



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(t+4)(t-2) = 0$$

$$t = -4$$

$$t = 2$$

$$x^2 + 4x = -4$$

$$x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

$$x = -2$$

$$x = \sqrt{6} - 2$$

проверим:

$$12 + 12 \cdot 2 = 36$$

$$12 - 12x = 12 + 24 - 12\sqrt{6} = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$(x^2 + 4x)^2 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$(x^2 + 4x)^2 = 4 \Rightarrow d = \frac{4 - 36 \pm 12\sqrt{6}}{2} = -6 \pm 6\sqrt{6}$$

$$-6x^2 = -24$$

$$-6x^2 = -6(\sqrt{6} - 2)^2$$

не подходит

$$12 - 6\sqrt{6} = -6(6 + 4 - 4\sqrt{6})$$

Подходит - прощ.  
с макс  $d=10$

$$= 24\sqrt{6} - 80$$

не подходит - прощ.  
с макс  $d=6\sqrt{6} - 16$

$$x = \sqrt{6} - 2$$

$$12 - 12x = 36 + 12\sqrt{6}$$

$$(x^2 + 4x)^2 = 4$$

$$-6x^2 = -6(6 + 2 + 4\sqrt{6})^2 = -60 - 24\sqrt{6}$$

не подходит - прощ.  
с макс  $d = -6\sqrt{6} - 16$

Ответ:  $x = -2$ ;  $x = \sqrt{6} - 2$ ;  $x = -\sqrt{6} - 2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a_1$  - первый элемент <sup>данной</sup> арифметической прогрессии, а  $d$  - шаг прогрессии. Тогда по условию:

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x & (1) \\ a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 & (2) \\ a_1 + 7d = (-6x^2) & (3) \end{cases}$$

Вычтем из (3) - (1).

$$a_1 + 7d - a_1 - d = (-6x^2) + 12x - 12$$

$$6d = -6x^2 + 12x - 12$$

$$d = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 4d = -4x^2 + 8x - 8 \quad (4)$$

Вычтем из (3) - (2).

$$a_1 + 7d - a_1 - 3d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$\text{из (4)} \quad -4x^2 + 8x - 8 = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$2x^2 + 8x - 8 = -(x^2 + 4x)^2$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4) - 8 = 0$$

Пусть  $t = (x+4) \cdot x$ , тогда  $t^2 + 2t - 8 = 0$

$$(t+4)(t-2) = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 & (1) \\ |3x - 2y| \leq 4 & (2) \end{cases}$$

мы можем доказать на комм. число.

~~Докажем~~  
(1) на 3, а  
(2) на 2

~~Докажем~~

поком.  
(1) на 2, а (2) на 3

$$\begin{cases} |6x - 9y| \leq 18 \\ |6x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -18 \leq 6x - 9y \leq 18 & (3) \\ -8 \leq 6x - 4y \leq 8 & (4) \end{cases}$$

тогда из (3)

$$6x \geq 4y - 8$$

из (4)

$$6x \leq 18 + 9y$$

тогда

$$18 + 9y \geq 4y - 8$$

$$5y \geq -26$$

получим оценку на 5y

значит сумма 5y и 10x  $\geq -26 + (-48)$

$= -74$  быть меньше она не может  
используем достигается или ~~она~~ она

$$\begin{cases} |4x - 6y| \leq 12 \\ |9x - 6y| \leq 12 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -12 \leq 4x - 6y \leq 12 & (5) \\ -12 \leq 9x - 6y \leq 12 & (6) \end{cases}$$

тогда из (5)

$$-6y \leq 12 - 4x$$

из (6)

$$-6y \geq -12 - 9x$$

тогда

$$-12 - 4x \geq -12 - 9x$$

$$5x \geq -24$$

$$10x \geq -48$$

получим оценку на 10x





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $x = -4,8$  ;  $y = -5,2$  , тогда  
ищем :  $\begin{cases} |-9,6 + 15,6| \leq 6 & - \text{верно} \\ |-14,4 + 10,4| \leq 4 & - \text{верно} \end{cases}$

а сумма  $10x + 5y = -48 - 26 = -74$   
Ответ:  $-74$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1  
англ?

Пусть  $A = 15q^2$ , тогда из условия

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) =$$

$$= (m-2n)(m-2n+13) = 15q^2$$

1) Пусть  $m-2n \equiv q^2$ , тогда

$$\begin{cases} m-2n+13 = 3 \\ m-2n+13 = 5 \\ m-2n+13 = 15 \\ m-2n+13 = 9 \end{cases}$$

устан, что

$$B = m^2 - 2mn^2 - 2mn =$$

$$= mn(m-2n-2)$$

Т.к.  $mn$  - катет гипот.

а  $B$  положительное

в любом случае,

$$\text{то } m-2n-2 > 0$$

$$\Rightarrow m-2n > 2$$

тогда  $m-2n+13 > 15$   
противоречие  $\Rightarrow m-2n \not\equiv q^2$

2) Пусть  $m-2n \equiv q$ , но  $\not\equiv q^2$ ,

тогда

$$m-2n \equiv q \quad \text{и} \quad m-2n+13 \equiv q$$

$$13 \equiv q \Rightarrow q = 13, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} m-2n = 13 \\ m-2n = 3 \cdot 13 \\ m-2n = 5 \cdot 13 \\ m-2n = 15 \cdot 13 \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \text{но тогда} \\ m-2n+13 = 26 \\ m-2n+13 = 5^2 \\ m-2n+13 = 7^2 \\ m-2n+13 = 16 \cdot 13 \end{cases}$$

$\Rightarrow m-2n \not\equiv q$  невозможно, т.к.  $A = 15q^2 = 15 \cdot 13^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

Мы найдем, что  $A \neq 15q^2 \Rightarrow$

$$A = 17p^2 \Rightarrow (m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

Тогда будем

1) Пусть  $m-2n \equiv p^2$ , тогда

$$\begin{cases} m-2n+13 = 17 & \text{возможно при } m-2n=4=p^2 \\ m-2n+13 = -1 & \text{невозможно, т.к. } m-2n > 2 \end{cases}$$

тогда  $p=2$ , откуда  $A = m(m-2n+2)$

$$= m \cdot (4-2) = 2m = 15q^2 \Rightarrow$$

$$15q^2 \div 2 \Rightarrow q=2 \Rightarrow 2m = 60 \Rightarrow m=30$$

$$m = 2n+4 \Rightarrow n(2n+4) = 30 \Rightarrow$$

$$2n^2 + 4n = 30$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$(n+5)(n-3) = 0$$

$$\Downarrow \\ n=3 \Rightarrow m=10$$

2) Пусть  $m-2n \equiv p$ , но  $\not\equiv p^2$ ,

тогда  $m-2n+13 \equiv p \Rightarrow 13 \equiv p \Rightarrow p=13$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-2n=13 & \text{невозможно, т.к. } m-n+13 \equiv 17 \\ m-2n=17 \cdot 13 & \text{невозможно, т.к. } m-n+13 \equiv m-2n-2n \end{cases}$$

случай невозможен.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Раз  $m - 2n \neq 9$ , то

$$\begin{cases} m - 2n = 3 \\ m - 2n = 5 \\ m - 2n = 15 \\ m - 2n = 1 \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} m - 2n + 13 = 16 & (1) \\ m - 2n + 13 = 18 & (2) \\ m - 2n + 13 = 28 & (3) \\ m - 2n + 13 = 14 & (4) \end{cases}$$

(1) невозможен, т.к.  $16 \neq 5$ , а должно

(2)  $18 \in 3\mathbb{Q}^2$  (т.к.  $3 \cdot 6^2 = 18$ ) также возможно при

(3)  $28 \notin 9\mathbb{Q}^2$  невозможен, т.к.  $28 \neq 9^2$

(4) невозможен, т.к.  $14 \neq 15 \cdot 9^2$

Значит  $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$   $\textcircled{4}$  невозможен ~~также~~

пусть  $q = 3$  отсюда  $m - 2n = 5$

отсюда  $B = mn \quad (m - 2n - 2) = 3 \cdot (2n + 5) / n =$

$17 \neq p^2$  отсюда  $17 \neq p^2 : 3$

$\Rightarrow p = 3 \Rightarrow 17 \cdot 3 = 2n^2 + 5n$

$$2n^2 + 5n - 51 = 0$$

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 408}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{433}}{4}, \text{ но}$$

$20^2 < 433 < 21^2 \Rightarrow n$  иррац. ~~тык~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3)  $m - 2n \neq p$ , тогда  $\begin{cases} m - 2n = 1 \\ m - 2n = 17 \end{cases}$

$m - 2n$ , тогда  $m - 2n + 13 = 14 \neq 17p^2$

$m - 2n = 17$ , тогда  $m - 2n + 13 = 30 \neq p^2$

Другой невозможен.

Ответ  $n = 3$ ,  $m = 10$

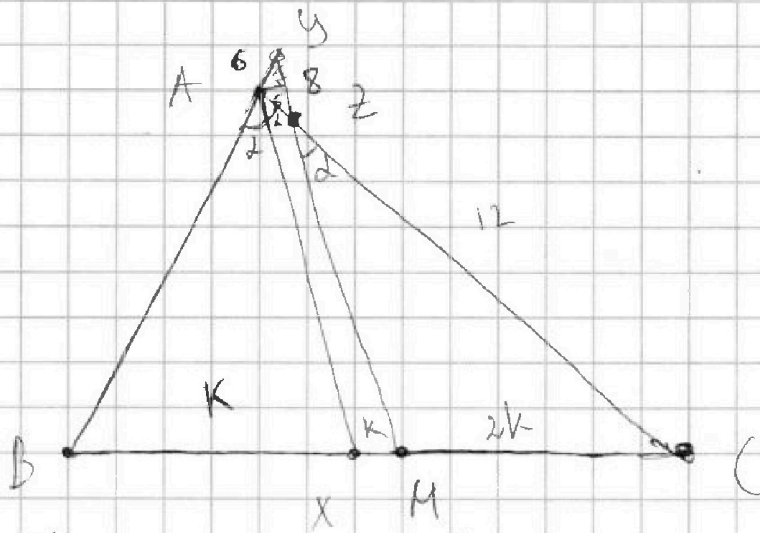
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано!

$$AC = 18$$

$$AZ = 6$$

$$YZ = 8$$

$$YM \parallel AX$$

$$BC = 7$$

Пусть  $\angle BAX = \alpha$ , тогда  $\angle CAX = \alpha$  т.к. AX-бис-а

1) Из того, что  $MZ \parallel AX$  следует, что

$$\angle CAX = \angle CZM = \alpha \text{ как соотв., отсюда}$$

$$\angle AZY = \alpha \text{ как внутр. с } \angle CZM.$$

2) Заметим, что, т.к. Z лежит на AC, то т. M лежит на XC.

$$AZ = 6 \Rightarrow CZ = AC - AZ = 12$$

3) По II о проп. отр. для  $\angle XCA$  и  $AX \parallel MZ$

$$\frac{CM}{MX} = \frac{CZ}{AZ} = \frac{2}{1} \text{ Пусть } MX = k, \text{ тогда}$$

$$CM = 2k, \text{ т.к. } M - \text{середина, то}$$

$$CM = BM = 2k \Rightarrow BX = BM - XM = k$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) По условию  $\angle A = 2\alpha$  и  $\angle C = 2\alpha$ . Тогда  $\angle A + \angle C = 4\alpha = 180^\circ - \angle B$ .  
 $\Rightarrow \angle A = \angle C = 45^\circ$ . Тогда  $\triangle ABC$  - равнобедренный с  $AB = AC = 6$ .

5) По условию  $\angle A = 2\alpha$  и  $\angle C = 2\alpha$ . Тогда  $\angle A + \angle C = 4\alpha = 180^\circ - \angle B$ .  
 $\Rightarrow \angle A = \angle C = 45^\circ$ . Тогда  $\triangle ABC$  - равнобедренный с  $AB = AC = 6$ .

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} \Rightarrow AB = AC = 6$$

6) В  $\triangle ABC$  проведем высоту  $AD$ , тогда

$$AD = \frac{AC \sin \alpha}{2} = 4 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

7) По условию  $\angle A = 2\alpha$  и  $\angle C = 2\alpha$ . Тогда  $\angle A + \angle C = 4\alpha = 180^\circ - \angle B$ .

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 18^2 + 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 324 + 36 + 24 = 360 + 24 =$$

$$= 384 = 4^3 \cdot 6 \Rightarrow BC = 8\sqrt{6}$$

Ответ:  $8\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

то выберем точку в 1 квадрате.  
 можно  
 это сделать 16 способами, а точку не-  
 симметричную ей и в противоп. квадрате  
 — 15 способов (т.к. симметрич. точка  
 отн. диагонали) В такой же мере  
 квадратов есть способ ~~симметр.~~  
 отн.с. поворотом на  $180^\circ$  (т.к.  
 мы смотрим на не симметрич. точки  
 отн. центра)  $\Rightarrow$  ~~суммарно~~ способов будет  
 меньше, то есть  $\frac{16 \cdot 15}{2}$   
 Все ~~те~~ способы во второй против.  
 квадрате отсчитаются поворотами  
 на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  поворотами  
 $\frac{16 \cdot 15}{2} + 16 \cdot 16 + 16 + \frac{16 \cdot 15}{2}$  Ответ:  $\frac{16 \cdot 15}{2} + 16^2 + 16 + \frac{16 \cdot 15}{2}$   
 Примечание: Мы использовали <sup>там</sup> что точки  
 симметрич. отн. центра ~~отсчитываются~~  
 лежат в против. кв. И это суммарно  
 отсчитывается поворотами на  $90^\circ$ ,  
 поэтому ~~следует~~ из того, что центр — квадрат.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда поворотам отличаются 4 раскраски  
 - повороты и прямоугольники  
 (объединение двух осей), то есть  
 достаточно считать число способов  
 для одного прямоугольника.  
 Это сделать 16/16 способов.

Задача 3: Если мы перебрали  
 2 точки в противоположных  
 квадратах. Тогда они выбраны 2  
 точки симметричные от <sup>центра</sup> ~~диагонали~~  
 или не симметричны от ~~диаг.~~ центра.

3.1 Если симметричны, то для  
 пары противоп. квадратов - 16 способов  
 выбрать 2 точки (т.к. симметрична  
 от <sup>центра</sup> ~~диаг.~~ осей. одноугольн. квадр.  
 примет для 2<sup>ой</sup> пары <sup>противоп.</sup> симметрич.  
 точки уже рассмотрены, т.к. они  
 будут отличаться поворотом на  $90^\circ$

3.2 Если точки не симметричны.



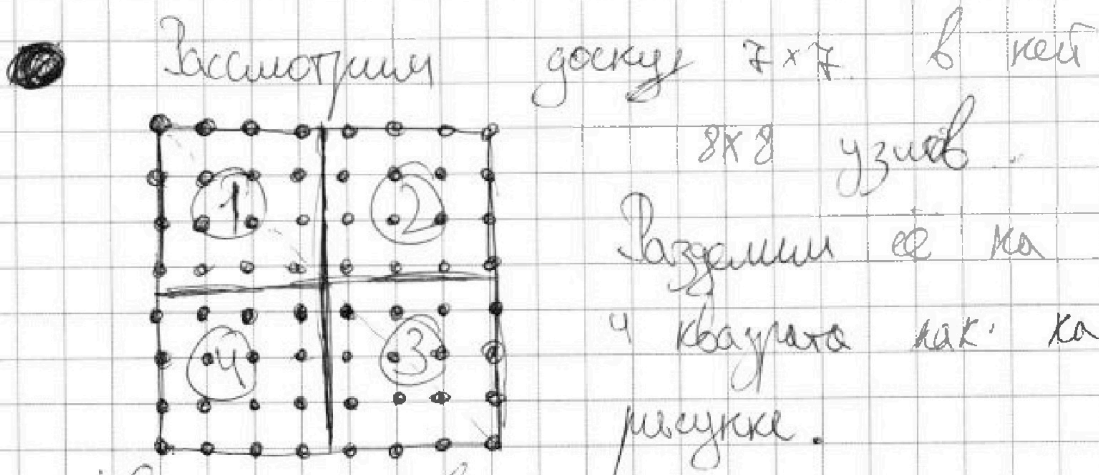


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Квадраты назовем соседними, если они граничат по стороне, а противоположными — (1 и 3) и (2 и 4).

Вариант 1: Если мы перекрасим 2 точки внутри одного квадрата. Заметим, что такая раскраска осуществляется поворотом — 4 (соотв. в 4 квадратах)  
⇒ достаточно посчитать число способов для одного квадрата это —  $C_{16}^2$

Вариант 2: Если мы перекрасим 2 точки в соседних квадратах.

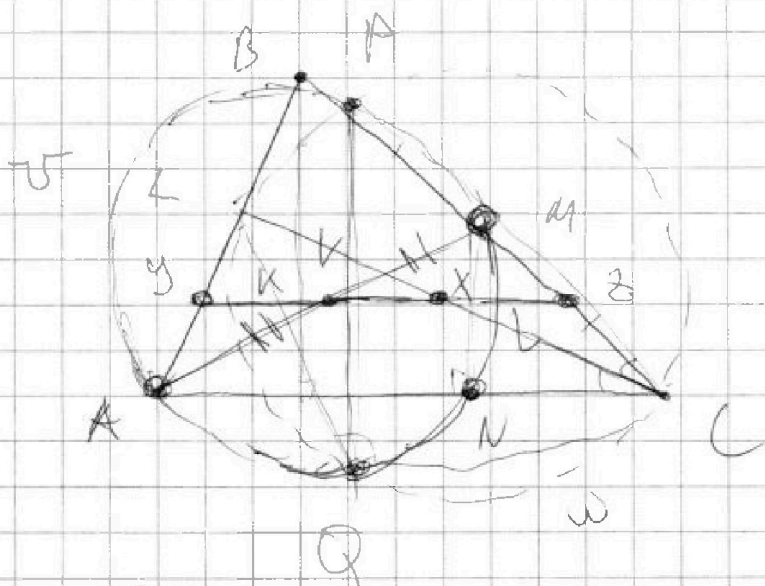


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано!  
 $AB = 6$   
 $AN = 5$   


---

 $AC = ?$   
 $BC = ?$

$PQ$  - рад. ось окружностей  $\omega$  и  $\Omega$   
 $\Omega \Rightarrow$  ось  $\perp$  линии центров  $\Rightarrow$   
 линии центров  $\perp$  высоте из т.  $B$   
 $\Rightarrow$  линии центров  $\parallel AC$

Пусть середина  $AM$  -  $K$ , а середина  $CL$  -  $X$ ,

тогда по осн. оси центров окр.-ей  
 $\omega$  и  $\Omega \Rightarrow KX \parallel AC$  пусть  $KX$

пересекает  $AB$  в т.  $Y$ , а  $BC$  в т.  $Z$

Отсюда для  $\triangle ALC$  и  $\triangle AMC$   $KY$  и  $KZ$

- ср. линии  $\Rightarrow CZ = CM = \frac{1}{2} BM$

$= \frac{1}{4} BC$

$\angle ANM = 90^\circ$ , т.к. ось на диаметр.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-6 \leq 2x - 3y \leq 6 \quad 18 \geq 6x - 9y \geq -18$$

$$(a; b) \text{ - возм. } -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \quad 8 \geq 6x - 4y \geq -8$$

$$(b; a) \text{ - возм. } -4 \leq 2x - 2y + x \leq 4 \quad 18 + 9y \geq 6x \geq -8 + 4y$$

$$\downarrow \begin{matrix} a+4 \\ +5=25 \end{matrix} = \sqrt{3 \cdot 6} \quad -6 \leq 2x - 2y + y \leq 6 \quad 9y \geq 5y \geq -26$$

$$|10x - 15y| \leq 30$$

$$|10x - \frac{20}{3}y| \leq \frac{40}{3}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{20}{3}y \geq 10x$$

$$-30 + 15y \leq 10x$$

$$4 + \frac{20}{3}y \geq -6 + 15y$$

10

$$|2x - 3y|$$

$$6x - 9y \geq -6$$

$$6x - 4y \leq 4$$

$$4 + 4y \geq 6x \geq 9y - 6$$

$$4 + 4y \geq 9y - 6$$

$$10 \geq 5y$$

$$2 \geq y \quad -14, 4$$

$$12 \geq 6x \geq$$

$$10x \geq -24$$

$$|4x - 6y| \leq 12 \quad 2 \geq x$$

$$x = -4, 8$$

$$y = -5, 2$$

$$|9x - 6y| \leq 12 \quad 15, 6$$

$$9x - 6y \geq -12$$

$$-6y \geq -12 - 9x$$

$$-6y \leq 12 - 4x$$

$$12 - 4x \geq -12 - 9x$$

$$24 \geq -5x$$

$$10x \geq -24$$

$$|2x - 3y| = |-9, 6 + 15, 6| = 6$$

$$|3x - 2y| = |-14, 4 + 10, 4| = 4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 + d = 12 - 12x \quad 20 \times 20 - 6d = (-6x^2) - 12 + 12x$$

$$a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \quad \begin{matrix} = 400 \\ 21 \cdot 21 = \\ = 441 \end{matrix} \quad d = -x^2 + 2x - 2$$

$$a_1 + 7d = (-6x^2) \quad 4d = -6x^2 - x^2 (x+4)^2$$

$$\begin{array}{r} 428 \\ 433 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ | \\ \hline \end{array}$$

$$-4x^2 + 8x - 8 = -6x^2 - x^2(x+4)^2$$

$$\frac{AB}{BX} = \frac{6}{MX}$$

$$2x^2 + 8x - 8 = -x^2(x+4)^2$$

$$(t-y) \leq 6$$

$$2x(x+4) - 8 = -x^2(x+4)^2$$

$$(t+x) \leq 4$$

$$\frac{AB}{CM} = \frac{6}{CM}$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4) + 1 = 9$$

$$\delta(2x+4)^2 = ? \quad \frac{CZ}{CM} = \frac{6}{xM} \quad (x(x+4)+1)^2 = 9$$

$$\begin{array}{l} 2x+y = t \\ (t-y) \leq 6 \\ \frac{3}{2}t - \end{array}$$

$$\frac{CZ}{CM} = \frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CX}$$

$$x(x+4)+1 = \pm 3$$

$$\begin{array}{r} 30x \\ 36 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 96 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 24 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$|2x-3y| \leq 6$$

$$(2x-3y)^2 \leq 36$$

$$(3x-2y)^2 \leq 9$$

$$(6+3y-2x)(6+2x-3y) \geq 0$$

$$(4+2y-3x)(4+3x-2y) \geq 0$$

$$B = mn(m-2n)^2 - 2$$

$$A = (m-2n)^2 - 13(m-2n) \quad y+2y-2x = t$$

$$A = (m-2n)(m-2n-13) \quad (t+y+2)/(-t)$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 4^3 \cdot 6 = \\ \times 24 \\ \hline 16 \\ - 144 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$4^3 \cdot 6 = 2^6 \cdot 6 \quad \sqrt{2^8 \cdot 6} = 8\sqrt{6}$$



$$\begin{array}{r} \times 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ \times 18 \\ \hline 324 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n)$$

$$= (m-2n+13)(m-2n) = A = 15q^2$$

$$B = mn(m-2n-2) = B = 17p^2$$

$$AB = mn(m-2n-2)(m-2n)(m-2n+13)$$

$$17 \cdot 15 p^2 q^2 = 17 \cdot 3 \cdot 5 p \cdot p \cdot q \cdot q$$

$$mn \cdot t \cdot (t+2)(t+15)$$

$$A = 15q^2 = (m-2n+13)(m-2n) = 15q^2$$

$$m-2n \equiv 0 \pmod{3} \quad \begin{matrix} \vdots q \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots q \\ 39 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots q \\ 65 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots q \\ 15 \cdot 13 \end{matrix}$$

$$m-2n \neq 13 \Rightarrow 0$$

$$q = 13$$

$$m-2n = 13$$

$$13k \equiv q^k$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q$$

$$q \cdot 3 \quad q \cdot 5 \quad q$$

$$m-2n \equiv q^2$$

$$13 + m-2n \equiv q^2$$

$$q \cdot 15$$

$$m-2n \equiv$$

$$3$$

$$5$$

$$15$$

$$28$$

$$A = 17p^2$$

$$p \quad p+13 \vdots p$$

$$13 \vdots p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

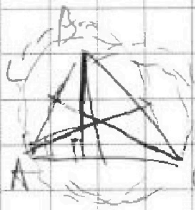
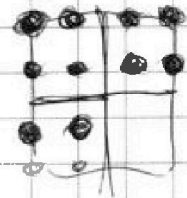
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим, что если  $(a, b)$  решение  
ур-ня  ~~$2x^5 + 4x^2 \sqrt{3y} = 2y^5 - 4y^2 \sqrt{3x}$~~   
то  $(b, a)$  тоже решение (т.к.  
оно симметрично отн.  $(x, y)$ )~~

Найдем  $b$  такие,  $a$  и  $b$  из

~~$$\sqrt{x+4} \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}$$~~

~~$$\sqrt{y+4} = \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-y-x^2}$$~~



$$x+4 \in 3+y+5$$

$$m - n + 5 = 2\sqrt{12 - m^2 + 4 - (3 - n)^2}$$

$$n = \sqrt{3-y^2} \quad n^2 = 3-y \quad \Leftrightarrow y = 3 - n^2$$

$$m = \sqrt{x+4} \quad x+4 = m^2 \quad x = m^2 - 4$$

$$m^2 + n^2 - 2mn + 10m + 10n + 25 = 4m^2 - 4(3 - n^2)^2$$

$(a, b)$

$$2(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + 4(x-y)(x-y) = \sqrt{3} / \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

