



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a_2 &= 12 - 12x = a_1 + b & a_1 - \text{первый член прогрессии, } b - \text{шаг прогрессии} \\ a_4 &= (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3b \\ a_8 &= -6x^2 = a_1 + 7b \end{aligned}$$

$$2((x^2 + 4x)(x^2 + 4x) - (12 - 12x)) = -6x^2 - (x^2 + 4x)(x^2 + 4x)$$

$$2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 16x^2 + 12x - 12) = -6x^2 - (x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$2(x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 12x - 12) = -6x^2 - x^4 - 8x^3 - 16x^2$$

$$\underline{2x^4 + 16x^3 + 32x^2 + 24x - 24} + \underline{6x^2 + x^4 + 8x^3 + 16x^2} = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

Проверим угадывая корни $x_1, x_2 = -2 \Rightarrow$ ~~$2^4 - 2^6 + 18 \cdot 2^2 - 2^4 - 8 = 0$~~
 $-64 + 72 - 8 = 0$ — подходит

Проверим угадывая корни $x_2, x_2 = -4 \Rightarrow$ ~~$4^4 - 2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8 = 0$~~
 $-(4^4) + 18 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 8 = 0$
 $4^2(18 - 16) - 40$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 & x + 2 \\ \underline{x^4 + 2x^3} & \\ \hline 6x^3 + 18x^2 & \\ \underline{6x^3 + 12x^2} & \\ \hline 6x^2 + 8x & \\ \underline{6x^2 + 12x} & \\ \hline -4x - 8 & \end{array}$$

Итого: $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)(x^3 + 6x^2 + 6x - 4)$; $x^3 + 6x^2 + 6x - 4 = (x + 2)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 6x - 4 & x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} & \\ \hline 4x^2 + 6x & \\ \underline{4x^2 + 8x} & \\ \hline -2x - 4 & \end{array}$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = (x + 2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 = 24 = 4 \cdot 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 8x - 8 = (x+2)^2(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6}) = 0$$

и $(x^2 + 4x + 4) \cdot (-6x^2)$ — корни отрицательны.

Ответ: $\begin{cases} x = -2 \\ x = -2 - \sqrt{6} \\ x = -2 + \sqrt{6} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases}$$

$$10x + 5y - 8(3x - 2y) - 4(2x - 3y)$$

Максимальное значение $10x + 5y$ достигается при минимальном значении $(3x - 2y)$ и максимальном значении $(2x - 3y)$,

$$\text{т.е. } 3x - 2y = -4, \quad 2x - 3y = 6$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = -8 \\ 6x - 9y = 18 \end{cases} \quad \text{Система разрешима,}$$

$$\text{значит } \min(10x + 5y) = 8 \cdot (-4) - 4 \cdot 6 = -32 - 24 = -56$$

Отв: -56



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Случай 2:

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2 \\ m(m-2n-2) = r^2 \end{cases}$$

Аналогично случаю 1: $q^2 = 1$ тогда q — либо равно только 2, тогда

$$(m-2n)(m-2n+13) = 60, \quad \exists a = m-2n, \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$a(a+13) = 60 \quad a^2 + 13a - 60 = 0$$

$$a^2 + 13a - 60 = 0$$

$$D = 169 + 4 \cdot 60 = 409 \text{ — не к.п.ч.}$$

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} \text{ — не целые} \Rightarrow \emptyset$$

Ответ: $(+0; 2)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Решение: AX - биссектриса, M - середина BC , $NZ \parallel AX$, $X = ABCMZX$

$$AC = 18, AZ = 6, XZ = 2$$

Найти: BC

Решение: $\triangle AXC \sim \triangle ZMC$ (2 угла) $\Rightarrow ZC = AC - AZ = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ZC}{AC} = \frac{MC}{CX} = \frac{2}{3} \Rightarrow X - \text{середина } BM, \text{ т.е. } BX = XC$$

по св-ву биссектрисы: $\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 3$

$$\Rightarrow AB = 6$$

$\triangle ABX \sim \triangle XBM$ (3 угла)

$$\frac{BM}{BX} = \frac{BX}{AB} = \frac{XM}{AX} = 2 \Rightarrow BX = 12 \Rightarrow AX = 6$$

$\Rightarrow \triangle XAZ$ равнобедрен $\Rightarrow \angle MZC = \angle AZX = \angle AXZ$

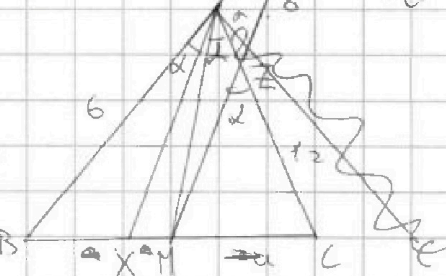
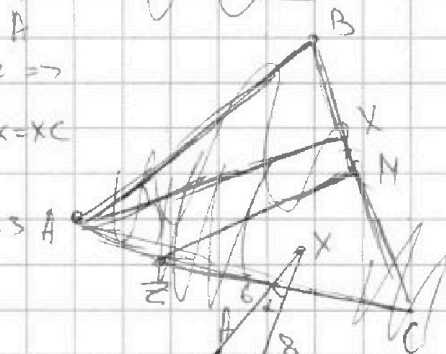
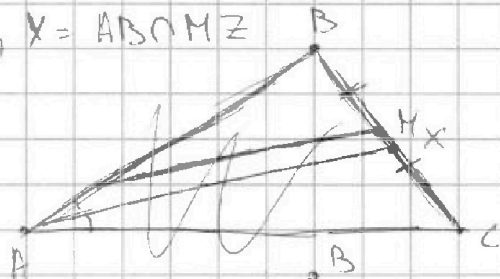
$$\Rightarrow \text{по косинусов в } \triangle AXZ: 8^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cos(180 - 2\alpha)$$

$$64 = 72 - 72 \cos(180 - 2\alpha); \quad 8 = 72 \cos(180 - 2\alpha); \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{1}{9}$$

тогда по кос в $\triangle ABC: a^2 = 6^2 + 18^2 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \cos 2\alpha$

$$a^2 = 36 + 324 - 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = 360 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 360 + 24 = 384$$

$$BC = a = \sqrt{384}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-y} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + y^2 \end{cases} \quad \left| \quad x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 3 \right.$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

$$2x^5 - 2y^5 + 4x^2 - 4y^2 + \sqrt{3x} - \sqrt{3y} = 0$$

$$2(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 4(x-y)(x+y) + \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

Допустим, $x > y$, тогда знаки всех слагаемых "+", равенство не и.о. выполняющим, если же $x < y$, то знаки всех слагаемых "-", равенство тоже не и.о. выполняющим, тогда остается, $x = y \geq 0$

~~$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2}$$~~

~~$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = \sqrt{(x+4)(3-x)} \cdot 2$$~~

~~$$5 = \sqrt{(x+4)(3-x)} - \sqrt{x+4} + \sqrt{(x+4)(3-x)} + \sqrt{3-x}$$~~

~~$$\text{Ид } a = \sqrt{x+4}; b = \sqrt{3-x}, a \geq 0, b \geq 0$$~~

~~$$a - b + 5 = 2ab; a - b + 5 - 2ab = 0$$~~

~~$$a(1-2b) - b + 5 = 0 = a(1-2b) + (0,5-b) + 4,5 = 0$$~~

~~$$(a+0,5)(1-2b) + 4,5 = 0$$~~

~~$$(2a+1)(1-2b) = -9, \quad 2a+1 = \frac{9}{2b-1}, \quad 2a = \frac{9}{2b-1} - 1 = \frac{9-2b+1}{2b-1}$$~~

~~$$2a = \frac{10-2b}{2b-1} \Rightarrow a = \frac{5-b}{2b-1}$$~~

~~$$\sqrt{x+4} = \frac{5-\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}-1}$$~~

~~$$(2\sqrt{3-x}-1)\sqrt{x+4} = 5-\sqrt{3-x}; \sqrt{3-x} + \frac{1}{2}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2\sqrt{3-x} - 1)\sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{3-x}$$

$$(x+4)(4(3-x) - 4\sqrt{3-x} + 1) = 3-x - 10\sqrt{3-x} + 25$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2} + \sqrt{3-x}$$

$$x+4 + 10\sqrt{x+4} + 25 = 4x - 2x - 2x^2 + 4(3-x)\sqrt{x+4} + 3-x$$

$$10\sqrt{x+4} + x+29 = 2x - 2x^2 + 4(3-x)\sqrt{x+4}$$

$$10\sqrt{x+4} + 2 = -2x^2 - 4x + 4(3-x)\sqrt{x+4}$$

$$5\sqrt{x+4} + 1 = -x^2 - 2x + 2(3-x)\sqrt{x+4}$$

$$5\sqrt{x+4} - 2(3-x)\sqrt{x+4} = -(x+1)^2$$

$$5\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+4}(3-x)$$

$$5(2+4) - 20(3-x)(2+4) + 4(3-x)^2(2+4) = (x+1)^4$$

$$5x+20 - 20(6x+12-x^2-4x) + 4(x^3-2x^2-6x^2-24x+9x+36) = (x+1)^4$$

$$5x+20 + 20(x^2+x-12) + 4(x^3-2x^2-15x+36) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$5x+20 + 20x^2 + 20x - 240 + 4x^3 - 8x^2 - 60x + 144 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$4x^3 + 12x^2 - 35x - 46 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$6x^2 - 23x - 47 = x^4 - x^4 - 6x^2 + 35x + 47 = 0$$

$$\sqrt{x+4} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2} + \sqrt{3-x}$$

$$x+4 + 10\sqrt{x+4} + 25 = 4x - 4x - 4x^2 + 4(3-x)\sqrt{x+4} + 3-x$$

$$10\sqrt{x+4} - 4\sqrt{x+4}(3-x) + x+29 = 4x - 4x - 4x^2 + 3-x = 5 - 5x - 4x^2$$

$$10\sqrt{x+4} - 4\sqrt{x+4}(3-x) = -4x^2 - 6x - 22$$

$$5\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+4}(3-x) = -2x^2 - 6x - 11 = -(2x^2 + 6x + 11)$$

$$25(x+4) - 20(x+4)(3-x) + 4(x+4)(3-x)^2 = (2x^2 + 6x + 11)^2$$

$$25x+100 + 20(x^2+x-12) + 4(x^3-2x^2-15x+36) = 4x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 132x + 121$$

$$25x+100 + 20x^2 + 20x - 240 + 4x^3 - 8x^2 - 60x + 144 = 4x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 132x + 121$$

$$4x^3 + 12x^2 - 15x + 4 = 4x^4 + 24x^3 + 80x^2 + 132x + 121$$

$$4x^4 - 20x^3 - 68x^2 + 144x + 117 = 0$$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{2-x-x^2} = 2\sqrt{(1+x)(3-x)}$ при $x \uparrow$, левая часть \uparrow монотонно возрастает, правая монотонно убывает (на области $\text{sup-}x$)
 \Rightarrow ур-е имеет не более одного решения, найдем его:

при $x=0$: $2 - \sqrt{3} + 5 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$; $7 - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; $7 = 5\sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате 4×4 , 64 узла сетки,

по свойству квадрата, он переходит себя

при осевом повороте на 90° , каждая сторона

соответствует конкретной позиции клетки цвет

клетки, следовательно положение квадрата при

осевом вращении - 4, если закрашенные клетки симметричны

от 90° осей симметрии квадрата, то у нас 2 различных положения

способов выбрать две разные клетки $64 \cdot 63$, способ "не брать"

4 - 2 различных положений $\frac{64 \cdot 63}{2}$ - так первая клетка однозначно

задает вторую и $\frac{1}{2}$, так мы считаем пары $a \cdot b$ и $b \cdot a$, как разные

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 63}{2} = 4 + \frac{64}{2} : 2 = 16 \cdot 63 \cdot \frac{1}{2} + 16 = 8 \cdot 63 + 16 = 520$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The main problem is a linear programming task:

$$\min (10x + 5y)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 6 \\ 2x - 3y \leq 4 \end{cases}$$

The work includes:

- Graphical solution showing the feasible region on a coordinate plane.
- Algebraic solution using the method of Lagrange multipliers (KKT conditions).
- Verification of optimality conditions.
- Final answer: $x=2, y=0$.

Additional notes and calculations are scattered throughout the page, including various algebraic manipulations and checks.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$m, n \in \mathbb{N}$; p, q — простые

$$\begin{cases} m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 14p^2 \\ m^2n - 2mn^2 - 2mn = 15q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 15q^2 \\ m^2n - 2mn^2 - 2mn = 14p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 14p^2 \\ mn(m-2n-2) = 15q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 15q^2 \\ mn(m-2n-2) = 14p^2 \end{cases}$$

~~Случай 1:~~

$$\begin{cases} (m-2n)(m-2n+13) = 14p^2 \\ mn(m-2n-2) = 15q^2 \end{cases}$$

Решим $(m-2n)(m-2n+13) = 14p^2$, посмотрим на скобки

$(m-2n)$ и $(m-2n+13)$, они разной четности, если $p \neq 2$, то

$14p^2 = 14 \cdot p \cdot p = \text{нечет} \cdot \text{нечет} \cdot \text{нечет} \Rightarrow$ все нечет множ. \Rightarrow

$(m-2n)$ и $(m-2n+13)$ не могут быть разной четности ~~$p=2$~~

\Rightarrow решим и при $p=2$, тогда:

$$(m-2n)(m-2n+13) = 14 \cdot 4, \text{ скобки разной четности и отличаются на } 13, \text{ значит}$$

$m-2n=4 \cdot m=2n+4$, подставим:

$$mn(m-2n-2) = (2n+4)n \cdot (2n+4-2n-2) = 15q^2$$

$$2n(2n+4) = 15q^2 \Rightarrow 2n : 2, 2n+4 : 2 \Rightarrow 15q^2 : 4 \Rightarrow q=3 \Rightarrow$$

$$2n(2n+4) = 15 \cdot 4 \Rightarrow n(n+2) = 15 \Rightarrow n=3, m=2n+4=10$$