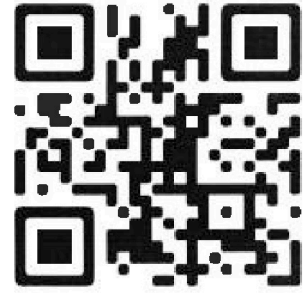




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^4$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
- [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$$D > 0 / D_1 > 0$$

$$x_1 x_2 > 0$$

$$D_1 = (2\sqrt{2}t)^2 - (9t^2 - 9) = 8t^2 - 9t^2 + 9 = 9 - t^2$$

$$9 - 28t^2 > 0 \Rightarrow 9 - t^2 > 0$$

$$9 - t^2 > 0$$

$$t^2 < 9$$

$$t^2 < 9$$

$$t < 3$$

$$t > -3$$

$$\begin{cases} t < 3 \\ t > -3 \end{cases}$$

т.ч.  $D_1 > 0$  по Т. Виета

$$x_1 x_2 = 9t^2 - 9$$

$$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow 9t^2 - 9 > 0$$

$$9t^2 > 9 \quad | :9$$

$$t^2 > 1$$

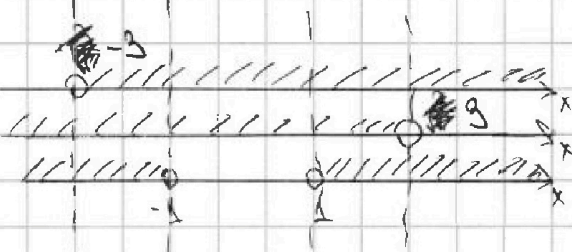
$$t > 1$$

$$t < -1$$

Учтем

$$\begin{cases} t > 3 \\ t < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 1 \\ t < -1 \end{cases}$$



~~$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$~~

~~$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$~~

~~$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$~~

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$   $a, b \in \mathbb{N}$

$$a - b = 12; a = b + 12 \quad (1)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4, \quad p - \text{простое}$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4 \quad (2)$$

Подставим (1) в (2)

$$(b+b+12)(b+b+12+3) = 19p^4$$

$$2(b+b)(2b+15) = 19p^4$$

левая часть делится на 2, правая часть тоже делится на 2  $\Rightarrow 19p^4 : 2 \mid \Rightarrow p^4 : 2$

$$\begin{array}{l} 19 \cdot 2 \\ (19 \cdot 2) = 1 \end{array} \mid \Rightarrow p^4 : 2$$

Если  $p \neq 2$ , то  $p^4 \neq 2$  (т.к.  $(p, 2) = 1$ , т.ч.  $2 \nmid p^4$ ), значит,  $p = 2$

$$p = 2 \mid \Rightarrow p = 2$$

$$2(b+b)(2b+15) = 19 \cdot 2^4 \quad | : 2$$

$$(b+b)(2b+15) = 19 \cdot 2^3$$

$$2b^2 + 12b + 15b + 15 \cdot 6 = 19 \cdot 8$$

$$2b^2 + 27b + 90 - 152 = 0$$

$$2b^2 + 27b - 62 = 0$$

$$D = 27^2 + 4 \cdot 2 \cdot 62 = 729 + 496 = 1225 = (5 \cdot 7)^2 = 35^2$$

$$b_1 = \frac{-27 - 35}{2 \cdot 2} < 0 \Rightarrow b_1 \notin \mathbb{N}$$

$$b_2 = \frac{-27 + 35}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$b = 2, \quad a = 2 + 12, \quad a = 14$$

Ответ: 14 и 2.

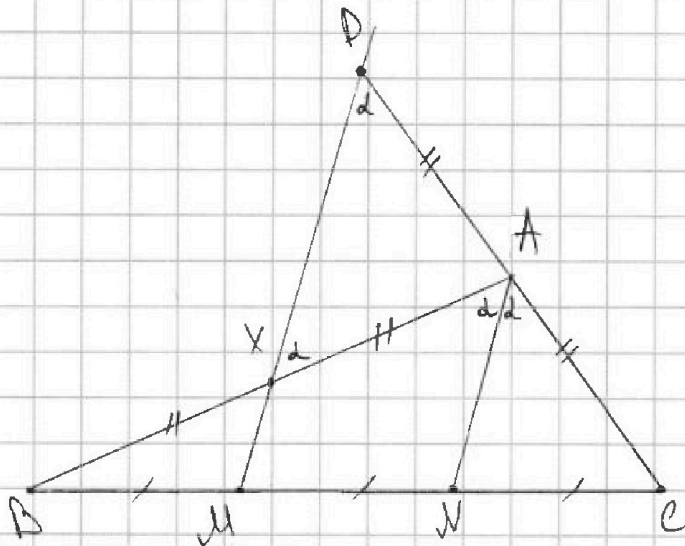


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:  
 $\triangle ABC$   
 $M, N \in BC$   
 $BM = MN = NC$   
 $MD \parallel AN$   
 $MD \cap AC = D$   
 $BC = 6$   
 $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$   
 $AB = CD$   
 $AB = ?$

1.  $\triangle CMD$ :

$AN \parallel MD$   
 $MN = NC$   $\Rightarrow AN$  - средняя линия  $\Rightarrow CA = AD$   
на отрезке

2.  $X = MD \cap AB$

$\triangle BDM$ :

$BM = MN$   
 $XM \parallel AN$   $\Rightarrow XM$  - средняя линия  $\Rightarrow BX = AX$   
на отрезке

3.  $BX = AX = \frac{1}{2}AB$  (по условию)

$CA = AD = \frac{1}{2}CD$  (по условию)  $\Rightarrow AC = AD = BX = AX$

$AB = CD$  (по усл.)

4. Пусть  $\angle CAN = \alpha$ , тогда  $\angle CDM = \alpha$ , т.к.  $AN \parallel MD$  (соот. углы при пересечении)

$\triangle XAD$  -  $\triangle D$ , т.к.  $AX = AD \Rightarrow \angle ADX = \alpha = \angle AXD$

$\angle AXD = \angle XAM = \alpha$  (как накрест или  $AN \parallel DM$ )

Итак,  $\angle BAC = 2\alpha = 2 \cdot \angle CAN \Rightarrow \cos(2\angle CAN) = \cos(\angle BAC)$

5. Пусть  $AC = AD = AX = BX = x$ , тогда

по  $\cos$  косинусов для  $\triangle ABC$ :

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle BAC)$ ,  $AB = AX + BX = 2x$

$6^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot (-\frac{3}{4})$

$36 = x^2 + 4x^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4} \cdot x^2$

$36 = 5x^2 + 3x^2$

$8x^2 = 36 \quad | :8$

Обозначим:  $x > 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 = \frac{36}{8}$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}; x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{3}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{D} \text{ задачи}$$

$$\text{Иском, } Ax = Bx = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ значит, } AB = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 3\sqrt{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что на 1,  $3 \cdot 4 = 12$  с учетом 11, значит равно  
 одна карта будет свободна. Сначала ~~выберем~~ с места 11  
 11. Выбирая на 11 в котором будет свободна карта можно 11  
 свободным 11. Выбирая место на котором будет стоять эта  
 карта в выбранном ряду можно 11 свободным. То  
 есть выбирая место для этой карты можно  $3 \cdot 4$  спосо-  
 бами. На ряду, в котором есть свободная карта, сидят  
 еще 2 человека. Заметим, что если ~~карта~~ свободная  
 карта стоит не посередине, то пассажиры могут сидеть одно-  
 значна, т.е. один сидит за другим, а это можно сделать  
 только тогда, когда ~~были~~ там же карта, стоит по  
 середине, то есть 2 способа посадить детей, значит,  
 посадить детей на ~~эту~~ ряд с учетом выбора ряда  
 можно  $4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot C_{11}^2 + 1 \cdot 2 \cdot C_{11}^2) = 4 \cdot (2 \cdot C_{11}^2 + 2 \cdot C_{11}^2) = 4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2$  спосо-  
 бами. Теперь осталось 2 человека можно посадить на  
 3 ряда. Выбирая один ряд и ~~три~~ трех детей  
 можно  $3 \cdot C_3^3$  способами. Заметим, что для людей 3  
 детей ~~такая~~ существует единственная посадка  
 в ряд по 3 человека, при которой все будут  
 лицом к.т.д. дети разных роста, т.е. если перед сидит  
 самый высокий, то ~~три~~ кто-то сидит, то он не ви-  
 дит других, значит, он сидит на 1 карте; если перед  
 сидит средний, то средний человек не ви-  
 дит, значит, средний сидит перед высоким, значит,  
 он сидит на 2 карте, а высокий на 3. Значит,  
 посадить трех из девяти человек на один ряд ~~можно~~  
 тем образом 3 ряда можно  $3 \cdot C_3^3$  способами. А каждый  
 из ~~трех~~ из шести человек на один ряд с учетом вы-  
 бора 1 ряда можно посадить  $2 \cdot C_6^3$  способами, а остав-  
 шимся 3 человека ~~посадить~~ однозначно  
 или детей можно посадить так, чтобы ~~были~~  
 были лицом  $4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot 3 \cdot C_3^3 \cdot 2 \cdot C_6^3 = 4 \cdot 4! \cdot C_{11}^2 \cdot C_3^3 \cdot C_6^3$   
 способами

Ответ:  $4 \cdot 4! \cdot C_{11}^2 \cdot C_3^3 \cdot C_6^3$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-x-y-1} = 2$$

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} = 2 - \sqrt{1-x-y-1} \quad |^+2$$

~~$$2x-2y-x^2-y^2 = 4+1-|x-y-1| = 4\sqrt{1-x-y-1}$$~~

~~$$4\sqrt{1-x-y-1} = 5 - |x-y-1|$$~~

$$\boxed{1} \quad x-y-1 \geq 0 \Rightarrow 1-x-y-1 \geq 0, \quad 1 \geq x-y-1$$

$$x-y \geq 1, \quad 2 \geq x-y$$

Т.к.  $x$  и  $y$  — целые,  $x-y$  — тоже целое, значит

$$\begin{cases} x-y=1 & (1) \\ x-y=2 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x-y \geq 1 \\ x-y \leq 2 \end{cases}$$

(1)  $x=y+1$

~~$$\sqrt{2(y+1)-2y-y^2-2y-1-y^2} + \sqrt{1-(y+1)-y-1} = 2$$~~

~~$$\sqrt{-2y^2-2y+1} + \sqrt{1-y-1-y-1} = 2$$~~

~~$$\sqrt{-2y^2-2y+1} + 1 = 2$$~~

~~$$\sqrt{-2y^2-2y+1} = 1$$~~

~~$$-2y^2-2y+1 = 1$$~~

~~$$2y+2y = 0$$~~

~~$$y+y = 0; \quad y(y+1) = 0$$~~

~~$$y = 0$$~~

~~$$y = -1$$~~

$y=0, \quad x=1$       (+)

$\sqrt{2-1} + \sqrt{1-1-1} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1 = 2$  — верно

$y=-1, \quad x=0$       (+)

$\sqrt{2-1} + \sqrt{1-1-1} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1 = 2$  — верно





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2)  $x = y + 2$

$$\sqrt{2y+4-2y-y^2-4y-4-y^2} + \sqrt{1-1y+2-y-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-4y} + \sqrt{1-1} = 2$$

$$\sqrt{-2y^2-4y} = 2 \quad | \wedge 2$$

$$-2y^2-4y = 4$$

$$-y^2-2y = 2$$

$$y^2+2y+2 = 0$$

$$D_1 = 1 - 2 < 0 \text{ - нет корней}$$

2)  $x - y - 1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x - y < 1 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y < 1 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$

Т.к.  $x - y$  - целое, ~~то~~ системы следует, что

$$x - y = 0; \quad x = y$$

$$\sqrt{2x-2x-x^2-x^2} + \sqrt{1-10-1} = 2$$

$$\sqrt{-2x^2} + \sqrt{1-1} = 2$$

$$\sqrt{-2x^2} = 2 \quad | \wedge 2$$

$$-2x^2 = 4$$

$$x^2 = -2 \text{ - нет решений}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, если  $x - y - 1 \geq 0$ , то  $y = 0, x = 1$  — решение;  
если  $x - y - 1 < 0$ , то  $x = 0, y = -1$  — решение;  
Ответ:  $(0, -1), (1, 0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$2(y+z) - 2y = (y+z)^2 - y^2 =$   
 $= 2y + 4 - 2y = 4$   
 $= 2y^2 - 4y$

$28 < 90, 2 < 45$   
 $21 < 180$   
 $2 + 10 < 90$

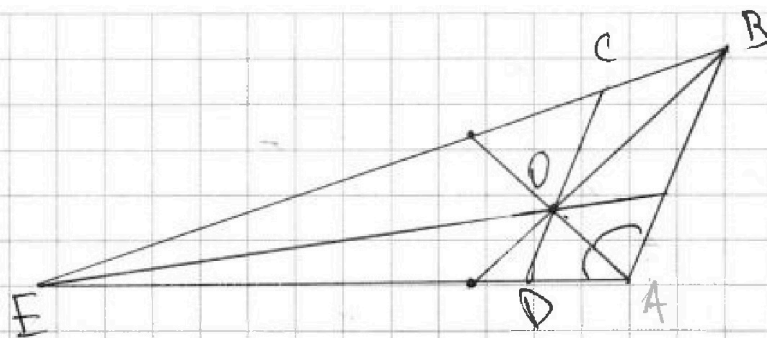


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Т.к. ABCD - вписанный ~~в треугольник ABE~~

~~то AB и CD пересекаются в O.~~  
AB и CD пересекаются в O.  $\angle AEB$

~~$\angle ECD = \angle EAB$~~   
 ~~$\angle EDC = \angle EBA$~~

~~то  $\angle EOD = \angle EOA$ ,  $\angle EOB = \angle EOC$ ,  $\angle DOE = \angle COE$~~

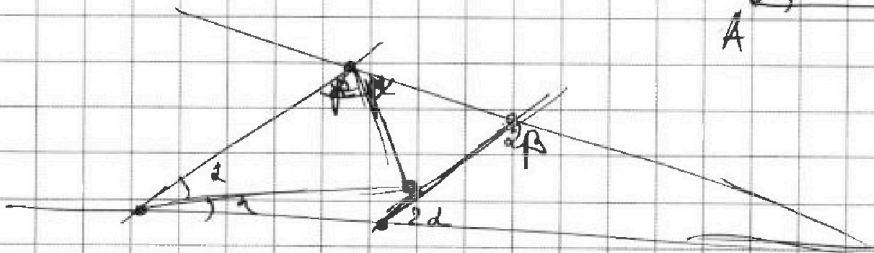
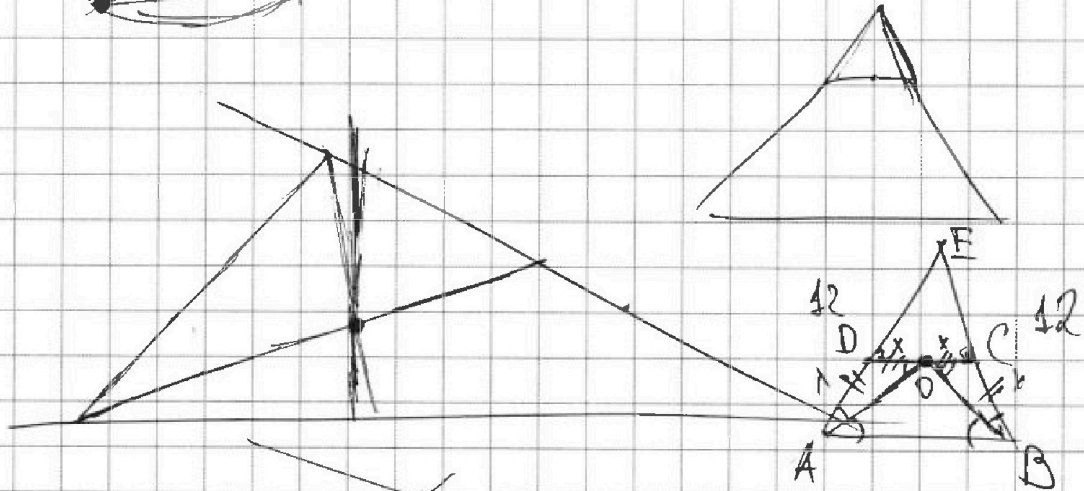
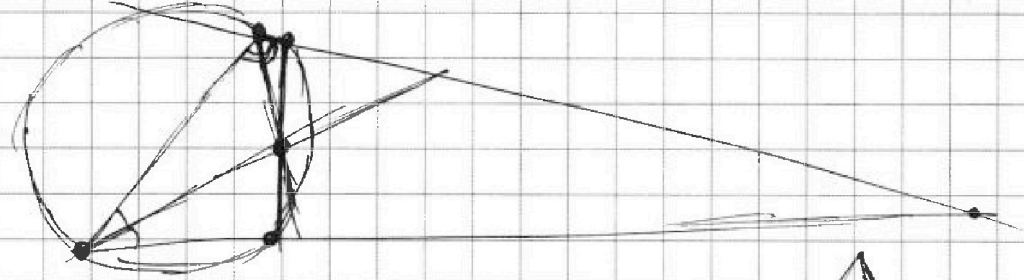
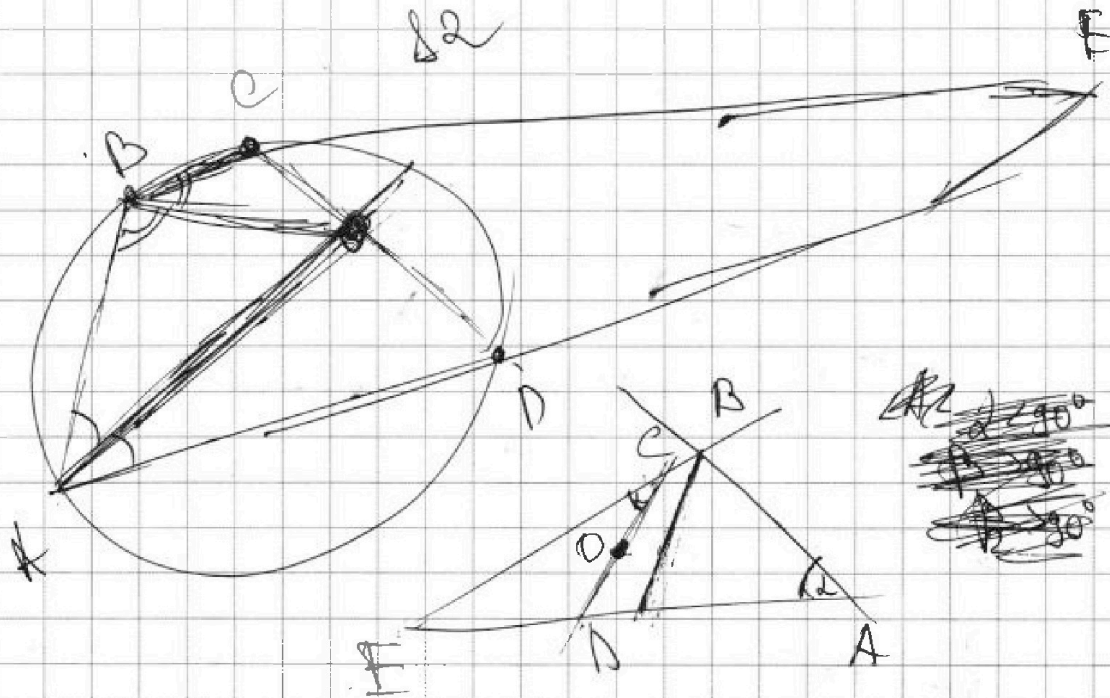


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



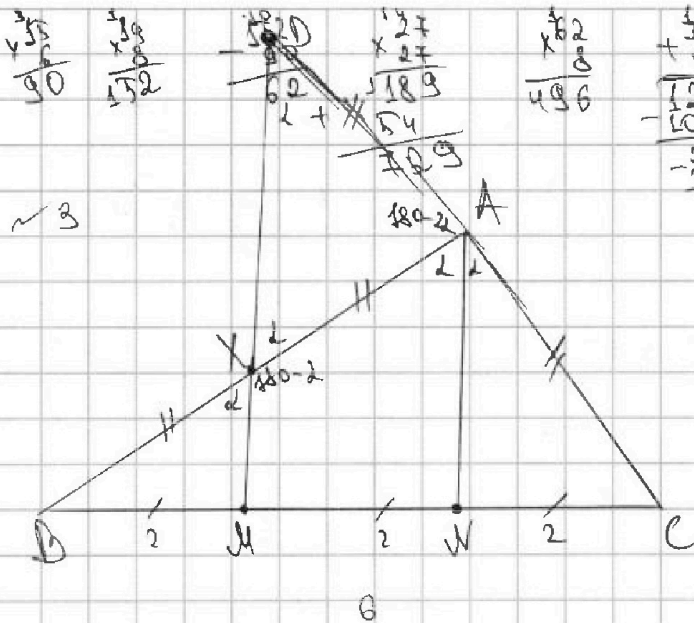


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

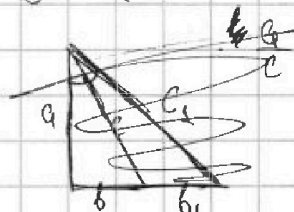
СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CD$$

$$\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 1$$

$$-\frac{3}{4} = \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 - 2 \cdot \cos^2 30^\circ = 1 - \frac{2 \cdot 3}{4}$$

$$= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

и 4 пути к вершине по 3 пути 1 чел

- 1 путь
- путь через две вершины
- путь через одну вершину и ребро

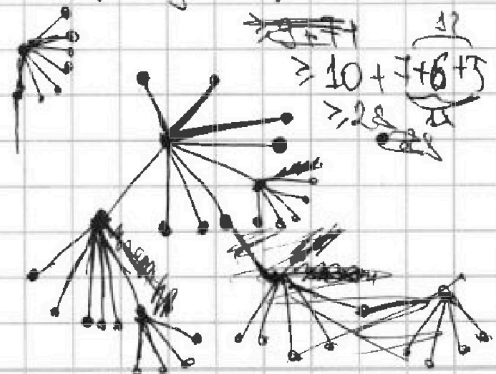
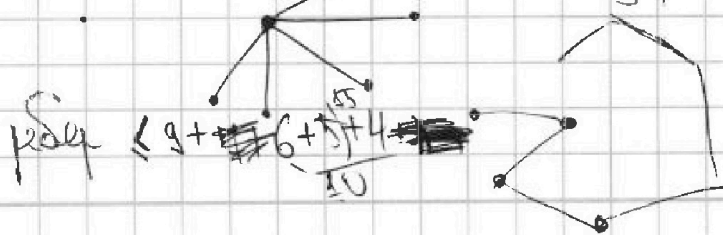


$$4 \cdot C_{11}^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot C_9^3 \cdot 2 \cdot C_6^3 =$$

$$= 4! \cdot 3 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$$

и 6

с) дерево



$$\text{ребр} \leq 9 + 6 + 5 + 4 = 24$$

$$\geq 10 + 7 + 6 + 5$$

$$\geq 28$$

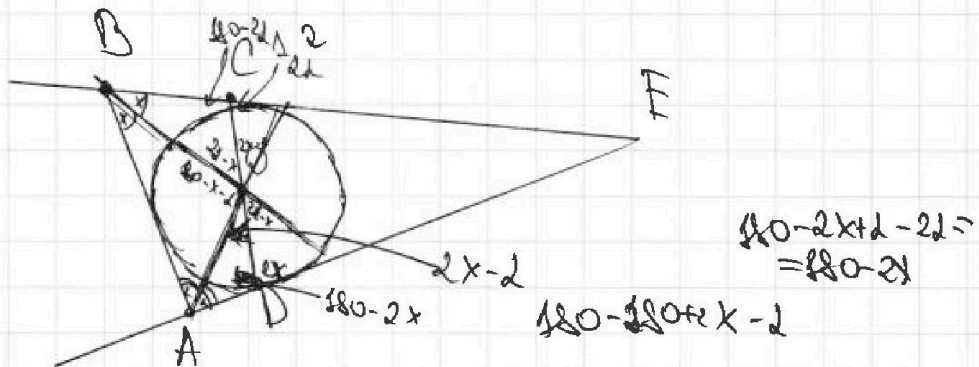
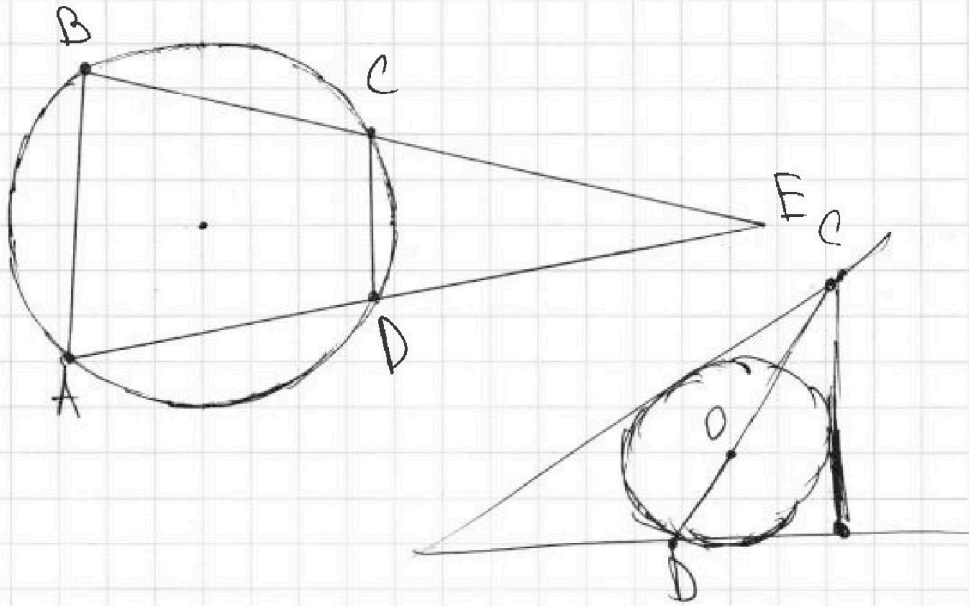


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$EC \cdot 12 = ED \cdot AF$$
$$12 = \frac{DE \cdot AF}{CE}$$

