



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x . ~~.....~~

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

~~.....~~

~~.....~~

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q — простые числа. Решите!

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. ~~.....~~

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CE как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Пусть a_1 - первый член заданной арифметической прогрессии, d - ее разность. Тогда пятый член прогрессии равен $a_1 + 4d$, седьмой равен $a_1 + 6d$, одиннадцатый равен $a_1 + 10d$.

По условию,

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 6x + 18 & (1) \\ a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 & (2) \\ a_1 + 10d = -3x^2 & (3) \end{cases}$$

Вычтем (1) из (2): $2d = (x^2 - 4x)^2 - 6x - 18 \Rightarrow 2d = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18$. Делим обе части полученного уравнения на 2:

$$4d = 2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 \quad (4)$$

Вычтем (2) из (3): $4d = -3x^2 - (x^2 - 4x)^2 \Rightarrow 4d = -3x^2 - x^4 + 8x^3 - 16x^2 \Rightarrow 4d = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \quad (5)$

Из (4) и (5) уравнения получаем:

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 19x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

Пусть $f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$

Разделим $f(x)$ на $(x-2)$ по схеме Горнера:

| | | | | | |
|---|---|----|----|----|-----|
| | 1 | -8 | 17 | -4 | -12 |
| 2 | 1 | -6 | 5 | 6 | 0 |

~~4x^3 - 12x^2 + 10x - 12~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем, что $f(x) = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$

Разделим $x^3 - 6x^2 + 5x + 6$ на $x-2$ по схеме Горнера:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ & & 2 & -8 & 9 \\ \hline & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}$$

Получаем, что $f(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

$D/4 = 4 + 13 = 7$

Ответ: $x \in \{ 2, 2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7} \}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6-4x \leq -3y \leq 6-4x \\ -8-3x \leq -4y \leq 8-3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{3}x \geq y \geq -2 + \frac{4}{3}x \\ 2 + \frac{3}{4}x \geq y \geq -2 + \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{3}x \geq -2 + \frac{3}{4}x \\ 2 + \frac{3}{4}x \geq -2 + \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}) \geq -4 \\ x(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}) \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot \frac{7}{12} \geq -4 \\ x \cdot \frac{7}{12} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{48}{7} \\ x \leq \frac{48}{7} \end{cases} \quad (1)$$

Почка

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} -6+3y \leq 4x \leq 6+3y \\ -8+4y \leq 3x \leq 8+4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \leq x \leq \frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \\ -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \leq x \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \leq \frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \\ -\frac{8}{3} + \frac{4}{3}y \leq \frac{6}{4} + \frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{6}{4} - \frac{8}{3} \\ y \cdot \frac{7}{12} \leq \frac{6}{4} + \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cdot \frac{7}{12} \geq -\frac{50}{12} \\ 7y \leq \frac{50}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{50}{7} \\ y \leq \frac{50}{7} \end{cases} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 7(2x+y) \geq 7(2 \cdot -\frac{48}{7} - \frac{50}{7}) = -96 - 50 = -146$$

Равенство достигается при $(x, y) = (-\frac{48}{7}, -\frac{50}{7})$

Заметим, что из начальных условий вытекает.

Ответ: -146



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть $A = 13p^2$

Разберем случаи, учитывая, что p - простое

| | | | | | | | | | | | | |
|---------|------------------------|-------------|----------------|---------|----------------|-------|-------------------------------------|---------|---------------|------------------------|----------------|-------------|
| $m-n$ | 1 | 13 | $13p$ | $13p^2$ | p | p^2 | -1 | -13 | - $13p$ | - $13p^2$ | - p | - p^2 |
| $m-n+9$ | $13p^2$ | p^2 | p | 1 | $13p$ | 13 | - $13p^2$ | - p^2 | - p | -1 | - $13p$ | -13 |
| p | $\sqrt{\frac{10}{13}}$ | $\sqrt{22}$ | $-\frac{3}{4}$ | - | $\frac{9}{14}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ | 2 | $\frac{8}{4}$ | $\sqrt{\frac{10}{13}}$ | $-\frac{3}{4}$ | $\sqrt{22}$ |

Подходит только $m-n = p^2 - 4$ и $mn = -13$

Подставим в B:

$$\begin{cases} 7mn = 39^2 \\ -10mn = 39^2 \end{cases} \text{ - нет решений, т.к. } m, n \in \mathbb{N}$$

$$7mn = 39^2 \Rightarrow 39^2 : 7 \Rightarrow 9^2 : 7 \Rightarrow 9 = 7$$

Тогда $\begin{cases} 7mn = 3 \cdot 49 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mn = 21 \\ m-n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ (m+n)^2 = 16 + 4 \cdot 21 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ m+n = 10 \\ m+n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 4 \\ m+n = 10 \\ m-n = 4 \\ m+n = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = (7, 3) \\ (m, n) = (-3, -7) \end{cases}$$

2. Пусть $A = 39^2$

Разберем случаи. Будем обозначать "-" неподходящее q

| | | | | | | | | | | | |
|---------|--------|-------|------|--------|------|-------|----------|---------|--------|----------|--------|
| $m-n$ | 1 | 3 | 39 | 39^2 | 9 | 9^2 | -1 | -3 | - 39 | - 39^2 | - 9 |
| $m-n+9$ | 39^2 | 9^2 | 9 | 1 | 39 | 3 | - 39^2 | - 9^2 | - 9 | -1 | - 39 |
| q | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Ни один случай не укл. усл.

Ответ: (7, 3), (-3, -7)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть $\angle XAB = \alpha$. Тогда $\angle CAH = \alpha$, т.к. AH - биссектриса $\angle A$

Из параллельности MY и AH получаем, что $\angle YZA = \angle ZAH = \alpha$

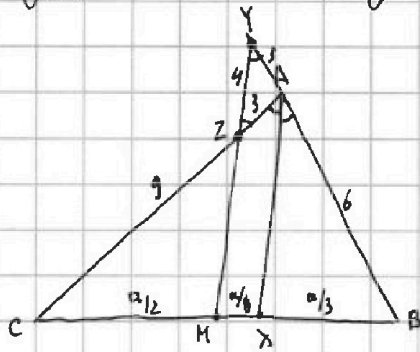
$\angle ZAB$ - внешний для $\triangle AZY$.

Значит, $\angle ZYA + \angle YZA = \angle ZAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ZYA = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

То есть $\angle AZY = \angle YZA$

Вывод: $\triangle ZAY$ - р/б ($AZ = AY = 3$)



Пусть $BC = a$. AM - медиана $\Rightarrow CM = MB = \frac{1}{2}a$

$MZ \parallel AH \Rightarrow \angle CZM = \angle CAH$, $\angle ACX$ - общий для $\triangle CZM$ и $\triangle CAH$.

Значит, $\triangle CZM \sim \triangle CAH$ по двум углам.

Отсюда $\frac{a}{2} = \frac{CZ}{CA} = \frac{CM}{CX} \Rightarrow \frac{a/3}{1/2a} = \frac{1/2a}{1/2a + MX} \Rightarrow \frac{3}{2}a + 3MX = 2a$

$$\Rightarrow 3MX = \frac{a}{2} \Rightarrow MX = \frac{a}{6}$$

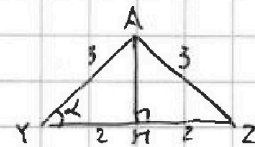
$$\frac{a}{2} = MB = MX + XB = \frac{a}{6} + XB \Rightarrow XB = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$$

По свойству биссектрисы, $\frac{AB}{AC} = \frac{XB}{XC} \Rightarrow \frac{AB}{1/2} = \frac{a/3}{1/2a + a/6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{1/2} = \frac{a/3}{2a/3} \Rightarrow AB = 1$$

Рассмотрим р/б $\triangle AYZ$:

Высота AM этого равнобедренного треугольника является медианой. Значит, $MY = \frac{AY}{2} = 1$



$$\cos \alpha = \frac{MY}{AY} = \frac{1}{3}$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow BC^2 = 144 + 36 - 144 \cos 2\alpha \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1. \text{ Подставим значение } \cos \alpha = \frac{2}{3}:$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{9} - 1 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$$

$$\text{Подставим в (1): } BC^2 = 180 + 144 \cdot \frac{1}{9} = 180 + 16 = 196$$

$$\Rightarrow BC = 14$$

Ответ: 14



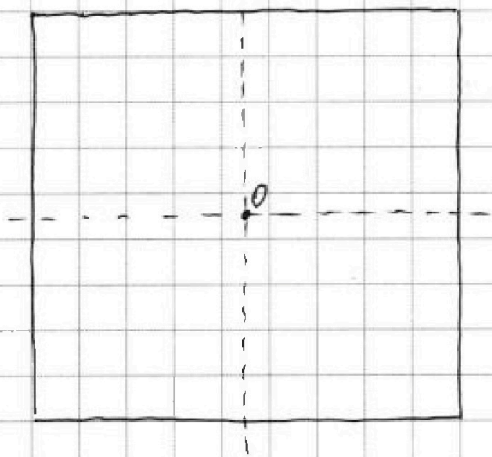
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6



Заметим, что всего в границах
цвет покрашено 100 точек

~~Назовем средними квадратами~~

Все симметрии, параллельные
сторонам квадрата делят его
на 4 ~~квадрата~~ части.

Назовем эти части четвертями.

Заметим, что на границе ~~четвертей~~ нет точек.

Если белые точки лежат в одной четверти, то есть еще 3
^{одинаковые} раскраски, поменяв их местами ~~на~~ ~~всего~~ наоборот.

Есть C_{25}^2 способов выбрать 2 белые точки в четверти. Это

Если белые точки лежат в соседних по стороне четвертях,
то таких раскрасок $25 \cdot 25$

Если белые точки лежат в ^{диагонально} ~~разных~~ ^{противоположных}
четвертях, то есть всего есть $25 \cdot 25$ точек раскрасок

$$\text{Итого получим } \frac{25 \cdot 24}{2} + 2 \cdot 25^2 = 25 \cdot 12 + 25 \cdot 50 + 25 \cdot 62 =$$

$$= ~~1625~~ 1550 \text{ раскрасок}$$

Ответ: ~~1625~~ 1550



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \begin{cases} m-n = -1 \\ m-n+g = -13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 1 \\ p^2 = -\frac{2}{13} \end{cases} \text{ - не укл. усл.}$$

$$\begin{cases} m-n = -13 \\ m-n+g = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 13 \\ p^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n = 13 \\ p = 2 \end{cases} \text{ - подходит}$$

$$\begin{cases} m-n = -13p \\ m-n+g = -p \end{cases} \Rightarrow g = 12p \text{ - не укл. усл.}$$

$$\begin{cases} mn = -13p^2 \\ m-n+g = -1 \end{cases} \Rightarrow 13p^2 = -10 \text{ - не укл. усл.}$$

Рассмотрим случай, когда $p=2, m-n=13$. Тогда $3p^2 - B = (13+3)mn$

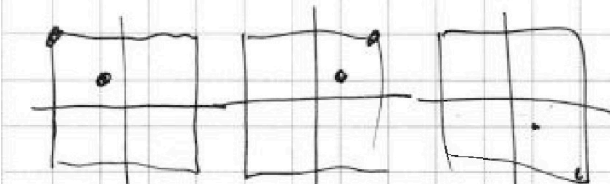
$$\Rightarrow 16mn = 3g^2$$

Отсюда $3g^2 : 16 \Rightarrow g^2 : 16$ ~~$g = 4$~~ , но g - простое
то есть $6g^2$ 2 входит в степень не больше 2

2. Пусть $A = 3g^2$, g - простое

Разберем случаи:

| | | | | | | | | |
|---------|-----------------------|------------|----------------|----------------|---------|--------|------|-------|
| $m-n$ | 1 | 3 | $3g$ | $3g^2$ | -1 | -3 | -3g | -3g^2 |
| $m-n+g$ | $3g^2$ | g^2 | g | g | $-3g^2$ | $-g^2$ | $-g$ | -1 |
| g^2 | $\sqrt{\frac{10}{3}}$ | $\sqrt{2}$ | $-\frac{2}{2}$ | --- | - | - | - | - |



$$|4x-3y| \leq 6$$

$$|3x-4y| \leq 8$$

$$7(2x+y)$$

$$4x-3y \leq 6$$

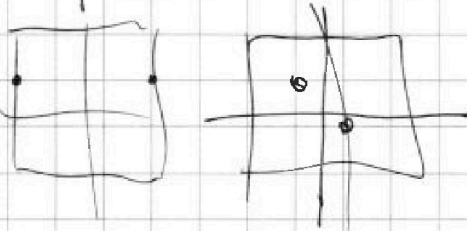
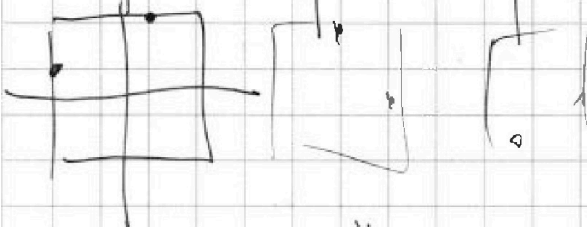
$$3x-4y \leq 8$$

$$-6 \leq 4x-3y \leq 6$$

$$-6 \leq 4x$$

$$-6+3y \leq 4x$$

$$-6-4x \leq$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$(*) \begin{cases} |4x-3y| \leq 6 \\ |3x-4y| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq 3x-4y \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 4x-3y \leq 6 \\ -8 \leq -3x+4y \leq 8 \\ -14 \leq 7x-7y \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14 \leq x+y \leq 14 \\ -2 \leq x-y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -14 \leq x+y \leq 14 \\ -2 \leq y-x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -16 \leq 2y \leq 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 \leq 2x \leq 16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -24 \leq 2x+y \leq 24 \quad | \cdot 7 \Rightarrow -168 \leq 14x+7y \leq 168$$

То есть $14x+7y \geq -168$. $4x^2 - 4y^2 + x - y \neq 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

Примем значение -118 достигается при $(x, y) = (-8, -8)$
 ~~$x=0, y=2$~~

Действительно: $14 \cdot (-8) + 7 \cdot (-8) = -112 - 56 = -118$.

Проверим, что (*) верно:

$$\begin{cases} |4 \cdot (-8) - 3(-8)| \leq 6 \\ |3 \cdot (-8) - 4(-8)| \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|-32 + 24| \leq 6$$

$$4x-3y$$

$$x = \frac{-48}{7}$$

$$\frac{48}{7}$$

$$50$$

$$\frac{625}{2}$$

$$1650$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 25 \\ \hline 310 \\ 124 \\ \hline 1550 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 25 \\ \hline 310 \\ 150 \\ \hline 1550 \end{array}$$

$$12 \cdot 25 = 3 \cdot 100$$

$$+ 2 \cdot 625 =$$

$$25 \cdot 12 = 25 \cdot 4 \cdot 3 = 500$$

$$2 \cdot 625$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

Дано: $m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9)$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = (m-n+3)mn$$

1. Пусть $A = 13p^2$, где p - простое.

Разберём случаи; учитывая, что p - простое и 13 - простое

1) $\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=13p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ p^2 = \frac{10}{13} \end{cases}$ - не удовл. условию

2) $\begin{cases} m-n=13 \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ 22=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13 \\ p = \sqrt{22} \end{cases}$ - не удовл. условию

3) $\begin{cases} m-n=13p \\ m-n+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ 13p+9=p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ 13p = p^2 - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p \\ p = \frac{-3}{4} \end{cases}$ - не удовл. усл.

4) $\begin{cases} m-n=13p^2 \\ m-n+9=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ 13p^2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=13p^2 \\ p^2 = \frac{-8}{13} \end{cases}$ - нет решений.

Но это ни одна из задач не для рассмотрен.

2. Пусть $A = 3q^2$, q - простое

Разберём случаи:

1) $\begin{cases} m-n=1 \\ m-n+9=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 10=3q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ q^2 = \frac{10}{3} \end{cases}$ - не удовл. усл.

2) $\begin{cases} m-n=3 \\ m-n+9=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ 12=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=3 \\ q = 2\sqrt{3} \end{cases}$ - не удовл. усл.

3) $\begin{cases} m-n=3q \\ m-n+9=q \end{cases} \Rightarrow$

4) $\begin{cases} m-n=3q^2 \\ m-n+9=q \end{cases} \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$12x - 9y = 18 \quad 4x - 3y = 6 \quad 3x - 9y = 8 \quad 2x + y = -24 \quad 4x$$

$$(2x - 16y = -32) \quad \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \quad 4x + 2y = -48$$

$$A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = (m-n)^2 + 9(m-n) = (m-n)(m-n+9) = 39^2$$

$$B = m^2n - mn^2 + 3mn = mn(m-n+3) = 13p^2$$

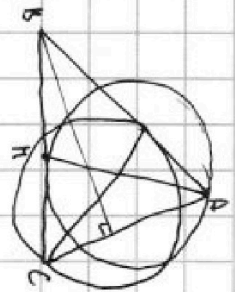
$$(m-n+3)^2 = m^2 - 2mn + n^2 + 6m - 6n + 9 = A - 3m + 3n - 9$$

$$A = (m-n+3)^2 + 3(m-n+3) = (m-n+3)(m-n)$$

$$B = (m-n+3)(mn) = mn(m-n+3)$$

$$-13+9 = -p \quad 9 =$$

$$(m-n+3)^2 = m^2 + n^2 + 9 - 2mn + 6m - 6n = m^2 + n^2 - 2mn + 9m - 9n - 6$$



m-n
p

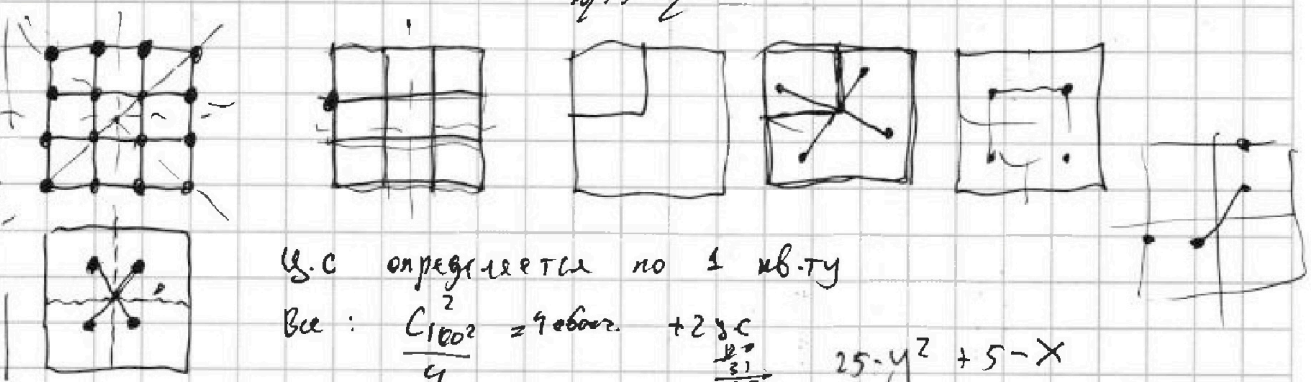
$$-13p^2 + 9 = -3m + 3n + 9 = 2 \cdot 3 \cdot (m-n+3)^2 \quad A = 3(m-n+3)$$

$$13p^2 = -10$$

$$A = (m-n+3)^2 + 3(m-n+3)$$

$$B = (m-n+3)(mn) = m \cdot n \cdot (m-n+3) = 13p^2$$

m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n



Ц.С определяется по 1 кв.ту

$$\text{Все: } \frac{C_{100}^2}{4} = 9 \text{ обог.} + 2 \text{ с.}$$

$$7 \text{ обог.} - 30 \text{ обог.} + 2 \text{ с.}$$

$$25 - y^2 + 5 - x$$

$$-x - 6 + 36 - y^2$$

$$x+6+5-y+25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{16} - 10\sqrt{5-y} =$$

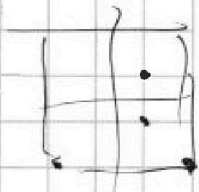
$$= 120 - 4x - 9y^2$$

$$5x - y + 4y^2 + 89$$

$$(x+6)(5-y) =$$

$$= 30 - xy + 5x - 6y$$

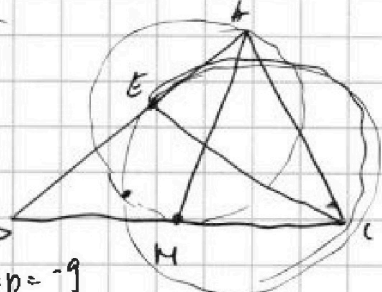
$$30$$



$$m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n =$$

$$\begin{cases} 13p^2 \\ -p^2 + 9 = -13p \end{cases}$$

$$-p + 9 = -13p \quad 12p = -9$$



$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$$

$$9x^2 + x - 5\sqrt{y} = 9y^2 - 5\sqrt{x} + y$$

$$m-n = -13p$$

$$m-n+9 = -p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy} \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[3]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[3]{x+y} \end{cases}$$

$$4(x^2-y^2)/(x^2+y^2) + (x-y) + 5(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$x+6 + 5-y + 25 - 2\sqrt{(x+6)(5-y)} + 10\sqrt{x+6} - 10\sqrt{5-y} = 60-2x-2y$$

$$3x+2y^2-y-26 = 0$$

$$x+y$$

$$4x-3y = +6$$

$$7x-7y = -14$$

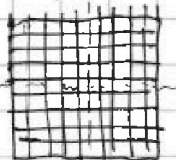
$$3x-4y = -8$$

$$x-y = 2$$

$$x+y = 2 \quad Bp^2/3g^2$$

$$4x^4 - 4y^4 + x - y + 5\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{y} = 0$$

$$-2+9 = -30$$



$$4x - 3y$$

$$32-24$$

$$A: m^2 - 2mn + n^2 + 8m - 9n = (m-n+3)^2$$

$$B: m^2n - mn^2 + 3mn$$

$$m+n \cdot \frac{3}{2}$$

$$mn(m-n+3)$$

$$16+8^4$$

$$x-6 \quad 25-10y+y^2$$

$$\cdot mn(m-n+3)$$

$$(m+n+3)^2 = m^2 + n^2 + 8m - 9n + 2mn + 18m + 18n = A -$$

$$(m+n+3)^2 = 8(m-n+3)$$

$$7x-7y = -2$$

$$+18m+18n = A -$$

$$(m-n+3)(m-n+3) = A$$

$$x-y = \frac{2}{7}$$

$$A + 8m + 9m - 9n$$

$$mn(m-n+3) = B$$

$$(m-n)^2 - 9(m-n)$$

$$x+y = 14$$

$$x = \frac{-12}{5}$$

$$\frac{96}{5} \quad \frac{170}{170}$$

$$(m-n)mn + 3mn$$

$$4x + 6x + 72 \leq 6$$

$$\frac{82}{5} \quad 14 - \frac{2}{7} + \frac{14 + \frac{2}{5}}{2}$$

$$-y = 2x+24$$

$$2x+y = -24$$

$$110x + 72 \leq 6 \quad 2x+y$$

$$(7x-3y) \leq 6$$

$$(5x+36) \leq 6$$

$$(3x-4y) \leq 6$$

$$(3x+8x+69) \leq 6$$

$$21 - \frac{3}{7}$$

$$2x+y = 24$$

$$\begin{cases} -8 \leq x \leq 8 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$11x + 96 \leq 6$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-xy}$$

$$(x-y)(x+y)/(x^2+y^2) = -5(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$5 + (5-y)^2 - 10y$$

$$(a^2-b^4)/(a^4+b^4)/(a^8+b^8) = -5(a-b)$$

$$5 + 5^2 - y^2$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)/(a^8+b^8) = -5(a-b)$$

m=1

A: m^2 - 2mn + n^2 + 8m - 9n = (m-n+3)^2

B: m^2n - mn^2 + 3mn

B^2/a^2

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{6}{9} + \frac{8}{3} = \frac{18+32}{9}$$

$$a_5 = -6x + 18$$

$$a_7 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_{11} = -3x^2$$

a_1, d

$$a_1 + 4d = 6x + 18$$

$$a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2$$

$$a_1 + 10d = -3x^2$$

$$a_1 + 4d = 6x + 18 = 6(x+3)$$

$$a_1 + 6d = (x^2 - 4x)^2 = x^2(x-4)^2$$

$$x^7 - 8x^3 + 16x^2$$

$$\frac{165}{12}$$

$$26d = x^2(x-4)^2 - 6(x+3) = x^2(x^2 - 8x + 16) - 6x - 18 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 6x - 18 \quad | :2$$

$$4d = -3x^2 - (x^4 - 8x^3 + 16x^2) = -x^4 + 8x^3 - 19x^2$$

$$2x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 12x - 36 = -x^4 + 8x^3 - 19x^2$$

$$3x^4 - 24x^3 + 51x^2 - 12x - 36 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 4x - 12$$

| | | | | | |
|----|----|----|----|-----|---|
| 1 | -8 | 17 | -4 | -12 | |
| -1 | 1 | -9 | 21 | -30 | |
| 2 | 1 | -6 | 5 | 6 | 0 |

$$(x-2)(x^3 - 6x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$(x-2)^2(x^2 - 4x - 3)$$

$$D/4 = 4 + 3$$

$$-6 \leq 4x - 3y \leq 6$$

$$\frac{65}{25} = \frac{13}{5}$$

| | | | |
|----|----|-----|---|
| 1 | -6 | 5 | 6 |
| -2 | 1 | -8 | |
| 3 | 1 | -3 | |
| -3 | 1 | -9 | |
| 6 | 1 | 0 | 5 |
| -6 | 1 | -12 | |

| | | | | |
|---|----|----|----|---|
| 1 | -6 | 5 | 6 | |
| 2 | 1 | -4 | -3 | 0 |

$$(x^2 - 4x + 4) / (x^2 - 4x - 3) \quad | 625 \quad 2 + \frac{4}{3}x$$

$$x^2 - 4x^3 - 3x^2 - 4x^3 + 16x^2 + 12x + 4x^2 - 16x - 12$$

$$13 + 11$$

$$26 - 33$$

$$13$$

$$1.4$$

$$18$$

$$36 - 15$$

$$18$$

$$14x - 3y \leq 6$$

$$13x - 4y \leq 8$$

$$18$$

$$36 - 15$$

$$18$$

$$14x - 3y \leq 6$$

$$13x - 4y \leq 8$$

$$18$$

$$36 - 15$$

$$18$$

$$y = \frac{-18 - 32}{12} = -\frac{50}{12}$$

$$-18 \leq 12x - 9y \leq 9$$

$$-32 \leq 12x - 16y \leq 32$$

$$-32 + 16y \leq 12x \leq 9y + 9$$

$$2y \leq 41$$

$$y \leq \frac{41}{2}$$

$$28 - 30$$

$$21 - 40$$

$$32 - 24$$

$$24 - 32$$

$$3x - 5y + 8x$$

$$(10x - 72) \leq 6$$

$$15.8 + y = 24$$

$$12x^2 + 12x^2 - 25x^2$$

$$12x^2 + 12y^2 - 16xy$$

$$14x - 3y \leq 6$$

$$13x - 4y \leq 8$$

$$10x = 79$$

$$x = 7.9$$

$$14x$$

$$2x + y = 24$$

$$x = 8 + 8$$

$$7 - 10$$

$$4x - 72 + 6x$$

$$y = 24 - 2x$$

$$-14 \leq x - 2y \leq 14$$

$$10 \leq x \leq 38$$

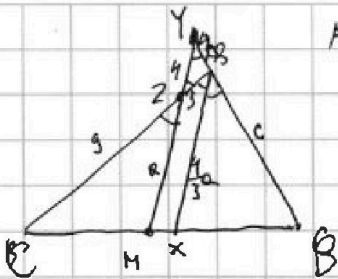
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC = 12
AZ = 3
YZ = 4

$\frac{a}{AX} = \frac{9Z}{AZ}$

$7x - 3y = -6$

$3x - 4y = -8$

$\frac{c}{OY} = \frac{\frac{4}{3}a}{4+a}$

$x - y = -2$

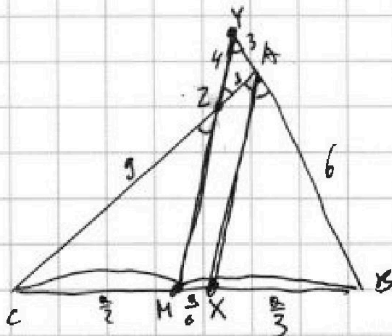
$7c + ac = \frac{4}{3}ac + 4a$ $x + y = 2$

$c(7 - \frac{4}{3}a) = 4a - \frac{1}{3}ac = 4a$ $x = 0$ $y = 2$

$c = \frac{12a}{12-a}$



AC : AB = CX : XB



BC = a

AB = C

$\frac{a}{3} = \frac{a/2}{4x}$

$\frac{CX}{XB} = \frac{12}{C}$

$3 = \frac{a}{24x}$

$\frac{a}{4} = \frac{a/2}{4x}$

$\frac{CM}{MB} = \frac{MX}{XB}$

CMX = a

MX = $\frac{a}{6}$

$\frac{a}{6} = \frac{a/2}{4x}$

$3a + 34x = 4a/2$

$34x = \frac{a}{2}$

$\frac{24}{168} = 2$

$\frac{6}{9} = \frac{a}{3}$

$7x - 3y = 6$

$\frac{12}{AX} = \frac{1}{12}$

$3x - 4y = 8$

$\frac{9}{12} + \frac{4}{AX} = \frac{9}{6}$

$168 = 14x + 7y$

$\frac{144}{9} = 16$

140

154

168

$x - y = 2$

$x =$

$12x - 5y = 18$

$12x - 12y = 32$

$-6 = 7x - 3y = 6$

$3y = -14$

$-8 = 3x - 4y = 8$

$-14 \leq x + y \leq 14$

$\frac{288}{9} = 32$

$\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$

$\cos^2 2\alpha$

$-8 = 7x - 7y = 14$

$-2 = x - y = 2$

$-3x$

$-8 \leq 4y - 3x \leq 8$

$\frac{3 \cdot 12}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{3 \cdot 12}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$\frac{36}{2a}$

$BC^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$

$180 - 144 \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

$180 - 144(2\cos^2 \alpha - 1)$

$324 - 288 \cdot \frac{7}{9}$

$x =$

$21x \geq -168$

$x = \frac{168}{21} = \frac{24}{3} = 8$

$-32 + 24$

$18 - 10$

-8

-8

-8