



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения  $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$  равно  $17p^5$ , где  $p$  - некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 12$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 10$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$t > 7$ .

$x^2 + 2 \cdot \sqrt{t}x + (4t^2 - 4) = 0$ .  $\sqrt{t}$  — это 2 корня,  
 $4t^2 - 4 > 0$ , т.е.  
 $D > 0$ ; корни  $\sqrt{t}$  и  $-\sqrt{t}$ , по т. Виета  $4t^2 - 4$ , т.е.

$t > 7$ .

$$D = 12t^2 - 16t^2 + 16t^2 = 4t^2.$$

$$\text{Ответ: } t \in \left(-\frac{2}{\sqrt{4}}, -7\right) \cup \left(7, \frac{2}{\sqrt{4}}\right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$(a^2 - 2ab + b^2) + 75a - 75b = (a-b)^2 + 75(a-b) = (a-b)(a-b+75).$$

Поскольку  $a-b < 38$ ,  $(a-b)(a-b+75) < 38 \cdot 53 < 57 \cdot 87 = 77 \cdot 3^5$ . Значит  $p=2$ , а  $17p^5 = 17 \cdot 2^5$ . Поскольку

$a+b$  чётно, то и  $(a-b)$  чётно, а  $(a-b+75)$  — нечётно.

$|a-b+75| =$  либо 7, либо 17, но в первом случае

$$|a-b| = 17 \cdot 2^5, \text{ что } > 38.$$

Значит,  $|a-b| = 32$ ,  $|a-b+75| = 17$ . Если

$a-b > 0$ , то  $|a-b+75| > |a-b|$ . Значит  $a-b = -32$ .

Поскольку  $a+b=40$ , то  $a=4$ ,  $b=36$ . Ответ:  $a=4$ ;  $b=36$ .



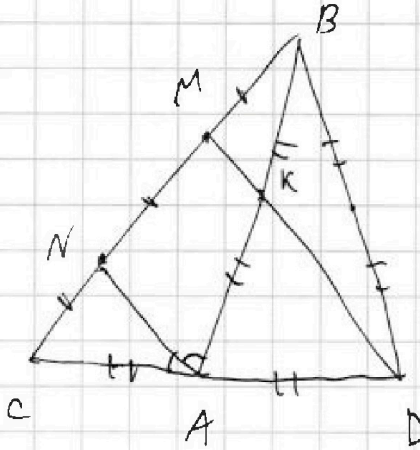
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.



Пусть  $(MD \cap AB) = K$ .

Тогда  $BK = AK$ , т.к.  $MK$  - средняя линия  $\triangle ABN$ . Аналогично,

$AC = AD$ , т.к.  $AN$  - ср. линия

в  $\triangle MCD$ . Поскольку  $AB = CD$ ,

то и  $AC = AD = KA = KB$ .

Поскольку  $\frac{AC}{AB} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2}$ , то  $AN$  - биссектриса  $\angle CAB$ . По условию,  $\cos \angle CAB = -\frac{1}{4}$ . Значит  $\angle CAB$  тупой, и  $\cos \angle BAD = \frac{1}{4}$ . То есть высота

из точки  $B$  на  $AD$  падает в середину  $AD$ .

Значит  $AB = BD$ . Теперь,  $4AB^2 = 2BC^2 + 2BD^2 - CD^2$

(формула медианы). Пусть  $AC = x$ . Тогда  $16x^2 = 288 +$   
 $+ 8x^2 - 4x^2$ ,  $12x^2 = 288$ ,  $x^2 = 24$ ,  $x = 2\sqrt{6}$ , а  $AB = 2x =$   
 $= 4\sqrt{6}$ . Ответ:  $4\sqrt{6}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$C_8^2 \cdot 6 C_6^3 \cdot 3.$$

Суммарно у трёх вариантов:

$$\cancel{BA} \cancel{BBA} \cancel{BBB} \quad 3C_8^2 \cdot C_6^3 + 3C_8^3 \cdot 8 \cdot 7 + 3C_8^3 \cdot C_6^3 = 3C_8^3 (8 \cdot 7 + 2C_6^3)$$

$$= 3C_8^3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot C_6^3 = C_8^3 \cdot C_6^3 \quad \text{ответ: } C_6^3 \cdot C_8^3$$



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Рассмотрим 3 случая: свободное место в первой, второй и третьей "строчке" соответственно. Строка - это ряд в матрице из карт, перпендикулярная рядам.

I.  $\overline{mmmm} \leftarrow \text{деска}$

1	x	.	.
2	.	.	.
3	.	.	.
	1	2	3

Выберем 2 карты на первый ряд. Это  $C_8^2$  - так единственного

варианта есть - по рассту. Выберем из оставшихся шести троек на 2 ряд -  $C_6^3$ . Опять же единственный вариант - по рассту. Вставим 3 по рассту на 3 ряд. Всего  $C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot 3$ , т.к.

свободное место может быть в <sup>0-ой</sup> строке.

II.  $\overline{mm}$

7	.	.	.
2	x	.	.
3	.	.	.
	7	2	3

Эт заняты 1 место 1 ряда -  $C_8^1$  вар., третье место 1 ряда - 7. Оставшиеся -  $C_6^3$ , как в прошлом варианте.

Всего  $8 \cdot 7 \cdot C_6^3 \cdot 3$

III. Вариант аналогичен первому. Всего:

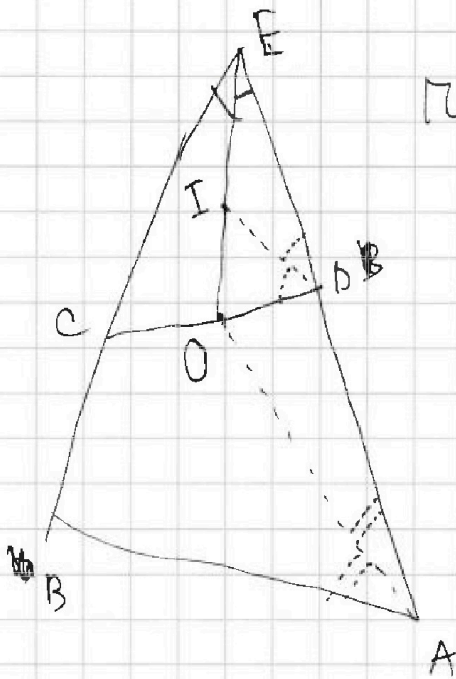


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5.

Пусть  $I$  - центр впис. окр.

$$\triangle DCE. \text{ Тогда } \frac{EI}{EO} = \frac{DE}{BE}, \text{ так как}$$

т.к.  $\triangle DEC \sim \triangle BEA$ .

$$\text{В силу подобия, } \frac{EI}{EO} = \frac{DE}{DE+DO}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{EI}{IO} = \frac{DE}{DO}. \text{ Тогда если } \frac{DE}{DE+DO} = \frac{DE}{BE} \Rightarrow$$

$$DO+OE = BE = IO. \text{ Ответ: } IO.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



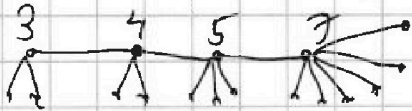
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Если представить остров в виде графа, где деревья - вершины, даром - рёбра, то получится дерево (из условия) на  $x+4$  вершинах, где  $x$  - кол-во деревьев с одной дочерью. Поскольку в дереве вершин на одну больше, чем рёбер, то  $\frac{x+4}{2} = x+3$ ,  $x=2$ . Пример, очевидно, существует:



Ответ: 17.





1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Поскольку  $x, y \in \mathbb{Z}$ , то и выражения  $xy$  и  $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ . Поскольку корни корень из целого числа  $\neq 0$ , есть 2 варианта: когда корни равны  $(1 \text{ и } 0)$  и  $(0 \text{ и } 1)$  соответственно. Пусть а если  $\sqrt{t} = 1$ , то  $t = 1$ ; если  $\sqrt{t} = 0$ , то  $t = 0$ .  
Значит сами подкоренные выражения равны  $1$  и  $0$ .

$$\text{I. } \begin{cases} x^2 + 2y - x^2 - y^2 = 7 \quad (2) \\ 1 - (x + y - 2) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow |x + y - 2| = 7 \Rightarrow x + y = 3 \quad (a) \text{ или } x + y = 7 \quad (b)$$

$$(a): x(2-x) + y(2-y) = 7, \quad x + y = 3$$

$$x(2-x) + (3-x)(x-1) = 7 = 2x - x^2 + 3x - 3 - x^2 + x = 7$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 = (x-1)(x-2) \Rightarrow x = 1, 2.$$

$$(x, y): (1, 2), (2, 1)$$

$$(b): x(2-x) + y(2-y) = 7, \quad x + y = 7$$

$$x(2-x) + (7-x)(x+1) = 7 = 2x - x^2 + x + 7 - x^2 - x$$

$$x^2 - 2x = 0 = x(x-2) \Rightarrow x = 0, 2.$$

$$(x, y): (0, 7), (2, 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad 2x+2y-x^2-y^2=0(1), \quad 7-(x+y-2)=7(2)$$

$$(2) \Rightarrow (x+y-2)=0 \Rightarrow x+y=2.$$

$$\cancel{2x+2y} \quad x(2-x)+y(2-y)=x(2-x)+(2-x)x=2x(2-x)=0$$

$$x=0; 2.$$

$$(x; y): (0; 2), (2; 0)$$

$$\text{Ответ: } (x; y): (2; 0), (0; 2), (2; 7), (7; 2), (0; 7), (7; 0)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(x-2)(x+2)} + \sqrt{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4 - x^2}$$

$$(x-2)(x+2) = (4-x^2)$$

$$12x^2$$

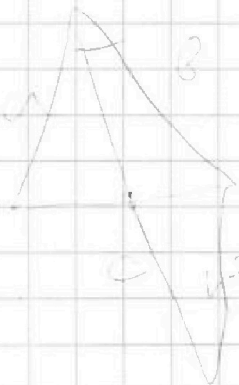
$$|x-4|=0$$

$$x(x-2) + 3x/(x-2) = 7$$

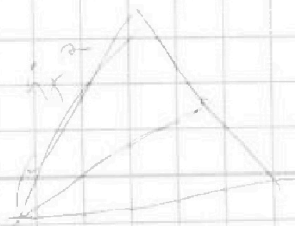
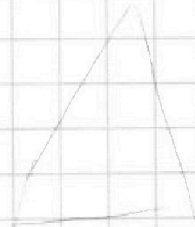
$$x(x-2) + 3x/(x-2) = 7$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$



72



72

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

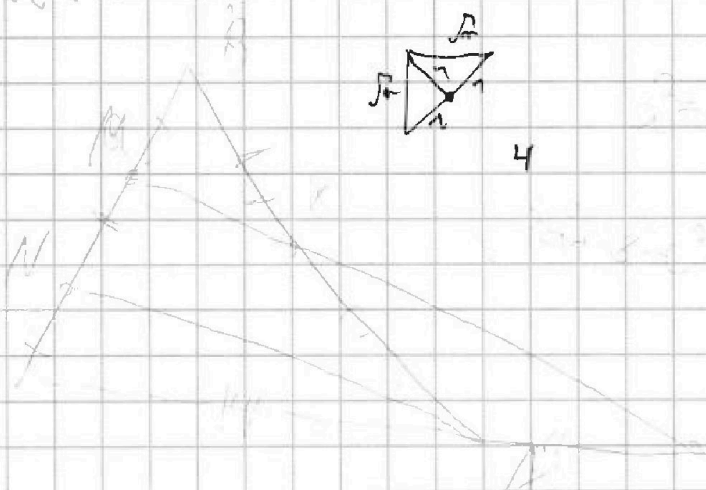
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

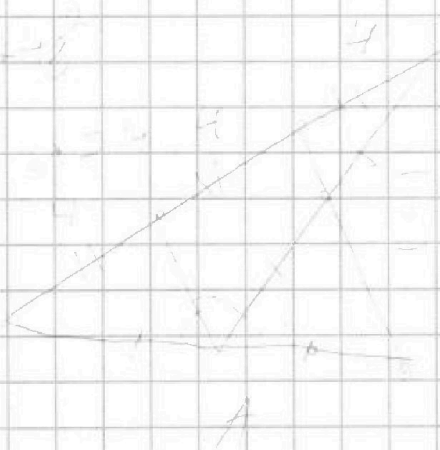
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



a  $\Delta A B C$   $\Delta B C$



4



$$AB = BC + AC$$

$$AB = BC + AC$$

$$AB = BC$$

