МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1

$x^2+2\sqrt{3}tx+4t^2-4=0$

пусть x_1 и x_2 - действительные корни уравнения такие, что $x_1 \neq x_2$, и $x_1 \cdot x_2 > 0$

тогда первое условие, что $x_1 \neq x_2$, можно записать как, то что в квадратном уравнении Дискриминант >0

$D>0$

$(2\sqrt{3}t)^2-4(4t^2-4)>0$

$12t^2-16t^2+16>0$

$16-4t^2>0$

$4-t^2>0$

$t^2<4$

$\left[\begin{array}{l} t<2 \\ t>-2 \end{array}\right. \Rightarrow t \in (-2;2)$

второе условие, что $x_1 \cdot x_2>0$ можно выразить через теорему Виетта, $x_1 \cdot x_2 = c$, значит $c>0$

$4t^2-4>0$

$t^2-1>0$

$t^2>1$

$\left[\begin{array}{l} t>1 \\ t<-1 \end{array}\right. \Rightarrow t \in (-\infty;-1) \cup (1,+\infty)$

тогда на пересечении полученных нами множеств получаем, что

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

тогда это значит, что для того чтобы уравнение

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$

имело 2 различных действительных корня произведение которых положительно t должно входить в полученое множество

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2.

$a_1 = \frac{65+49}{4} = 28,5$ не подходит т.к. а - натуральное число

$a_2 = \frac{65-49}{4} = 4$

т.к. a_1 - не подходит, значит верный вариант - a_2,

$a = 4$

$a + b = 40$

$b = 40 - a = 40 - 4 = 36$

~~Ответ~~ b подходит под условия

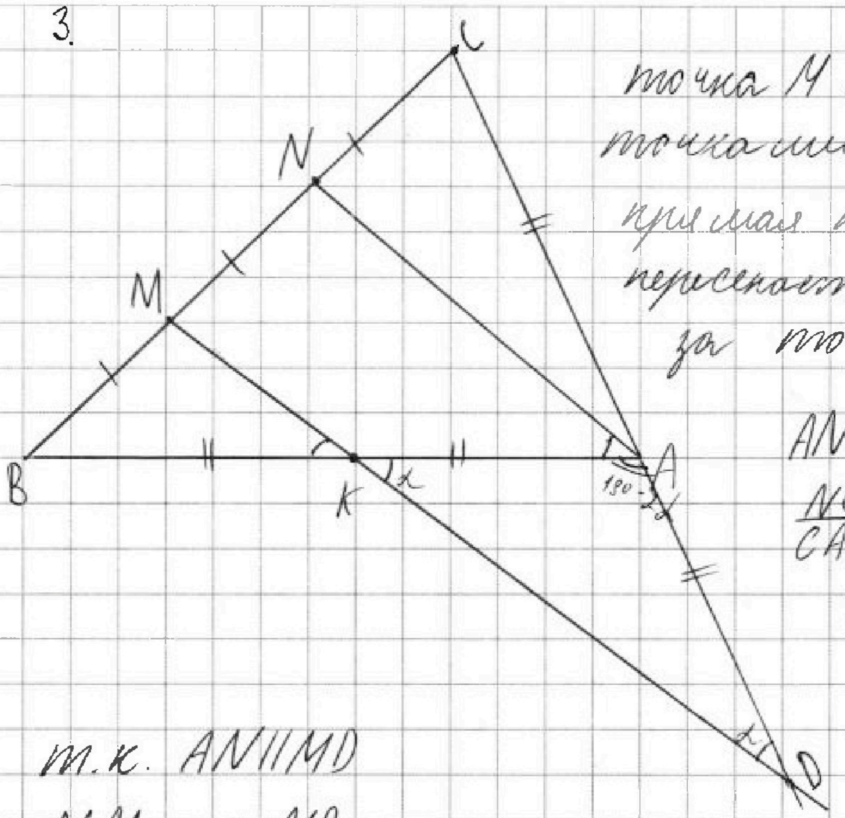
Ответ: $a = 4$; $b = 36$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3.



точка M лежит между точками B и N, т.к. прямая параллельная AN пересекает прямую BAC за точкой A

$AN \parallel MD \Rightarrow$

$\frac{NC}{CA} = \frac{MC}{CD} \Rightarrow$

~~BC~~ $CD = 2CA$

т.к. $AN \parallel MD$

$\frac{NM}{AK} = \frac{NB}{AB} \Rightarrow AK = \frac{1}{2}AB$

$AK = BK = CA = AD = \frac{1}{2}AB$

$BC = BM + MN + CN = 12$

$BM = MN = CN = \frac{1}{3}BC = 4$

$\triangle AKD$ - равнобедренный, $AK = AD \Rightarrow \angle AKD = \angle ADK$

$\angle MKB = \angle AKD$ как вертикальные

$\angle NAB = \angle MKB$ как соответственные углы

$\angle ADK = \alpha$

тогда:

$\angle ADK = \angle AKD = \angle MKB = \angle NAB = \alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3.

в $\triangle AKD$ $\angle KAD = 180° - \angle AKD - \angle ADK = 180° - 2\alpha$

$\angle CAD$ - прямая, значит $\angle CAD = 180°$

$\angle CAD = \angle CAN + \angle NAB + KAD = \angle CAN + \alpha + 180° - 2\alpha$

$\Rightarrow \angle CAN = \alpha$

$\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$

в $\triangle ABC$ $\angle CAB = \angle CAN + NAB = 2\alpha$

тогда пусть $AC = x$, тогда $AB = 2AC = 2x$

тогда по теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot AB \cdot AC$

$12^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot 2x \cdot x$

$144 = 6x^2$

$x^2 = 24$

$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

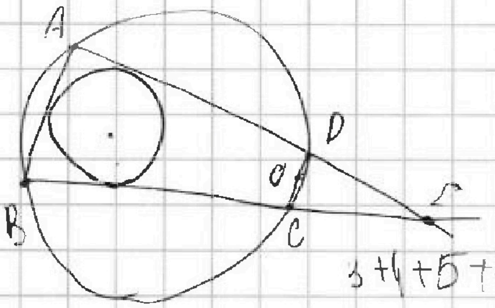
$AB = 2x = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$3+4+5+7=19-3=16+1=10$

$7\cdot\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}\le 1$

$2x+2y-x^2-y^2\ge 0$ $\quad 1-|x+y-2|\ge 0$

$2x+2y\ge 0 \Rightarrow x+y\ge 0$ $\quad x+y-2\le 1$

$x+y\le 3$

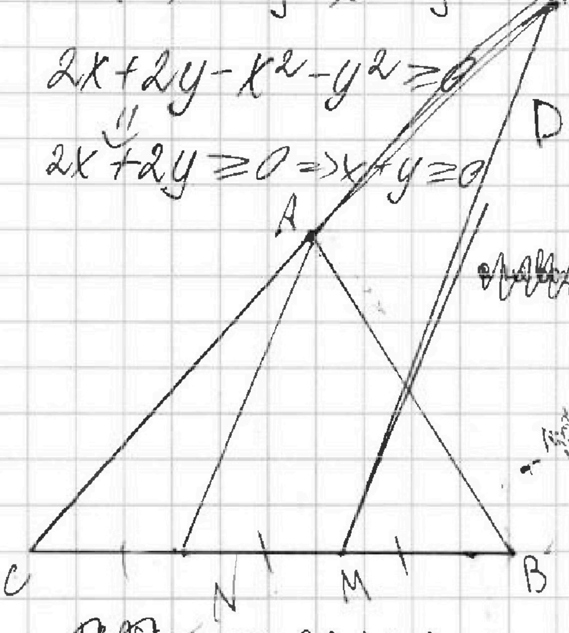
$BC = 12\cos(2\angle CAN)=\frac{1}{4}$

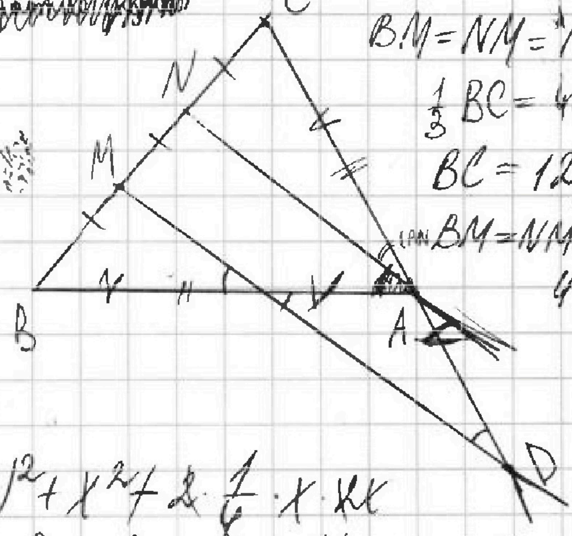
$BM=NM=NC=$

$\frac{1}{3}BC = 4\cos(2\angle CAN)$

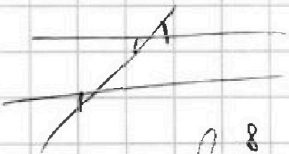
$BC=12$

$BM=NM=NC=4$





$\cos\angle CAN=\frac{1}{4}\Rightarrow$



$12^2=(2x)^2+x^2+2\cdot\frac{1}{4}\cdot x\cdot x$

$C_9^8=$ $\quad 4x^2+x^2+x^2$ $\quad 144:6=24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6.

Из всех, кроме 4 деревень выходит по одной дороге, значит из каждой такой деревни дорога должна вести в одну из 4 деревень из которых есть много дорог, т.к. если это не так, то 2 деревни с 1 дорогой будут соединены вместе и в них нельзя будет попасть из другой деревни, а это противоречит условию.

Тогда пусть 4 деревни - главные, тогда каждая другая деревня соединена с главной, но главные деревни тоже должны быть соединены между собой. т.к. из любой главной деревни можно попасть в любую, то между 4 главными деревнями не меньше 3-х дорог. если между ними будет хотя бы 4 дороги, то у нас получится цикл, а значит из одной деревни мы сможем попасть в другую более чем одним путём, значит между главными деревнями ровно 3 дороги

всего дорог из главных деревень:

$3+4+7+5=19$ $19-3=16$ дорог - выходят из главных деревень в другие

значит всего у нас есть 16 обычных деревень

$16+4=20$ деревень - всего

Ответ: 20 деревень

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1$$

$$\begin{cases} 2x+2y-x^2-y^2 \geq 0 \\ 1-|x+y-2| \geq 0 \end{cases}$$

т.к. $x^2+y^2 \geq 0$, то ~~2x+2y≥0~~

$2x+2y \geq x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$

$1-|x+y-2| \geq 0$

$|x+y-2| \leq 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-2 \leq 1 \\ x+y-2 \geq -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 1 \end{array}\right.$

~~zz~~ $x+y \in [1;3]$

$$\begin{cases} 2x+2y \geq x^2+y^2 \\ 2x+2y \in [2;6] \end{cases}$$

т.к модуль всегда ≥ 0, ~~что~~ а выражение ~~в~~ под модулем принимает только целые значения, то:

$\sqrt{1-|x+y-2|}$ может быть равен только 0 или 1, т.к. $|x+y-2|$ ~~равен~~ может быть равен только 0 или 1

1) если $\sqrt{1-|x+y-2|}=1$

$\sqrt{1-|x+y-2|}=1 \Rightarrow 1-|x+y-2|=1$

$|x+y-2|=0 \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow 2x+2y=4$

$$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1$$

$$\sqrt{4-x^2-y^2}+1=1$$

$$\sqrt{\cancel{4-x^2-y^2}}=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7.

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow$ мы можем выразить y через x

$y=2-x$

$x^2+(2-x)^2=4 \qquad x^2+4-4x+x^2=4$

$2x^2-4x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x=4 \Rightarrow x=2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow$ решения $-(0;2),(2;0)$

2) если $\sqrt{1-|x+y-2|}=0$

$\sqrt{1-|x+y-2|}=0 \Rightarrow 1-|x+y-2|=0 \Rightarrow |x+y-2|=1$

$\left[\begin{array}{l} x+y-2=1 \\ x+y-2=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+2y=6 & (1) \\ 2x+2y=2 & (2) \end{array}\right.$

$\sqrt{2x+2y-x^2-y^2}+\sqrt{1-|x+y-2|}=1$

(1)

$\sqrt{6-x^2-y^2}+0=1 \Rightarrow \sqrt{6-x^2-y^2}=1$

$6-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=5$

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow y=3-x$

$x^2+(3-x)^2=5 \Rightarrow x^2+9-6x+x^2=5$

$2x^2-6x=-4$

$2x^2-6x+4=0 \quad \Rightarrow x^2-3x+2=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2 \end{array}\right.$ — решения: $(2;1),(1;2)$

(2)

$\sqrt{2-x^2-y^2}+0=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

7.

$\sqrt{2-x^2-y^2}=1$

$2-x^2-y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ Выражаем y через x:

$y=1-x$

$x^2+(1-x)^2=1$

$x^2+1-2x+x^2=1$

$2x^2-2x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$

решения − $(0;1)$, $(1;0)$

все эти решения подходит и удовлетворяют условия

Ответ: $(0;2), (2;0), (2;1), (1;2), (0;1), (1;0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$4t^2-4>0$

$t^2-1>0$

$\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>1 \end{array}\right.$

$D>0$

$(2\sqrt{3}t)^2 - 4(t^2-4) = 12t^2-16t^2+16>0$

$16-4t^2>0$

$4-t^2>0$

$t^2<4$

$\left[\begin{array}{l} t<2 \\ t>-2 \end{array}\right.$

2. $a+b=40$

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^2$

$40\cdot 25 = 1000$

$(a-b)^2+15(a-b)=17p^2$

$2^5=32$!

$17\cdot 4 = 40+28=68$

$(a-b)(a-b+15)=17p^2$

$556 : 2 = 278$

$b=40-a$

$(a-40+a)(a-40+a+15)=(2a-40)(2a-25)=17p^2$

$932:2=466$

$4a^2-80a-50a+1000=17p^2$

$65 \cdot 65 = 4225$

$4a^2-130a+1000=17p^2 \Rightarrow p=2$

$466\cdot 8 = 3728$

$4a^2-130a+1000=68$

$4225-1824=2401$

$4225-3728=497$

$17\cdot 32 = 544$

$4a^2-130a+932=0$

$2a^2-65a+466=0$

$D=65^2-8\cdot 466=4225-3728=497$

$278\cdot 8 = 2224$

$4a^2-130a+1000=444$

$40\cdot 40=1600$

$4a^2-130a+556=0$

$2a+40+15$

$2a^2-65a+278=0$

$41\cdot 41 = 1681$

$17\cdot 32 = 544$

$D=65^2-8\cdot 278=4225-2224=2001$

$228\cdot 8=1824$

$49\cdot 49 = 2401$

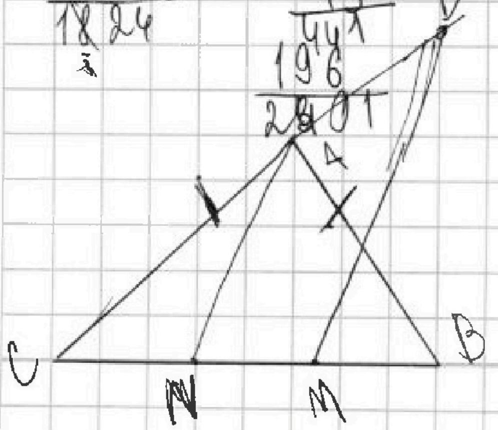
$456 : 2 = 228$

$\frac{65\pm 49}{4}=$

$65+49=64+50=\frac{114}{4}=28{,}5$

$65-49=\frac{16}{4}=4$

$BC=12\cos(2\angle CAN)=-\frac{1}{4}$



1 2 3 4 5 6 7 8 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2.

a и b - натуральные числа

$a+b=40$

$a^2-2ab+b^2+15a-15b=17p^5$

$(a-b)^2+15(a-b)=17p^5$

$(a-b)\cdot(a-b+15)=17p^5$

мы можем выразить b через a

$a+b=40$, тогда

$b=40-a$

$(a-(40-a))\cdot(a-(40-a)+15)=17p^5$

$(2a-40)\cdot(2a-25)=17p^5$

$4a^2-80a-50a+1000=17p^5$

в левой части все числа четные, значит их сумма-тоже четное число, значит $17p^5 \vdots 2$, т.к. $17 \not\vdots 2$, значит, что $p^5 \vdots 2$, но p - простое число, единственное простое число которое в 5 степени делится на 2, это 2, значит $p=2$

$p^5=2^5=32 \Rightarrow 17\cdot p^5=17\cdot 32=544$

$4a^2-130a+1000=544$

$4a^2-130a+456=0$

$2a^2-65a+228=0$

$D=65^2-4\cdot 2\cdot 228=4225-1824=2401$

$a=\frac{65\pm\sqrt{2401}}{2\cdot 2}=$