$

8) a)  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n^2 + 4n) \in \mathbb{N}$ , т.к.  $39^2 = 7 \cdot (n^2 + 4n)$  и др. так все множители числа  $39^2 = n^2 + 4n \Rightarrow \frac{39^2}{7} \in \mathbb{N}$ , т.к.  $9^2$  кратно 7, т.к.  $9$  - простое число значит  $9 = 7$

$\Rightarrow (n^2 + 4n) \cdot 7 = 3 \cdot 7^2$

$n^2 + 4n = 21$

$n^2 + 4n - 21 = 0$

$(n + 7)(n - 3) = 0$

$\Rightarrow n + 7 = 0$  или  $n - 3 = 0$

$n = -7$   $n = 3$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  $\Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = n + 4 = 7$

9) (1)  $(n^2 - 13n) \cdot (-12) = 39^2$

$-12n^2 + 156n = 39^2$

$n^2 - 13n = -\frac{4}{3}$

$13n - n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow 13n - n^2 \geq 0$ , т.к.  $n \in \mathbb{Z}$   $13n - n^2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2$  - такое целое, значит  $\frac{2}{3}$  - простое и простое, а единственное простое число - 2  $\Rightarrow$

$13n - n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$n^2 - 13n + 1 = 0$

$D = 13^2 - 4 = 12$

$n = \frac{13 \pm \sqrt{12}}{2}$

но  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  при  $m = n - 13$  не имеет смысла.

10) Угол в параллелограмме острый, тогда  $A = 39^\circ$  ~~или  $A = 141^\circ$~~   
 В остальном можно использовать, что  $A \neq 39^\circ$ , т.к. всегда надо  
 по всем углам  $\neq$  параллелограмм



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$11) (m-n)(m-n+9) = 3q^2$$

Один из множителей  $(m-n)$  или  $(m-n+9)$  делится делителем на 3, т.к.  $3q^2$  делится на 3, а множители - целые числа, но

если  $m-n$  кратен 3, то  $m-n+9$  также кратно 3, т.к.  $9 \div 3 = 3$ .

Если же  $m-n+9$  кратно 3, то  $m-n$  также делится на 3.

12) Значит  $3q^2$  делится на 9, т.к. 2 множителя кратны 3

Т.к.  $q$  - простое и делится на 3, то единственно возможный вариант  $q=3$

$$\Rightarrow 3q^2 = 27$$

13) Если  $m-n$  - простое, то  $m-n+9$  - простое, и наоборот, если  $m-n+9$  - простое, то  $m-n$  - простое (т.к. 9 простое, а  $простое + простое = простое$ )

Значит их произведение - простое, но 27 - простое,

$$\text{значит } A \neq 3q^2$$

14)  $\Rightarrow$  у нас только 1 вариант  $m=7, n=3$

Ответ: 7; 3

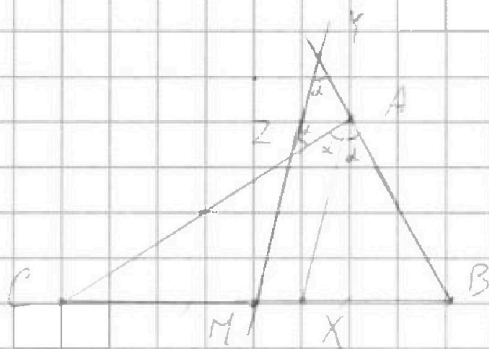
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  $AX$  - бис.  $M$  - середина  $BC$

$MY \parallel AX$

$AC = 12$   $AZ = 3$   $YZ = 4$

Найти:

$BC = ?$

Решение:

1) Пусть  $\angle CAZ = \alpha \Rightarrow \angle XAB = \alpha$ , а  $\angle BAC = 2\alpha$

2)  $AX \parallel MY$ , а  $AZ$  - секущая  $\Rightarrow \angle CAZ = \angle MYZ$  - какр. внеш. углы, а также  $\angle YZA = \angle CAZ = \alpha$

3)  $\angle YAC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - 2\alpha$

4)  $\angle YAZ + \angle AYZ + \angle AZY = 180^\circ \Rightarrow \angle AYZ = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$

5) Получается, что треугольник  $AYZ$  - равнобедр. и  $AY = AZ = 3$

6) По теореме косинусов  $AY^2 + AZ^2 - 2 \cos \angle YAZ \cdot AZ \cdot AY = YZ^2$

$$3^2 + 3^2 - 2 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 3 \cdot 3 = 4^2$$

$$-2 \cos(180^\circ - 2\alpha) \cdot 9 = 16 - 18 \quad | : -2$$

$$9 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = 1$$

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

7) По теореме (если  $Z$  на стороне  $AC$ )  $\frac{BM}{MC} = \frac{CZ}{AZ} \cdot \frac{AY}{AB} = 1$

$\frac{BM}{MC} = 1$ , т.к.  $M$  - середина  $BC$ ;  $CZ = AC - AZ = 12 - 3 = 9 \Rightarrow \frac{CZ}{AZ} = \frac{9}{3} = 3$

$\Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot \frac{AY}{AB} = 1 \quad 3AY = AB \quad AB = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) По теореме косинусов  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cos \angle C \cdot AC \cdot AB$

$$BC^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 9 \cdot 12$$

( $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$ , см пункт 6)

$$BC^2 = 81 + 144 + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot 108$$

$$BC^2 = 81 + 144 + 24 = 249$$

$$BC = \sqrt{249}$$

Ответ:  $\sqrt{249}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt{y} = 4y^4 - 5\sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ОДЗ } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -6 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Пусть функция

~~$f(x) = 4x^4 + x - 5\sqrt{y}$~~   $f(x) = 4x^4 + x + 5\sqrt{x}$

получается  $f(x) = f(y)$

Функция ~~монотонно~~ ~~возрастает~~ принимает лишь ~~одно~~ ~~два~~ значения,

а  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$

Функция монотонно возрастает  $\Rightarrow x = y$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{(x+6)(5-x)} \quad |^2 \text{ (на обе части возведем в квадрат, это равносильное преобр.)}$$

$$\frac{\sqrt{(x+6)(5-x)}}{\sqrt{(x+6)(5-x)}} \cdot 4(x+6)(5-x) = 25 + 10(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}) + x+6 - 2(\sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} + 5-x)$$

$$4(x+6)(5-x) = 25 + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-x} + 11 - \sqrt{x+6} \cdot \sqrt{5-x} - 5$$

$$4(x+6)(5-x) = 31 + 9\sqrt{x+6} - 9\sqrt{5-x}$$

$$120 - 4x - 4x^2 = 31 + 9(\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x})$$

$$(30-x-x^2) \cdot 4 = 31 + 9(2\sqrt{30-x-x^2} - 5)$$

Пусть  $\sqrt{30-x-x^2} = t$

$$4t^2 = 31 + 9 \cdot (2t - 5)$$

$$4t^2 = 31 + 18t - 45$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^2 = 18t - 14$$

$$t^2 - \frac{18}{4}t + \frac{14}{4}t$$

$$t^2 - 4,5t + 3,5t$$

$$(t-1)(t-3,5) = 0$$

$$t=1 \text{ или } t=3,5$$

Согл. зад.

$$\sqrt{30-x-x^2} = 1 \text{ или } \sqrt{30-x-x^2} = 3,5$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2 = 1 \\ 30-x-x^2 = 9,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30-x-x^2 = 9,5 \\ 30-x-x^2 = 12 \end{cases}$$

$$29-x-x^2 = 0$$

$$26,5-x-x^2 = 0$$

$$x^2 + x - 29 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 53 = 0$$

$$D = 1 + 29 \cdot 4 = 117$$

$$D = 4 + 8 \cdot 53 = 107,4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{117}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{107,4}}{4}$$

Проверка корней. Проверим корни  $x \in [0; 3]$

$$\frac{-1 - \sqrt{117}}{2} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-1 - \sqrt{117}}{2}; \quad \frac{-2 - \sqrt{107,4}}{4} < 0 \Rightarrow x \neq \frac{-2 - \sqrt{107,4}}{4}$$

$$\sqrt{100} < \sqrt{107,4} < \sqrt{117} < \sqrt{121} \Rightarrow 10 < \sqrt{107,4} < \sqrt{117} < 11 \Rightarrow 4$$

$$9 < -1 + \sqrt{107,4} < -1 + \sqrt{117} < 10$$

$$4,5 < \frac{-1 + \sqrt{107,4}}{2} < \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} < 5 \quad \text{По ОДЗ } -6 < x \leq 9$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{107,4}}{2} \text{ и } x = \frac{-1 + \sqrt{117}}{2} = \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1 + \sqrt{107,4}}{2}, \frac{-1 + 3\sqrt{13}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7


СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Для начала задачи, считаем все рисунки (без учета 0 поворотов), найдем их количество по формуле числа сочетаний

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$$

(2 - потому что 2 узла, 100 - потому что всего 100 узлов)

2) Теперь можно было бы просто разделить это число на 4, но заметим, что есть такие узлы (каждый их симметричных), которые при повороте на  $180^\circ$  образуют симметричный рисунок, например  и симметричные узлы.

3) Если перевернуть все узлы так, чтобы левая сторона была выше и была меньше  $30^\circ$  градусов, верхняя  $10^\circ$ , а правая нижняя  $100^\circ$  () , то ~~каждый узел~~ - это то, что в сумме дает  $100^\circ$ , а таких пар всего  $5 \cdot 100 = 500$ .

4) Значит среди 4950 рисунков 4900 имеют 3 "симметричных" при повороте на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ ; и 50 рисунков являются симметричными и имеют лишь 1 копию при повороте

на  $90^\circ$ . Значит уникальных рисунков всего  $\frac{4900}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot \frac{100}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 1250$

Ответ: 1250 рисунков



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\cos(180-2\alpha) = -\cos(2\alpha)$   
 $16 = 9+9-2\cdot 3\cdot 3\cdot \cos(2\alpha)$   
 $-2 = -2\cdot 3\cos(2\alpha)$   
 $\frac{1}{3} = \cos(2\alpha)$

$\frac{AY}{MX} = \frac{AZ}{AC}$   
 $\frac{AY}{AC} = \frac{MX}{CX}$

$\frac{144}{26} = 16.8$   
 $\frac{168}{81} = 2.07$   
 $2.07 \cdot 3 = 6.21$   
 $16.8 + 6.21 = 23.01$   
 $23.01 \cdot 3 = 69.03$   
 $69.03 + 14.3 = 83.33$

$f(x) = 4(a^3 - b^3) + 5(a-b)(b^2 - a^2)$

$4a^3 - 4b^3 + 5(a-b)(b^2 - a^2)$   
 $= 4a^3 - 4b^3 + 5(a-b)(b-a)(b+a)$   
 $= 4a^3 - 4b^3 + 5(a-b)(b-a)(b+a)$   
 $= 4a^3 - 4b^3 + 5(a-b)(b-a)(b+a)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5000 - 430 = 4570

10 x 10 = 100

100 + 39 = 139

$100^2 = 10000$

$\frac{10000}{38.7} = 258.1$

$258.1 \cdot 50 = 12905$

$12905 - 4570 = 8335$

$\frac{8335}{50} = 166.7$

$166.7 \cdot 25 = 4167.5$

$4167.5 - 750 = 3417.5$

Diagram 1: A square with a semi-circle on top. The top edge of the square is marked with 'x' symbols. The semi-circle is inscribed within the square.

Diagram 2: A circle with an inscribed polygon. The vertices of the polygon are labeled with letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Diagram 3: A circle with an inscribed polygon. The vertices of the polygon are labeled with letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Diagram 4: A circle with an inscribed polygon. The vertices of the polygon are labeled with letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

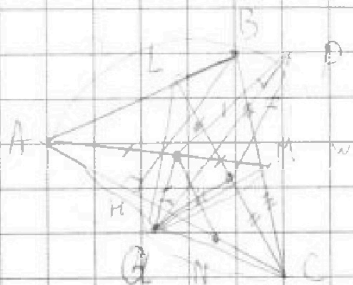


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
~~10~~ ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

CB - диаметр, MA - медиана, PQ || BH

AM - диаметр  $\Omega$

CL - диаметр  $\omega$ ,  $\Omega \cap \omega = P, Q$

BK - высота, AB = 20

AM = 20

Найти:

Решение:

AC = ? BC = ?



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + 4k = 6x + 18$$

$$a + 6k = (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 10k = (-3x^2)$$

$$2k = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18$$

$$4k = (-3x^2) - (x^2 - 4x)^2$$

$$(2\sqrt{7})(2\sqrt{7}) = 4 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 7 = 11 + 4\sqrt{7}$$

$$2((x^2 - 4x)^2 - 6x - 18) = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$a + 4k = 30$$

$$a + 6k = 14 - 2j = 16$$

$$a + 10k = -12$$

$$2(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2$$

$$3x^2 + 3(x^2 - 4x)^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x^2 + (x^2 - 4x)^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 12x - 36 = (x - 6)^2$$

$$(x - 6)^2 + (x^2 - 4x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 6 = 0 \quad x^2 - 4x = 0$$

$$x = 6 \quad (x - 4)x = 0$$

$$x^2 - 12x - 36 = 0$$

$$x = 6$$

$$a + 4k = 30 \cdot 6\sqrt{7}$$

$$(a + 6k) = (11 + 4\sqrt{7}) - 8 - 4\sqrt{7} = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = -3 - 12\sqrt{7}$$

$$2k = 2 \cdot 6\sqrt{7}$$

$$4k = 42 + 12\sqrt{7}$$

$$9 - 42 - 12\sqrt{7}$$

$$2 - \sqrt{7}$$

$$30 - 6\sqrt{7}$$

$$11 - 4\sqrt{7} - 8 + 4\sqrt{7} = 3$$

$$-33 + 12\sqrt{7}$$

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 9 = 0$$

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$

0

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x^2 - 4x = 4$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$D = 16 + 12 = 28$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x = 2$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 9 = 0$$

$$D = 10 + 36 = 46$$

$$x = -1 \pm \sqrt{37} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{37}$$

$$(x^2 - 4x) = 1 + \sqrt{37}$$

$$x^2 - 4x = (1 + \sqrt{37}) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2h - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$2) m \in \mathbb{N} \text{ и } n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m-n) \in \mathbb{Z} \text{ и } (m-n+9) \in \mathbb{Z}$$

3) Заметим все возможные разложения  $13p^2$  и  $3q^2$  на простые числа и множители, учитывая, что  $p, 13, q$  и  $3$  - простые числа.

(используем разложение  $A = 13p^2$ )

$$A = 1 \cdot 13p^2 = (-1) \cdot (-13p^2) = 13 \cdot p^2 = (-13) \cdot (-p^2) = p \cdot 13p = (-p) \cdot (-13p)$$

4) Заметим получаем, что  $(m-n)$  равен 1 из этих множителей, а  $(m-n+9)$  - это  $13p$ , подставим значения, и проверим, какие сойдутся.

(Часто можно опустить  $(m-n) = 13p^2; -1, 13p$  и  $-13p$ , т.е.  $m-n \neq m-n+9$  и  $p \in \mathbb{N} \Rightarrow 1$ )

$$\begin{cases} m-n = 1 \\ m-n+9 = 13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13p^2 = 10 \\ p^2 = \frac{10}{13} \\ p = \pm \sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (1; 13p) \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = -13p^2 \\ m-n+9 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13p^2 = -10 \\ p^2 = \frac{10}{13} \\ p = \pm \sqrt{\frac{10}{13}}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow (-13p; -1) \text{ не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13+9 = p^2 \\ p^2 = 22 \\ p = \pm \sqrt{22} \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ m-n+9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13+9 = p^2 \\ p^2 = -4 \\ p = \pm 2 \text{ (2 - простое число)} \Rightarrow (-13; p^2) \text{ подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = p^2 \\ m-n+9 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2+9 = 13 \\ p^2 = 4 \\ p = \pm 2 \Rightarrow (p^2; 13) \text{ - подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = 13p \\ m-n+9 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13p+9 = p \\ 12p = 9 \\ p = \frac{3}{4}, \text{ но } p \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-n = p \\ m-n+9 = 13p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+9 = 13p \\ 12p = 9 \\ p = 0.75 \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$$

5) В итоге получаем, что  $m-n = -13, m-n+9 = p^2$ ; либо  $m-n = p^2, m-n+9 = 13$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^3n - mn^3 + 3mn = mn(m-n+3)$$

$$(m-n)(m-n+9) = 13p/p ; p^2 \leq 13 ; 3q/q ; q \leq 3p ; 13p/p$$

$$m-n > m-n-9 \Rightarrow m-n = 13p$$

$$m-n-9 = p$$

$$13p-9 = p$$

$$m-n = p^2$$

$$m-n-9 = 13$$

$$m-n = 13$$

$$m-n-9 = p^2$$

$$p^2 - 9 = 13$$

$$p^2 = 4$$

$$p = 2$$

$$p+9 = 13p$$

$$12p = 9$$

$$p = \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$$

$$3q+2=4^2$$

$$3q-1=3$$

$$3q = 4$$

$$q = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$m-n = 3$$

$$m-n-9 = 4^2$$

$$4^2 - 9 = 3$$

$$m-n = 4^2$$

$$m-n-9 = 3$$

$$4^2 - 9 = 3 \notin \mathbb{N}$$

$$m-n = 9$$

$$3q = 9$$

$$q = 3 \in \mathbb{N}$$

$$1-1=3q$$

$$1+2=3q$$

$$2=1$$

$$13p^2 = m-n$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$3q^2 = m-n$$

$$1 = m-n-9$$

$$m-n = 10$$

$$3q^2 = 10$$

$$m-n = 10$$

$$1 = m-n-9$$

$$m \cdot n \cdot (m-n+3) = 4 \cdot 9 \cdot 3 ; 4 \cdot 3 \cdot 9 ; 3 \cdot 9 \cdot 9 ;$$

$$m \cdot n = 1 \cdot 3 ; 3 \cdot 1 ; 3q \cdot q^2 ; 1 \cdot 3^2 ; q^2 \cdot 3 ; q^2 \cdot 1 \cdot 3 ;$$

$$m-n-3 = 3q^2 \cdot q^2 ; 3q \cdot 3 ; q^2 \cdot 3 \cdot 1 ; 3q \cdot q \cdot 1 ; 3 \cdot q \cdot 1 \cdot q ;$$

$$q = q \cdot 1 \cdot 1 ; 1 \cdot 3 \cdot q ; q \cdot 3q \cdot 1 ; q \cdot 1 \cdot 3q ; 3 \cdot 1 \cdot q^2$$

$$3 \cdot q^2 \cdot 1 ; 1 \cdot q \cdot 3q ; 1 \cdot 3q \cdot q$$

$$3q^2 \cdot 1 \cdot 1 ; 1 \cdot 3q^2 \cdot 1 ; 1 \cdot 1 \cdot 3q^2$$