



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Обозначим за  $a_1$  - первой член прогрессии, за  $d$  - разность прогрессии. Из условия:  $a_3 = 3x+3$ ;  $a_5 = (x^2+2x)^2$ ;  
 $a_9 = 3x^2$ .

Применив формулу  $n$ -ного члена арифметической прогрессии ( $a_n = a_1 + (n-1)d$ ) получим:

$$a_3 = a_1 + 2d \quad a_5 = a_1 + 4d \quad a_9 = a_1 + 8d$$

Известно можно видеть, что  $3a_1 + 12d = 2a_3 + a_9 = 3a_5$ .

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a_3 + a_9 = 3a_5 \\ a_3 = 3x+3 \\ a_5 = (x^2+2x)^2 \\ a_9 = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3x+3) + 3x^2 = 3(x^2+2x)^2 \Leftrightarrow \\ 2(x+1) + x^2 + (x^2+2x)^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x)^2 \quad \text{Замена } t = x^2 + 2x$$

$$t + 2 = t^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases} \quad \text{Вернемся к замене}$$

1)  $t = -1$

$$x^2 + 2x = -1$$

$$\uparrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\uparrow$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$\uparrow$$

$$x = -1$$

2)  $t = 2$

$$x^2 + 2x = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$D = 2^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$= 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим все 3 полученных корня:

1)  $x = -1$

$$a_3 = -3 + 3 = 0 \quad a_5 = ((-1)^2 - 2)^2 = 1 \quad a_9 = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

Легко видеть, что удовлетв. пошег.  $\begin{cases} a_1 = -1 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$

2)  $x = -1 - \sqrt{3}$

$$a_3 = 3x + 3 = -3 - 3\sqrt{3} + 3 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = ((-1-\sqrt{3})^2 - 2(-1-\sqrt{3}))^2 = (4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3})^2 = 2^2 = 4$$

$$a_9 = 3(1+\sqrt{3})^2 = 3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$a_5 - a_3 = 4 - (-3\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 + 6\sqrt{3} - 4 = 8 + 6\sqrt{3} = 2(4 + 3\sqrt{3})$$

Легко видеть, что удовлетв. пошег.  $d = \frac{1}{2}(4 + 3\sqrt{3})$

$$a_1 = -4 - 6\sqrt{3}$$

3)  $x = -1 + \sqrt{3}$

$$a_3 = 3x + 3 = -3 + 3\sqrt{3} + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = ((\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}-1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2)^2 =$$

$$= (6 - 4\sqrt{3})^2 = 36 - 48\sqrt{3} + 48 = 84 - 48\sqrt{3}$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$a_5 - a_3 = 84 - 48\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 84 - 51\sqrt{3}$$

$$a_9 - a_5 = 12 - 6\sqrt{3} - (84 - 48\sqrt{3}) = 12 - 84 + (48 - 6)\sqrt{3} =$$

$$= -72 + 42\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы данные 3 члена составили прогрессию  
предельно, то есть вычитаемые:  $2(a_5 - a_3) = a_9 - a_5$   
Подставив числа получим:

$$2(84 - 51\sqrt{3}) = 42\sqrt{3} - 72 \Leftrightarrow 168 - 102\sqrt{3} = 42\sqrt{3} - 72 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 240 = 144\sqrt{3}$  — легко видеть, что равенство  
не выполняется, следовательно,  $x = -1 + \sqrt{3}$  не подходит

3)  $x = \sqrt{3} - 1$

$$a_3 = 3x + 3 = 3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = ((\sqrt{3} - 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1))^2 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2)^2 =$$
$$= 4$$

$$a_9 = 3x^2 = 3(\sqrt{3} - 1)^2 = 3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

Легко видеть, что уровн. прогр.  $d = \frac{1}{2}(4 - 3\sqrt{3})$

$$a_1 = 6\sqrt{3} - 4$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

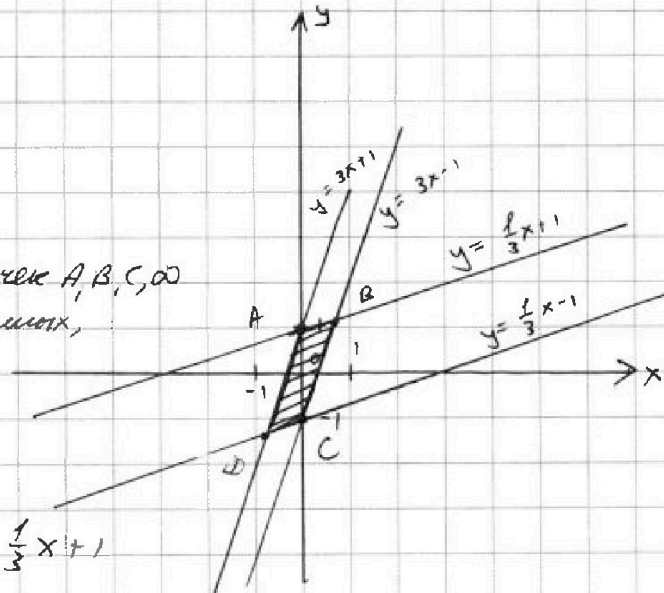
№ 2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x-3 \\ 3y \leq x+3 \\ y \geq 3x-1 \\ y \leq 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

Изобразим все решения системы на графике.

Найдем координаты точек A, B, C, D (точки пересечения в 4 прямых, попарно)



A (0; 1) — точка

$$B: \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\frac{6}{3}x = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \quad y = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{4}$$

Имеем: B  $(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$

C (0; -1)

$$D: \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Имеем: D  $(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x; y) = 4y + 8x$$

Заметим, что  $f(x; y)$  монотонно возр. при увеличении  $x$  ( $y$ -фикс.) и мон. возр. при увеличении  $y$  ( $x$ -фикс.).

Отсюда легко видеть, что если среди решений нашей системы есть точка  $A(x_0; y_0)$  такая, что нет никакой другой точки с большей ординатой  $y$  и нет никакой другой точки с большей абсциссой  $x$ , то  $f(x_0; y_0)$  — максим. значение  $f(x; y)$ .

А вот легко видеть, что на нашем графике такой точкой является  $B(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ .

$$f(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}) = \frac{5}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 5 + 6 = 11$$

Ответ: 11



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

I)  $\begin{cases} A = 13p^2 \\ B = 75q^2 \end{cases}$  Имеем  $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$   
~~7 к. в обеих частях целое множитель~~

Д.и. в обеих частях помножит множители  
 $(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m+n > 0$  и решаем по в мат. чинах  
 $m+n > 0$   
 $13p^2 > 0 \Rightarrow m+n-9 > 0$ ), то будем иметь шесть  
 только следующие случаи.  
 (в таблице).

	$m+n$	$m+n-9$
1	13	$p^2$
2	$13p$	$p$
3	$13p^2$	1
4	$p$	$13p$
5	$p^2$	13
6	1	$13p^2$

Рассмотрим все случаи  
 (здесь покажем, что  $p$  -  
 простое  $\Rightarrow 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$   
 содержит в разложении  
 всего 3 множителя)

6)  $mn = 1$  - н.в., г.к.  $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow mn \geq 2$

1)  $\begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 13-9 \Leftrightarrow p^2 = 4 \Leftrightarrow p = 2$   
 $p \in \mathbb{P}$

Имеем:  $\begin{cases} m+n = 13 \\ mn(m+n-3) = 75q^2 \end{cases} \Rightarrow 10mn = 75q^2$

К.к.  $45/2 \Rightarrow q^2 : 2$ , а г.к.  $q \in \mathbb{P}$ , то  $q = 2$  (ед. четное  
 простое число). Подставим  $10mn = 75 \cdot 2^2 \Leftrightarrow mn = 30$

$\begin{cases} m+n = 13 \\ mn = 30 \end{cases} \Leftrightarrow m(13-m) = 30$  - г.к. квадратное, то не  
 более 2-х решений. Подходят  $m=3; m=10$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m = 3 :$$

$$n = 10 = 13 - m = 13 - 3 = 10$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot (13-9) = 13 \cdot 4 = 13 \cdot 2^2 - \text{не подходит}$$

$$mn(m+n-3) = 10 \cdot 3 \cdot 10 = 30 = 75 \cdot 2^2$$

$$m = 10 :$$

$$n = 13 - m = 13 - 10 = 3$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 2^2$$

$$mn(m+n-3) = 75 \cdot 2^2 - \text{не подходит}$$

$$2) \begin{cases} m+n = 13p \\ m+n-9=p \end{cases} \Rightarrow 9 = 12p \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} - \text{не подходит}$$

$$3) \begin{cases} m+n = 13p^2 \\ m+n-9=1 \end{cases} \Rightarrow 13p^2 = 10 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} - \text{не подходит}$$

$$4) \begin{cases} m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} \begin{cases} m+n > m+n-9 \\ p < 13p \quad (p > 1) \\ m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} - \text{против.$$

$$5) \begin{cases} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n = 22 \\ m+n = p^2 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 22 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} - \text{не подходит}$$

$$\text{II)} \begin{cases} A = 75a^2 \\ B = 13p^2 \end{cases} \text{ Имеем: } mn(m+n-3) = 13p^2$$

Итак не  $m, n, 13p^2 > 0 \Rightarrow m+n-3 > 0$ .  
решаем в целых натур. числах. Т.к.  
 $13p^2 = 13 \cdot p \cdot p$  (какое-то раз на 13 делится), то  
предполагает описать как-то варианты  
(они перечислены в таблице)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	$m$	$n$	$m+n-3$	
1	1	1	$13p^2$	1) $m+n=2 \Rightarrow m+n-3 < 0$ - не годит.
2	1	$13p^2$	1	
3	$13p^2$	1	1	2) $m=1$ $m+n-3 = n-2 = 1$ $n=3$ $3 = 13p^2$ - не годит.
4	13	$p^2$	1	
5	13	1	$p^2$	3) аналогично с 2)
6	$p^2$	1	13	
7	$p$	$13p$	1	4) $m=13$ $m+n-3 = 10+n = 1$ $n = -9$ - не годит.
8	$13p$	$p$	1	
9	$13p$	1	$p$	5) <del><math>m+n-3 = n+13-3 = n+10</math></del> $m+n-3 = 14-3 = 11$ $p^2 = 11 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ - не подходит
10	$p$	1	$13p$	
11	1	$p$	$13p$	6) $m+n-3 = m-2 = 13$ $m=15$ $p^2 = 15 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ - не подходит
12	1	$13p$	$p$	
13	$p^2$	13	1	7) $m+n-3 = 1 \Rightarrow m+n=4$ $m+n = p+13p = 14p$ $14p = 4 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ - не подходит.
14	1	$p^2$	13	
15	1	13	$p^2$	
16	$p$	13	$p$	
17	$p$	$p$	13	
18	13	$p$	$p$	



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

8) Аналогично с 7)

9)  $m+n-3=p$   
 $\Rightarrow m-2=p$   
 $13p-2=p$   
 $12p=2 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$

- не подходит

10)  $m+n-3=m-2$

$p-2=13p$

$-12p=2 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$  - не подходит

11) Аналогично с 10)

12)  $m+n-3=n-2=p$

$13p-2=p \Rightarrow 12p=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$  - не подходит

13) Аналогично с 9)

14) Аналогично с 6)

15) Аналогично с 5)

16)  $m+n-3=m \Rightarrow n=3$

$\Rightarrow n=13$  - не подходит

17)  $2p-3=13 \Rightarrow 2p=16 \Rightarrow p \notin \mathbb{P}$  - не подходит

18) Аналогично с 16)

Во II случае ни один вариант не подходит

В I случае подходят только варианты (3; 10) и (10; 3)

Ответ: (3; 10) и (10; 3)

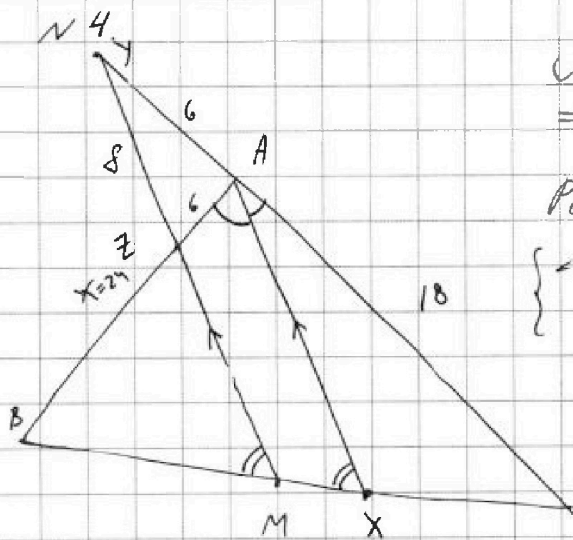


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По условию  $MZ \parallel AX \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle BMZ = \angle BXA$  (сооб.; BC - секущая)

Рассмотрим  $\triangle BZM$  и  $\triangle BXA$ :

$$\begin{cases} \angle ZBM \equiv \angle ABX \Rightarrow \triangle BZM \sim \triangle BXA \\ \angle BMZ = \angle BXA \end{cases} \text{ по двум углам}$$

$BZ$  и  $BA$  - сооб. (лежат у угла равных углов)

$BM$  и  $BX$  - сооб. по той же причине.

Тогда имеем место:  $\frac{BZ}{BA} = \frac{BM}{BX}$

Обозначим длину отрезка  $BZ$  за  $x$ .

По св-ву биссектрисы:  $\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{BX}{XC} = \frac{x+6}{18} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} BX = (x+6)k \\ XC = 18k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BX}{BC} = \frac{(x+6)k}{(x+6)k + 18k} = \frac{x+6}{x+24} \\ \frac{CX}{BC} = \frac{18k}{(x+24)k} = \frac{18}{x+24} \end{cases}$$

Т.к.  $M$  - середина  $BC$ , то  $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{BM}{BX} = \frac{\frac{BM}{BC}}{\frac{BX}{BC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x+6}{x+24}} = \frac{x+24}{2x+12}$$

Ранее получили, что  $\frac{BZ}{BA} = \frac{BM}{BX} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BZ}{BA} = \frac{x+24}{2x+12}$$

$$\begin{aligned} BZ &= x \\ BA &= BZ + ZA = x+6 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \angle YAZ \equiv \angle YAB \\ \angle YAB + \angle BAC = 180^\circ - \text{смежные} \Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - \angle YAB \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(\angle BAC) = -\cos(\angle YAB) = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Применим теорему косинусов в  $\triangle ABC$ :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\angle BAC)$$

$$\overline{BC}^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) =$$

$$= 30^2 + 18^2 + 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \frac{1}{9} = 30^2 + 18^2 + 4 \cdot 30 =$$

$$= 4(15^2 + 9^2 + 30) = 4(225 + 81 + 30) = 4(336) =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 84 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 21$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4^3 \cdot 21} = \sqrt{2^6 \cdot 21} = 8\sqrt{21}$$

Ответ:  $8\sqrt{21}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5.

Рассмотрим вторую строку системы.

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^7 - \sqrt{x} + 5y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^7 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Во-первых, из второй строки следует сдЗ.  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$   
(в первой строке будут еще ограничения, но на пока рассматриваем только вторую строку)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} \quad \text{Покажем, что она монотонно}$$

$$\begin{aligned} \text{I способ)}: & \left. \begin{array}{l} x^4 - \text{мон. возр. при } x \geq 0 \\ 5x^2 - \text{мон. возр. при } x \geq 0 \\ \sqrt{x} - \text{мон. возр. при } x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  их сумма также мон. возр. при  $x \geq 0$

$$\text{II способ)} \quad f'(x) = 4x^3 + 10x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Достаточно показать, что  $x \geq 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

$$\begin{aligned} x > 0 & \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow 4x^3 > 0 \\ x > 0 & \Rightarrow 10x > 0 \\ x > 0 & \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow \text{их сумма также } > 0.$$

Видно рассмотрим точку  $x=0$ . В ней функ. не определена, но легко видеть, что  $f(0)=0$ , а 0 не достигн. поэтому мы найдем функцию  $x > 0$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получается, что вторая строчка представляет из себя уравнение следующего вида:

$$\begin{cases} f(x) = f(y), \text{ где } f(x) - \text{ мон. возрастает на } x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Нужно видеть, что это возможно решимым будем  $x=y$ . Пусть это не так. Не нарушая общности  $x > y$ .  $x = y + \varepsilon$ . Имеем:  $f(x + \varepsilon) = f(y)$   
( $x, y, \varepsilon > 0$ )

т.е.  $y < y + \varepsilon$ , то и  $f(y) < f(y + \varepsilon)$   
в силу монотон. возрастания  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  равенства быть не могут.

Получим, что исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & \text{из второй строчки} \\ x = y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + 5 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x = y \\ x \geq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем максим.  $OD3$  первой строки:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 6+5x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ (6-x)(x+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 6]$$

Ищем:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \\ x=y \\ x \in [0; 6] \end{cases}$$

Заметим, что  $(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 =$

$$= x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

Заменим  $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$

$$t^2 = 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7 - 2\sqrt{6+5x-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7 - t^2$$

Первая строка с  $t$ :  $t + 5 = 7 - t^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Вернемся к замене:

$$1) \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 6-x \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5 \\ x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \geq 2,5 \\ 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ \sqrt{(x+1)(6-x)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ (x+1)(6-x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ 6x + 6 - x^2 - x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ -x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,5 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(р.ч. \sqrt{13} > 0)$$

$$2) \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 6-x \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x})^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 5 \\ x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 3 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 2,25 = (x+1)(6-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 2,25 = 6x + 6 - x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x^2 - 5x - 3,75 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x - 3,75 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 3,75 = 25 + 15 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$(р.ч. 2\sqrt{10} > 0)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~В ответ~~ В ответе запишите оба корня уравнения.

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Вернемся к основному уравнению.

$$\begin{cases} x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \\ x \in [0; 6] \\ x = y \end{cases}$$

$$1) \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} \geq 0 \Rightarrow 5 - 2\sqrt{10} \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 2\sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 \geq 40 - \text{неверно} \Rightarrow x = \frac{5 - 2\sqrt{10}}{2} - \text{не подходит}$$

$$2) \frac{5 + \sqrt{13}}{2} > 0 - \text{очевидно}$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} \leq 6 \Rightarrow 5 + \sqrt{13} \leq 12 \Rightarrow \sqrt{13} \leq 7 -$$

— подходит.

В итоге подходит только корень  $\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)$

Ответ:  $\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right)$

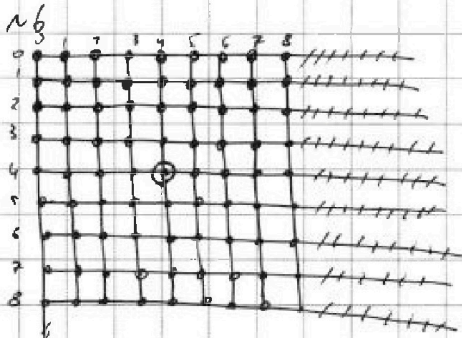


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пронумеруем горизонтальные и вертикальные линии линиями от 0 до 8, начиная с левого верхнего угла, как показано на рисунке.

Будем называть узел, находящийся на пересечении 4-й вертикальной и 4-й горизонтальной линий центральным. (он обведен в кружок на рисунке)

Заметим, что если мы покрасим 2 узла (дальше узла, и они оказались центральными относительно центрального узла, то это раскраска соев. сис. 1, раскраска, получающаяся поворотом на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  градусов, если те точки не оказались центральными относительно центрального узла, то это раскраска соев. сис. 3, получающаяся поворотом на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  градусов.

Получно, что я имею в виду видо под центр. симметричными точками.

$A(x_A; y_A)$   $B(x_B; y_B)$  ← координата  $x$  - номер соев. вертик. координата  $y$  - номер соев. horiz.

$A$  и  $B$  - центр. сим. относительно центр. узла  $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_A = x_B - 4 \\ 4 - y_A = y_B - 4 \end{cases}$   
(это почти станд. опред. центр. симметрии в 2D.)

Теперь посчитаем кол-во точек центрального сим. раскрасок.



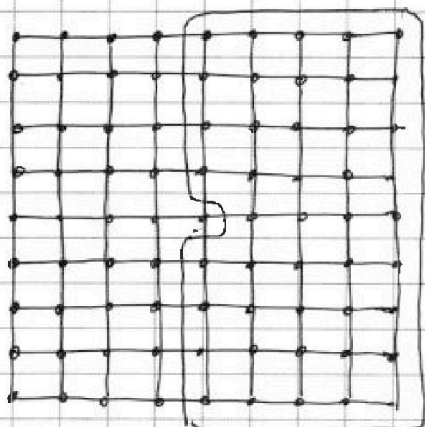
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что в любой угловой или симметричной раскрое ровно 1 <sup>белый узел</sup> ~~фиеста~~ лежит в выделенной области, а вторая ~~однозначно~~ <sup>однозначно</sup> ~~второй~~ <sup>белый узел</sup> однозначно задается первым (это видно из моего спец. центр-сим.)



В выделенной области:

$$5 \cdot 9 - 1 = 44 \text{ узла} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  всего центр-симметрич. раскроев  $C_{44}^1 = 44$

Отвечает им. во раскроев равно  $C_{9^2}^2 = C_{81}^2 = \frac{81 \cdot 80}{2!} = 81 \cdot 40$

Тем-во не центр-симметричных раскроев:

$$81 \cdot 40 - 44 = 3240 - 44 = 3196$$

Еще учесть повороты, то  $\frac{3196}{4} + \frac{44}{2} =$

$$= 799 + 22 = 821$$

$$\begin{array}{r} 3196 \quad | \quad 4 \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 39 \phantom{00} \\ \underline{-36} \phantom{00} \\ 36 \phantom{00} \\ \underline{-36} \phantom{00} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 799 \\ \phantom{00} \\ \phantom{00} \end{array}$$

с учетом поворотов одной центр-симметричной раскроев есть 2 без поворотов, а не центр-симметр — 4 без поворот.

Ответ: 821.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Имеем:

$$\frac{x}{x+6} = \frac{x+24}{2(x+6)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 2x(x+6) = (x+24)(x+6) \\ x > 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x+24 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 24 \quad \Leftrightarrow \overline{BZ} = 24$$

По условию  $AX \parallel MY \Rightarrow \angle YMC = \angle AXC$  — как соот.

Рассмотрим  $\triangle ACX$  и  $\triangle CYM$ :

$\left\{ \begin{array}{l} \angle YMC = \angle AXC \\ \angle ACX = \angle YCM \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ACX \sim \triangle CYM$  по двум углам.  
 $AC$  и  $CY$  — соотв. (лежат против равных углов)  
 $CX$  и  $CM$  — соотв. по той же причине

Тогда имеет место:

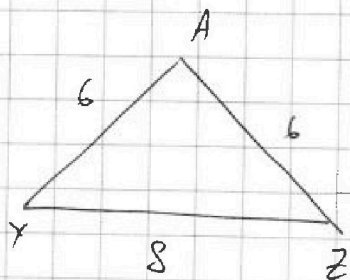
$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{CM}} \quad \frac{\overline{CX}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{18}{x+24}}{\frac{1}{2}} = \frac{36}{x+24} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

$\left( \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } M - \text{ ср. } BC \right)$

Отсюда:

$$4\overline{CX} = 3\overline{CM} \quad 4\overline{CA} = 3\overline{CY} \Leftrightarrow 4\overline{CA} = 3\overline{CA} + 3\overline{AY} \Leftrightarrow \overline{CA} = 3\overline{AY} \Leftrightarrow 3\overline{AY} = 18 \Leftrightarrow \overline{AY} = 6$$

Рассмотрим  $\triangle AZY$ :



Найдём косинус угла  $\angle YAZ$ .  
 По теореме косинусов:

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2 \cdot AY \cdot AZ \cdot \cos(\angle YAZ) = 8^2$$

$$72 = 72 \cos(\angle YAZ) = 64$$

$$8 = 72 \cos(\angle YAZ) \Leftrightarrow \cos(\angle YAZ) = \frac{8}{9}$$

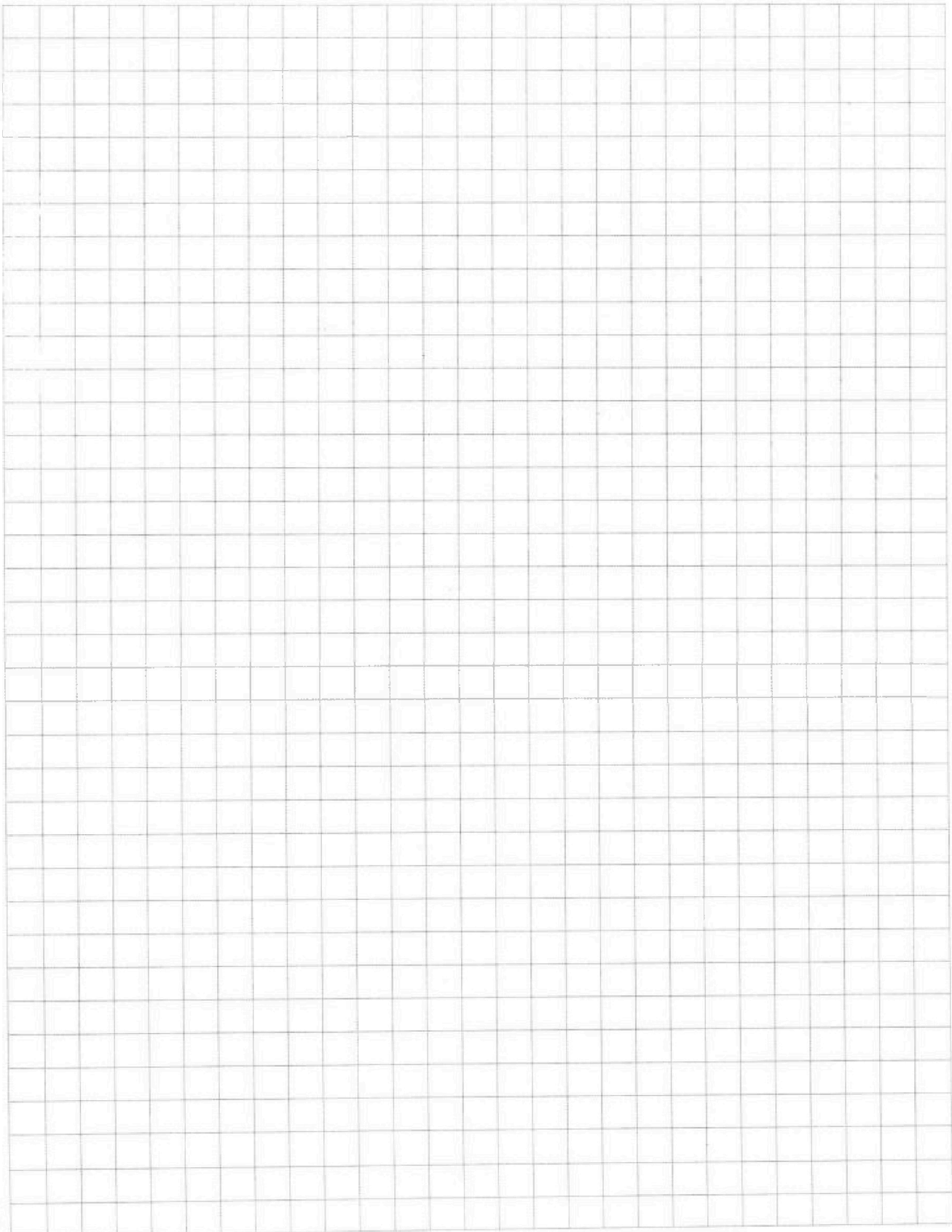


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

ОДЗ:  $x, y \geq 0$

$$f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = x^4 + 5x^2 + x^{\frac{1}{2}}$$

Покажем, что  $f(x)$  - мон. возр. на  $x \geq 0$ .

$$f'(x) = 4x^3 + 10x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \text{ явно видно, что } > 0 \text{ при } x \geq 0.$$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y}}{\sqrt{x+1} - x}$$

Вернемся к первой строке:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$$(x-6)(x+1) \leq 0$$

$$x \in [-1; 6]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 3 = 2\sqrt{6+3x-x^2}$$

$$x \in [-1; 6]$$

Зам.  $x+1 = \alpha$   
 ~~$x-6 = \beta$~~   
 $6-x = \beta$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + 5 = 2\sqrt{\alpha\beta}$$

РДЗ  
 $x \in [-1; 6]$

~~$\alpha + \beta = 2$~~   
 $\alpha + \beta = 2$

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + 5)^2 = 4\alpha\beta$$

$6+3x-x^2$  — максимум при  $x = 2,5$

$$6 + 2,5^2 = 6 + 6,25 = 12,25$$

$$\sqrt{4 \cdot 12,25} = \sqrt{49} = 7$$

$$\alpha + \beta + 25 = 10\sqrt{\beta} + 10\sqrt{\alpha}$$

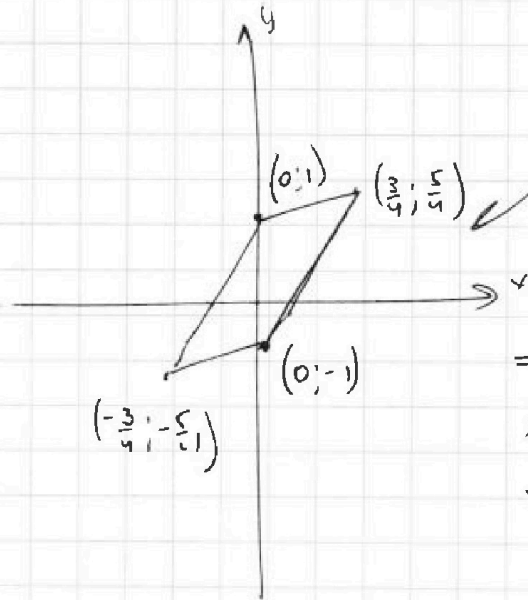


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



яко, что мы берем  $x$   
и  $y$ , берем берем  
саму функцию  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  максимум при

$$x = \frac{3}{4} \quad y = \frac{5}{4}$$

$$4y + 8x = 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= 5 + 6 = 11$$

№ 3.

$m, n \in \mathbb{N}$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1)  $A = 13p^2$

$B = 75q^2 =$

$= 5^3 \cdot 3 \cdot q^2$

$p, q \in \mathbb{P}$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$(m+n) = 13, 13p, 13p^2, p, p^2$$

$m+n$	$m+n-9$	
13	$p^2$	✓
$13p$	$p$	✓
$13p^2$	1	✓
$p$	$13p$	

$p^2$	$13p$
-------	-------





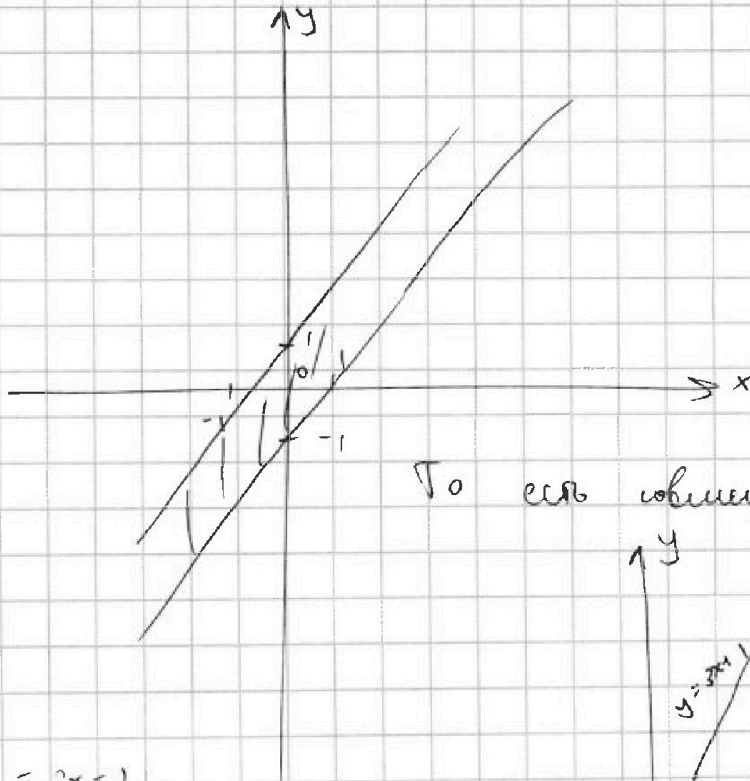
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|3x - y| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3x - 1 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$



То есть область

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

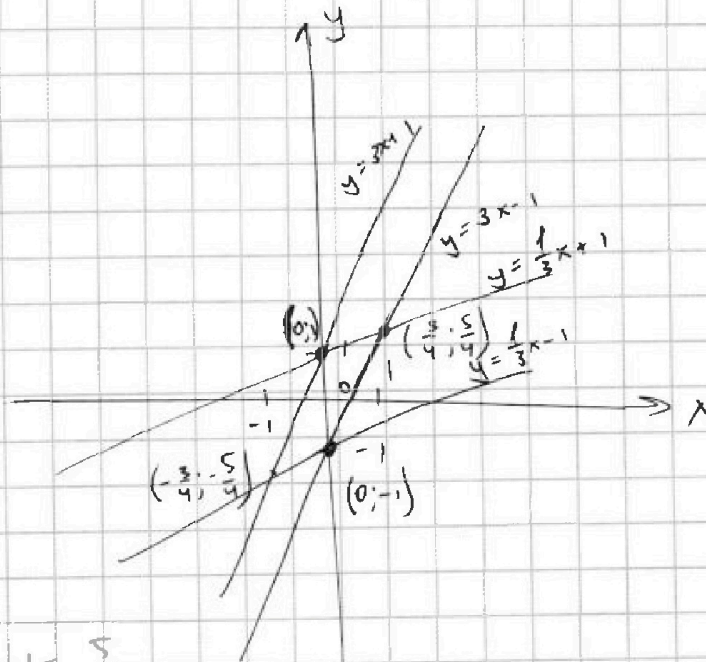
$$3x - 1 = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\frac{8}{3}x = 2$$

$$\frac{4}{3}x = 1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$





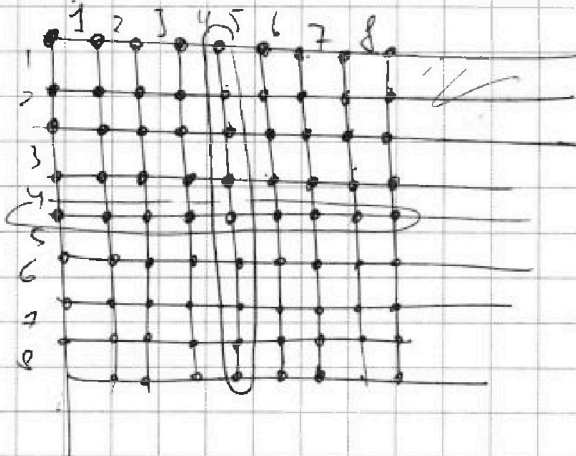
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6



Выводим ~~установленную~~  
~~горизонтально~~ и ~~вертикально~~.

1) Выделим установленную  
мешину.

Замечается, что если  
установленная мешина сервиса,  
то расширения при люб

Замечается, что если расширения симметрично относительно  
установленной мешины, то они дадут дублирование. В противном  
случае 4.

Всего расширений  $C_{81}^2$ . Симметричных расширений:

$$C_{44}^1 \Rightarrow \frac{1}{4} (C_{81}^2 - C_{44}^1) + \frac{1}{2} \cdot C_{44}^1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} + \sqrt{6-x}$$

$$x+1 + 10\sqrt{x+1} + 25 = 4(6+5x-x^2) + 4(6-x)\sqrt{x+1} +$$

$$\begin{array}{l} + 6-x \\ \hline 2x+25 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} \end{array} \right.$$

$$(4x-24+10)\sqrt{x+1} = 24+20x-4x^2-2x-25$$

$$4x^2-20x-24+x+1+25-6+x = (24-4x-10)\sqrt{x+1}$$

$$4x^2-18x+4 = (14-4x)\sqrt{x+1}$$

$$2x^2-9x+2 = (7-2x)\sqrt{x+1}$$

$$(2x^2-9x+2)^2 = (7-2x)^2(x+1)$$

$$4x(2x^2-9x+2)(2x^2-9x+2) = (4x^2-28x+49)(x+1)$$

$$4x^4 - 18x^3 + 4x^2 - 18x^3 + 81x^2 - 18x + 4x^2 - 18x + 4 =$$

$$= 4x^4 - 36x^3 + 49x^2 - 36x + 4$$

$$4x^4 - 36x^3 + 49x^2 - 36x + 4$$

$$t+7 = 7-t^2$$

$$t^2+t-2=0$$

$$(t+2)(t-1)=0$$

$$\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}\right)^2 = x+1+6-x - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} =$$

$$= 7 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$$

$$2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 7-t^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1.1) \quad m+n=13$$

$$m+n-g = p^2 = 13-g-4$$

$$p=2$$

$$m+n=13$$

$$mn((m+n)-3) = mn(10) = 75q^2 \Rightarrow q=2$$

$$10mn = 75 \cdot 4$$

$$10mn = 300$$

$$mn = 30$$

$$m=3 \text{ и } n=10 \text{ и наоборот}$$

$$1.2) \quad m+n=13p$$

$$m+n-g=p$$

$$g=12p \rightarrow \text{не логич.}$$

$$1.3) \quad m+n=13p^2$$

$$m+n-g=1$$

$$m+n=10$$

$$13p^2=10 \rightarrow \text{не логич.}$$

$$1.4) \quad m+n=p^2$$

$$m+n-g=13p$$

$$(m+n; m+n-g) = p \quad (p \neq 13)$$

"

$$(m+n; g) = p \Rightarrow g:p$$

$$p=3 \rightarrow \text{не логич.}$$

$$m+n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \quad A = 75q^2 \quad B =$$

$$B = 13p^2$$

$$(m+n)mn(m+n-3) = 13 \cdot p \cdot p$$

$$1) \quad m = 1$$

$$n(n-2) = 13p^2$$

$$1.1) \quad n = p^2 \quad n-2 = 13 \quad 1.2) \quad n = 13p \quad n-2 = p \quad \times$$

$$1.3) \quad n = 13 \quad n-2 = p^2 \quad \times \rightarrow \text{не подх.}$$

$$2) \quad n = 1 - \text{аналог}$$

$$3) \quad m = 13 \quad n = p \quad \begin{cases} 13 + p - 3 = p - \text{нв.} \end{cases}$$

$$m+n-3 = p$$

$$4) \quad m = p \quad n = 13 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{аналог.}$$

$$5) \quad m = p \quad n = p \quad m+n-3 = 13$$

$$2p-3 = 13$$

$$2p = 16$$

$$p = 8 - \text{нв. прв.}$$

~~Только 1 пара~~  $(3; 10); (10; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

v 1.

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = a_3 + 2d$$

$$2d = t$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = a_3 + 6d$$

$d$  - разность прогрессии

$$a_9 = 3x^2$$

$$3a_3 + 6d = 3(a_3 + 2d) = 2a_3 + a_9$$

$$2a_3 + a_9 = 3a_5 \Rightarrow 2a_3 + a_9 = 3a_5$$

$$2(3x+3) + 3x^2 = 3(x^2+2x)^2$$

$$6x+6 + 3x^2 = 3(x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

$$6x+6 + 3x^2 = 3x^4 + 12x^3 + 12x^2$$

$$2x+2 + x^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = -2: 16 - 32 + 12 + 4 - 2$$

$$2(x+1) + x^2 = (x^2+2x)^2$$

$$x^2+2x+2 = (x^2+2x)^2$$

$$t = x^2+2x$$

$$t+2 = t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0$$

$$t = -1$$

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$1) \quad x^2+2x = 2$$

$$x^2+2x-2 = 0$$

$$D = 2^2 + 8 \sqrt{12}$$

2 значения

$$2) \quad x^2+2x+1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

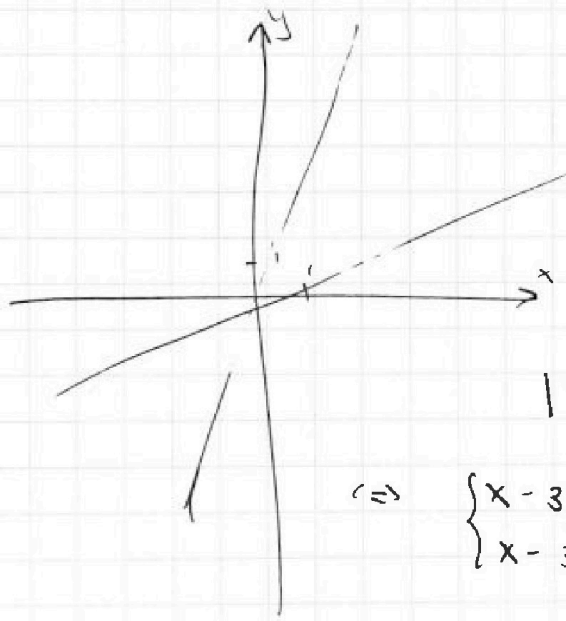
№ 2.

$$\max (4y + 8x) = ?$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$1) \begin{cases} x - 3y \geq 0 \\ 3x - y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3y \\ 3x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x \geq y \\ 3x \geq y \end{cases} \quad y = \frac{1}{3}x$$

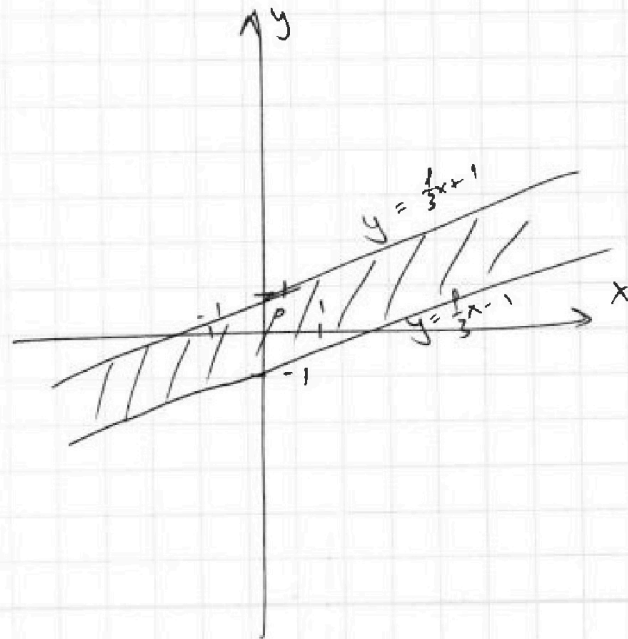


$$\begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$|x - 3y| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y \leq 3 \\ x - 3y \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq x - 3 \\ 3y \leq x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x - 1 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$



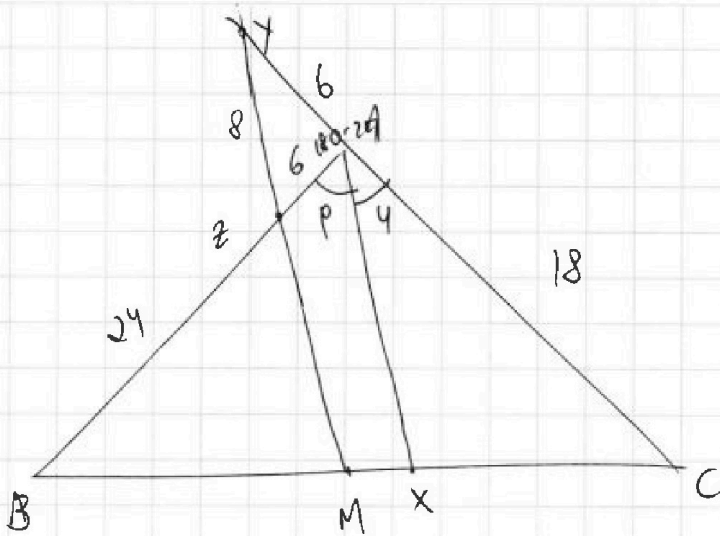


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BX}{XC} = \frac{30}{18} = \neq \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{CX}{CB} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{CM}{CB} = \frac{P}{2} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{P}{2}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{P} = \frac{3}{4P}$$

$$\frac{CA}{CX} = \frac{CM}{CA} = \frac{3}{4}$$

$$4CA = 3CX$$

$$4CA = 3CA + 3AY$$

$$CA = 3AY$$

$$CA = 3AY$$

$$AY = 6$$

$$\cos(180 - 2\varphi) =$$

$$\cos(90 - \varphi) =$$

