



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра  $t$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$  имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = 12$ , а значение выражения  $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$  равно  $19p^3$ , где  $p$  – некоторое простое число. Найдите числа  $a$  и  $b$ .
3. [5 баллов] На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Прямая, параллельная  $AN$  и проходящая через точку  $M$ , пересекает продолжение стороны  $AC$  за точку  $A$  в такой точке  $D$ , что  $AB = CD$ . Найдите  $AB$ , если  $BC = 6$ ,  $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$ .
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
  - он сидит на первой парте в ряду,
  - ближайшая парта перед ним пуста,
  - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон  $BC$  (за точку  $C$ ) и  $AD$  (за точку  $D$ ) вписанного в окружность четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Центр  $O$  окружности, вписанной в треугольник  $ABE$ , лежит на отрезке  $CD$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $ED + DO$ , если известно, что  $BE = 12$ .
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{t}x + 9t^2 - 9 = 0$$

$D$  - дискриминант.

$$D > 0$$

$$D = 16t^2 - 36t^2 + 36 > 0$$

$$36 > 4t^2$$

$$t^2 < 9$$

$$t \in (-3; 3)$$

По т. Виета:

$x_1, x_2$  - корни

$$x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

$$t \in (-3; 3) \cap ((-\infty; -1) \cup (1; +\infty))$$

$$t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$$

Ответ.  $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 12$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) = \\ = (a+b)(a+b+3)$$

$$a - b = 12$$

$$a - b \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$a \equiv b$$

$a - b = 12$ ,  $\Rightarrow$   $a$  и  $b$  ~~одной~~ <sup>решимые оба или оба нечет.</sup>

т.к. если они разной четности, то их разность будет нечет, 12 - чет.

$a$  и  $b$  одной чет.,  $\Rightarrow a + b$  - чет.

$$\underset{\text{ц}}{(a+b)} \underset{\text{ц}}{(a+b+3)} = 19p^4$$

$$19p^4 : 2$$

$p^4 : 2$ ,  $\Rightarrow p = 2$ , т.к.  $p$  - чет. и простое.

$a + b + 3$  - нечет., т.к. чет. + нечет. = нечет.,  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a + b + 3 \not\equiv p^4, \Rightarrow a + b \not\equiv p^4$$

если  $a + b \equiv 19$ , то  $a + b \equiv 19 \cdot p^4$ , т.к.  $2 \notin 2$  и  $19$  <sup>простые</sup>  $\notin 2$ .

$$a + b \geq 2, \text{ т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \Rightarrow a + b \geq 19 \cdot p^4 = 19 \cdot 16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b+3 > a+b \geq 19 \cdot 16$$

$$(a+b)(a+b+3) > 19 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 16 = 19 \cdot 16, \Rightarrow !!! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \leq 16 \text{ и } a+b \neq 19, \Rightarrow a+b+3 \leq 19$$

$$a+b > \frac{19^2}{4}, \Rightarrow a+b \geq 16$$

$$a+b+3 \geq 19$$

$$19 \cdot 16 = (a+b)(a+b+3) \geq 19 \cdot 16, \Rightarrow \begin{cases} a+b = 16 \\ a+b+3 = 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 16 \\ a-b = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2a = 16 + 12$$

$$\begin{cases} a = 14 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$14 + 2 + 3 = 19.$$

Ответ.  $a = 14, b = 2.$

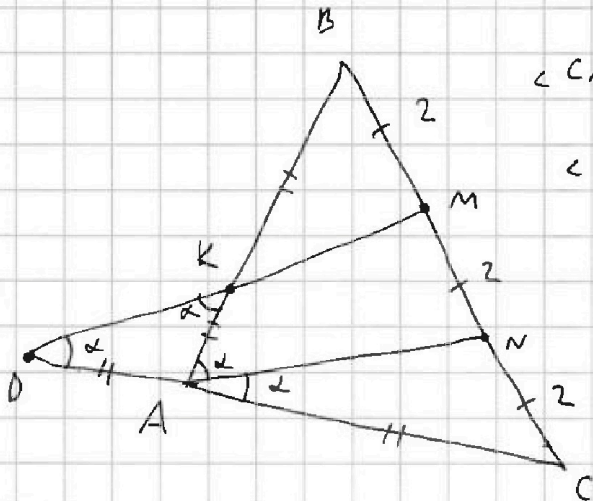


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle CAN = \alpha$$

$\angle CAN = \angle CDM$ , т.к.  $AN \parallel MD$ ,  $\text{соств. } \angle$ .

$MK \parallel AN$  и  $AK \parallel MN$  т.к.  $M$  - сев. см.  $BN$ ,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  ~~параллелограмм~~  $MK$  - сред. лин. в  $\triangle ABN$ ,  $\Rightarrow AK = KB$ ,  $\text{т.к.}$

$AN \parallel MD$  и  $N$  - сев. см.  $MC$ ,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  т.к.  $A$  - сев. см.  $CD$ ,  $\Rightarrow$  т.к.  $AN$  - сред. лин.  $\triangle CDM$ .

$$CD = AB, \Rightarrow AK = KB = AC = AD = \frac{1}{2} AB.$$

$\triangle ADK$  - равнобедр.,  $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$

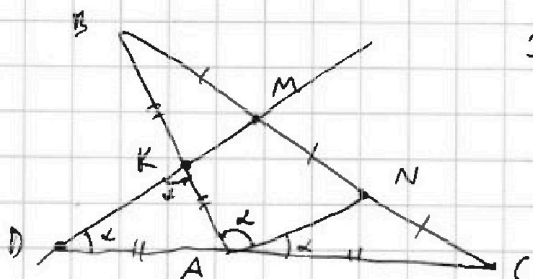
$\angle AKD = \angle KAN$ , т.к.  $\text{накрест. лежащ. } \angle$  при  $\text{паралл. } \text{пр.}$

$MD$  и  $AN$  и секущей  $AK$ .

$$\angle KAN = \angle CAN = \alpha$$

$$\angle CAB = 2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{3}{4}, \Rightarrow 2\alpha > 90^\circ, \Rightarrow \angle CAB - \text{тупой.}$$



По т. косинусов в  $\triangle ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle C$$

$$6^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 2 \cdot AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\text{т.к. } \cos 2\alpha = -\frac{3}{4}, \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

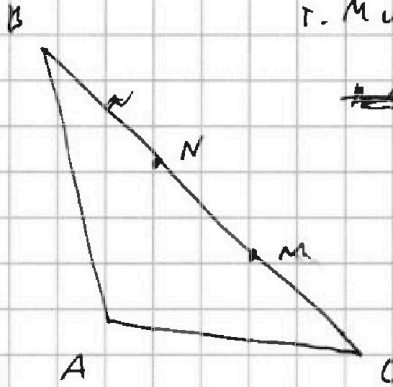


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



г. М и N расстояние макс, т.к. угол!

~~$BM = MN$~~   $BM = MN = NC$

$BM > MN, \Rightarrow !!!$

Ответ.  $AB = 3\sqrt{2}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

0 0 0 0  
0 0 0 0  
0 0 0 0

Если посадить 11 улиток, то останется 1 свободное место.

Пусть мы выбрали 3 улитки, кол-во способов посадить их в 1 ряд  $\approx 1$ , т.к. свободных мест в 1 ряду не будет,  $\Rightarrow$  они будут хорошо видны, если через них сидит  $\Rightarrow$  улитка меньшего роста, но упорядочить их по росту можно единственным ~~способом~~ способом.

Кол-во способов выбрать ряд, в котором сидят ~~2 улитки~~ <sup>-4.</sup> 2 улитки  $\approx 4$

Кол-во способов выбрать 2 улитки из 11:

$$C_{11}^2$$

Кол-во способов ~~по~~ посадить:

$$a < b: \quad \begin{matrix} a & b & b & 0 & a \\ & 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & a & b & \end{matrix} \quad - 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кол-во способов выбрать из ~~оставшихся~~ <sup>оставшихся</sup> 9

т.е. 3 ~~из~~ и рассадить их в один ряд:

$$C_9^3 - 1$$

Кол-во способов ~~выбрать~~ <sup>выбрать</sup> из 6 по 3: ~~из~~

$$C_6^3$$

~~Кол-во~~ Кол-во способов рассадить оставшихся 3:

1

Всего способов ~~рассадить~~ <sup>рассадить</sup>:

$$4 \cdot 4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 - C_6^3 - 1$$

Ответ.  $4^2 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$ .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассм. граф., верш. - деревни, ~~ребра~~ <sup>ребра - дороги.</sup>  
и связной граф.

единственный маршрут из любой деревни, во  
любой, => без циклов.

связный граф без циклов - дерево.

в дереве на  $n$  вершинах ~~ребра~~ равно  $n-1$  ребра.

кол-во ребер  $= \frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$ , т.к.

сумма степеней всех вершин  $= 5+6+7+9+(n-4) \cdot 1$ , т.к.  
 $n-4$  верш.

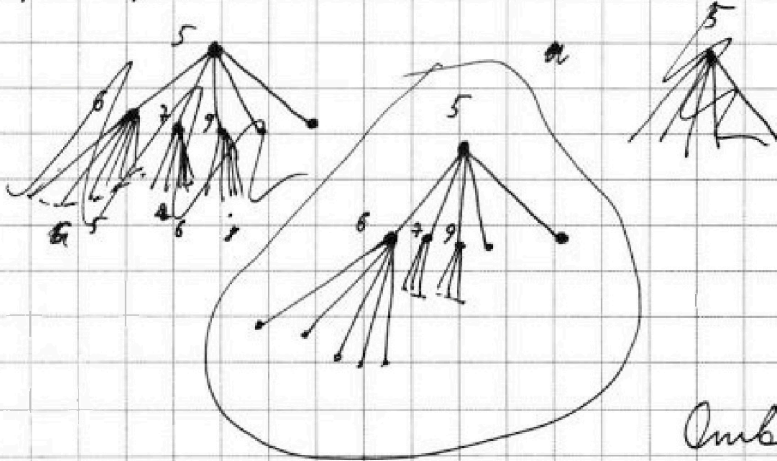
или, степ. 1. ~~каждое ребро~~

Каждое ребро посчитали 2 раза, =>  $\frac{5+6+7+9+n-4}{2}$

$$\frac{5+6+7+9+n-4}{2} = n-1$$

$$n = 25.$$

Пример:



Ответ. 25.




На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что в дереве на  $n$  вершинах <sup>ребро</sup>  $n-1$  ребро.

в дереве есть  $\geq 1$  верш. степ. 1. 

Индукция по  $n$ .

База.  $n=1$ :  $\cdot$  1 верш, 0 ребр.

$n=2$ :  $\rightarrow$  2 верш. 1 ребро.

Переход. Пусть в дереве на  $n$  верш.  $n-1$  ребро.

Докажем, что в дереве на  $n+1$  верш.  $n$  ~~ребро~~ <sup>ребро</sup>.

Рассм. ~~два~~ ~~два~~ дерева на  $n+1$  верш.

выкинем верш. степ. 1. Остался ~~граф~~ ~~граф~~ граф

на  $n$  вершинах. ~~Связность~~ Связность осталась и

циклов не появилось,  $\Rightarrow$  граф - дерево.

по ТП предполагаем, в дереве на  $n$  верш.  $n-1$

ребро,  $\Rightarrow$  если ~~верш~~ верш. степ. 1, то

кач-во вершин увел. на 1 и ребр на 1,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  в ~~дере~~ ~~дере~~  $n+1$  верш.  $n$  ребр

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - (x - y - 1)} = 2 \quad \text{Ответ. } (1; 0) \\ (0; -1).$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$$

$$x - y - 1 \geq 0;$$

$$1 - x + y + 1 \geq 0$$

$$x - 1 \geq y \geq x - 2$$

$$x - y - 1 \leq 0;$$

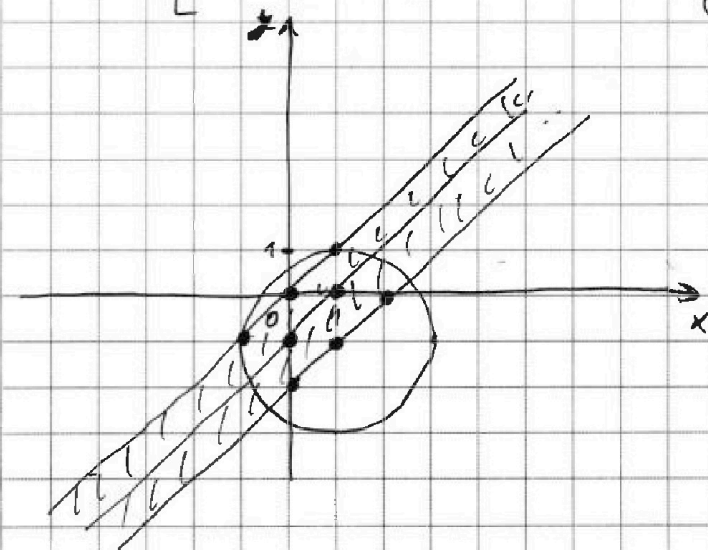
$$1 + x - y - 1 \geq 0$$

$$x - 1 \leq y \leq x$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$$

$$x + 1 \geq y \geq x - 2$$

$$x \geq y \geq x - 1$$



$$\sqrt{2 + 2 - 1 - 1} + \sqrt{1 - |1 + 1 - 1|} \neq 2$$

$$\sqrt{4 - 0 - 4 - 0} + \sqrt{1 - |2 - 0 - 1|} \neq 2$$

Переберем эти точки:

$$(1; 1), (1; 0), (0; 0),$$

$$(-1; 1); (0; -1); (0; -2);$$

$$(1; -1); (2; 0);$$

$$\sqrt{2 - 2 - 1 - 1} + \sqrt{1 - |1 - 1 - 1|} \neq 2$$

$$\sqrt{2 - 0 - 1 - 0} + \sqrt{1 - |1 - 0 - 1|} = 2$$

$$\sqrt{0} + \sqrt{1 - |0 - 0 - 1|} \neq 2$$

$$\sqrt{-2 + 2 - 1 - 1} + \sqrt{1 - |1 - 1 - 1|} \neq 2$$

$$\sqrt{0 + 2 - 0 - 1} + \sqrt{1 - |0 + 1 - 1|} = 2$$

$$\sqrt{0 + 4 - 0 - 4} + \sqrt{1 - |0 + 2 - 1|} \neq 2$$

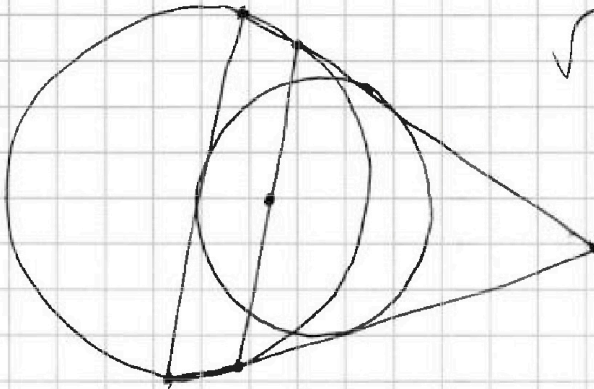
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - (x - y + 1)^2} = 2$$

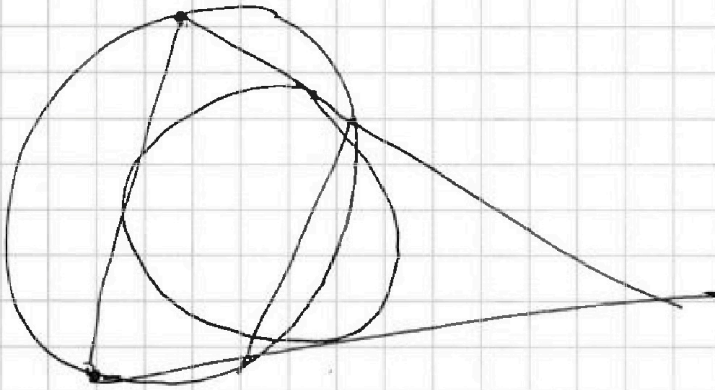
$$2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0$$

~~$$x^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$$~~

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2$$

$$|x - y - 1| \leq 1$$

$$\frac{5 + 6 + 7 + 9 + n - 4}{2} = n - 1$$



$$23 + n = 2n - 2$$

$$25 = n$$

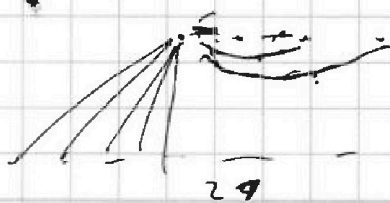
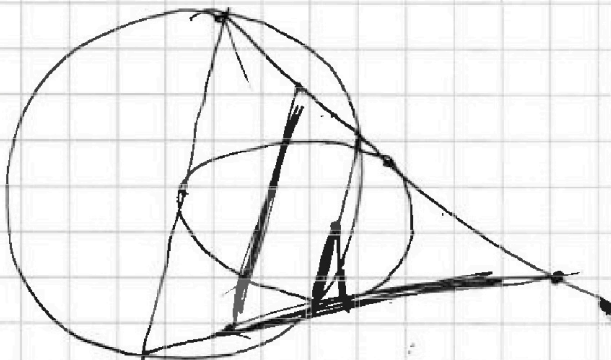
$$x - y - 1 \geq 0:$$

$$x - y \geq 1$$

$$x - y - 1 \leq 0:$$

$$y - x \leq 1$$

~~1111~~ ~~1111~~



29



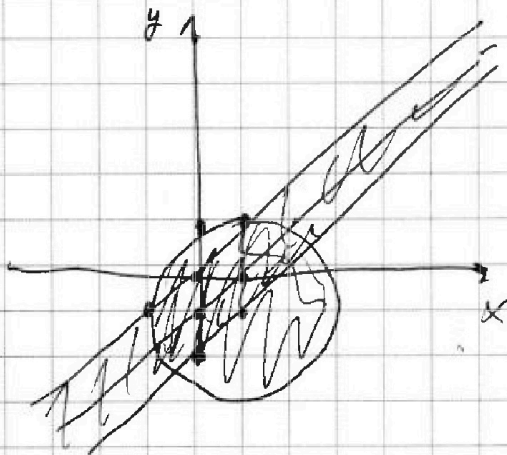
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$



$$0 \leq x - y - 1 \leq 1$$

$$1 \leq x - y \leq 2$$

$$x - y > 1$$

~~or~~

$$y - x + 1 \leq 1$$

$$y \leq x$$

$$x - y - 1 \leq 0$$



$$x - y \leq 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

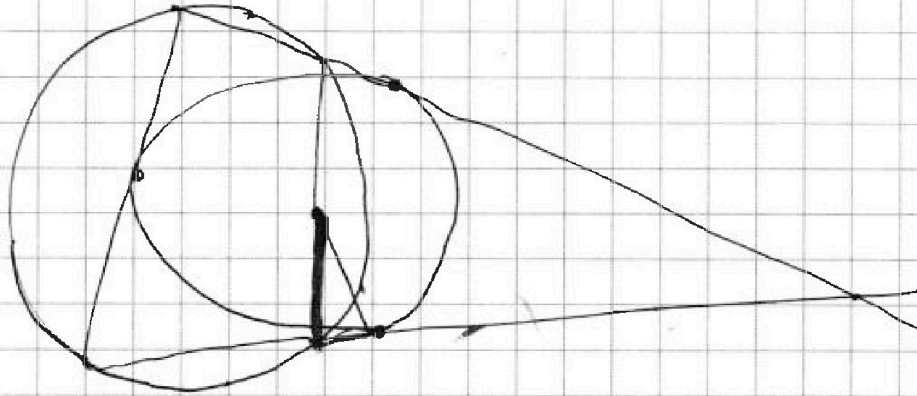
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



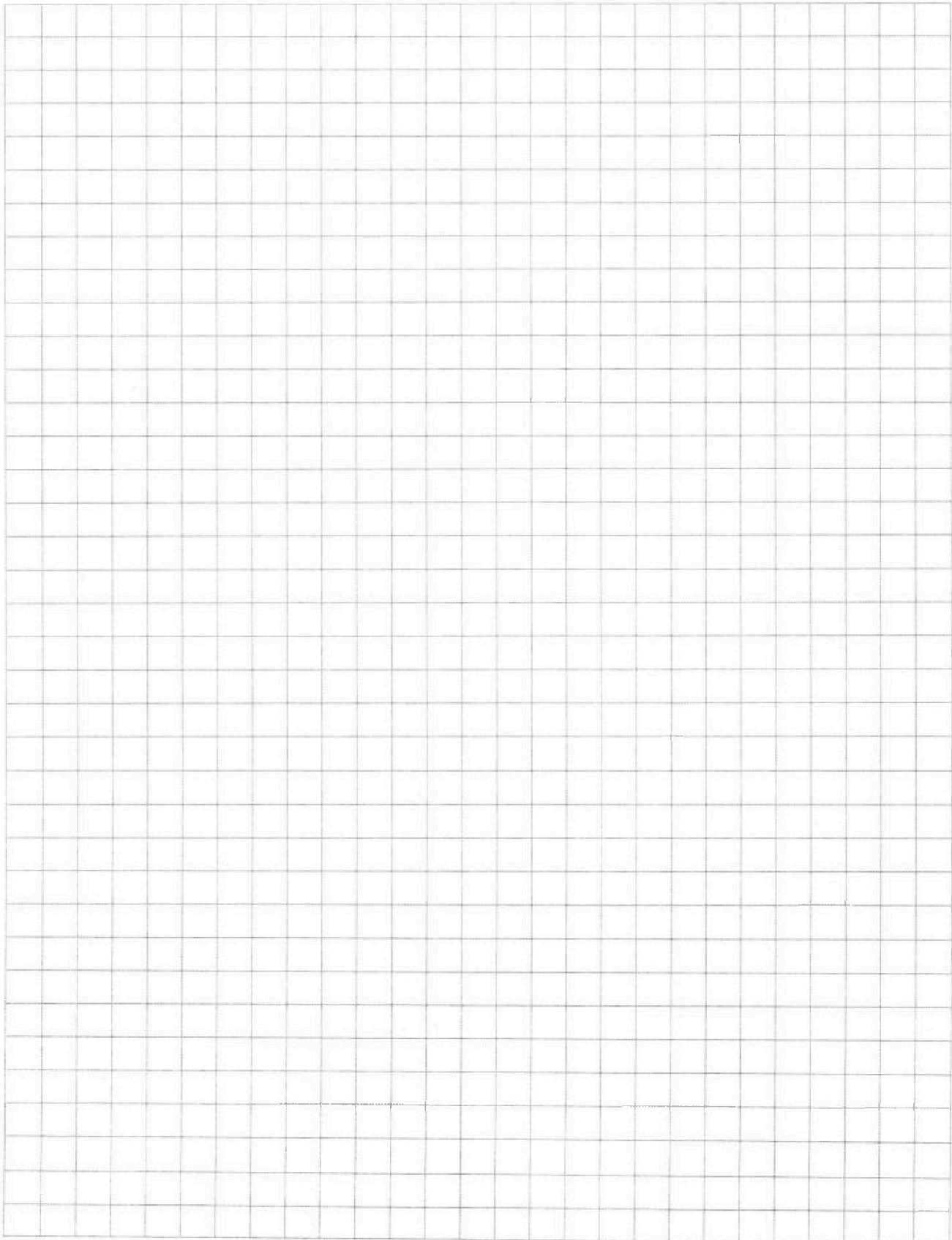


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

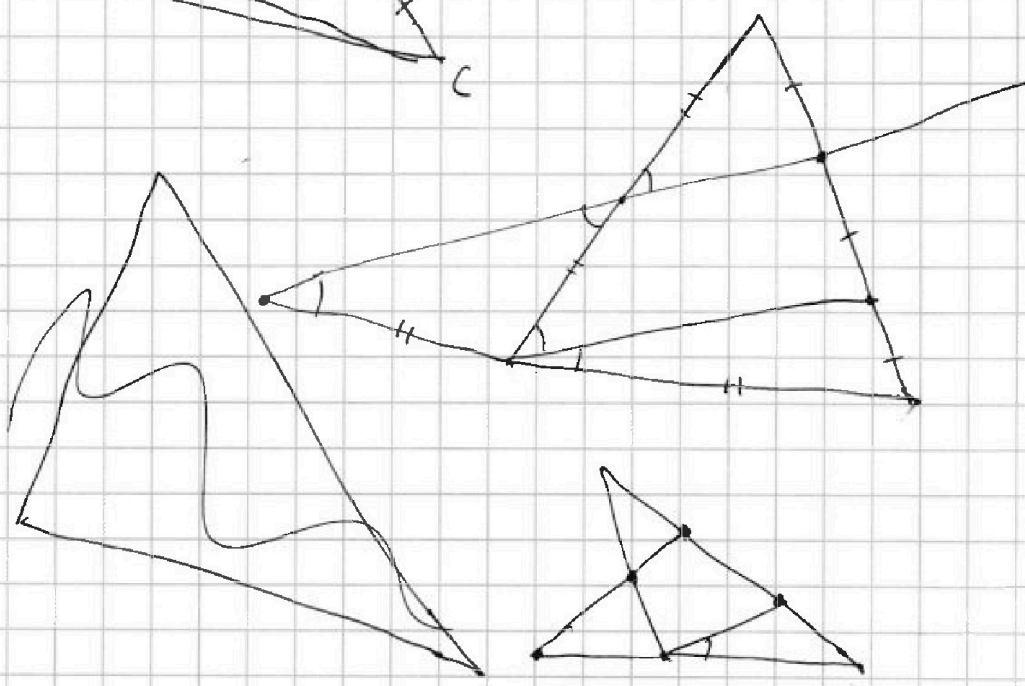
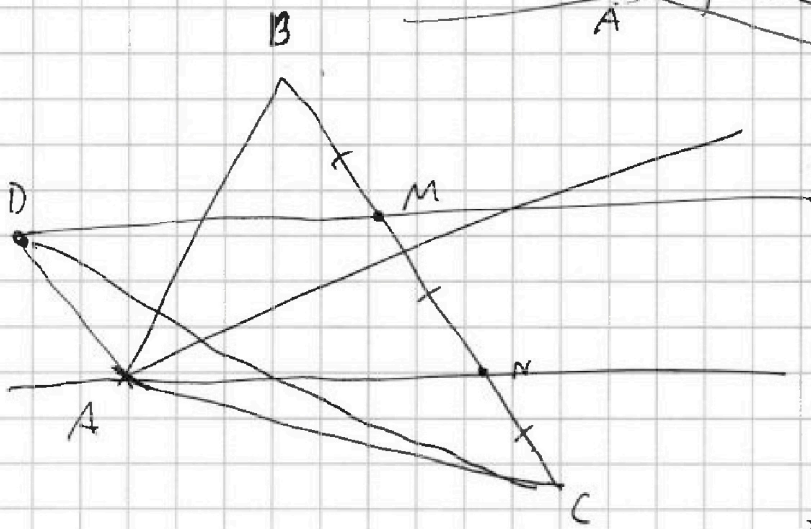
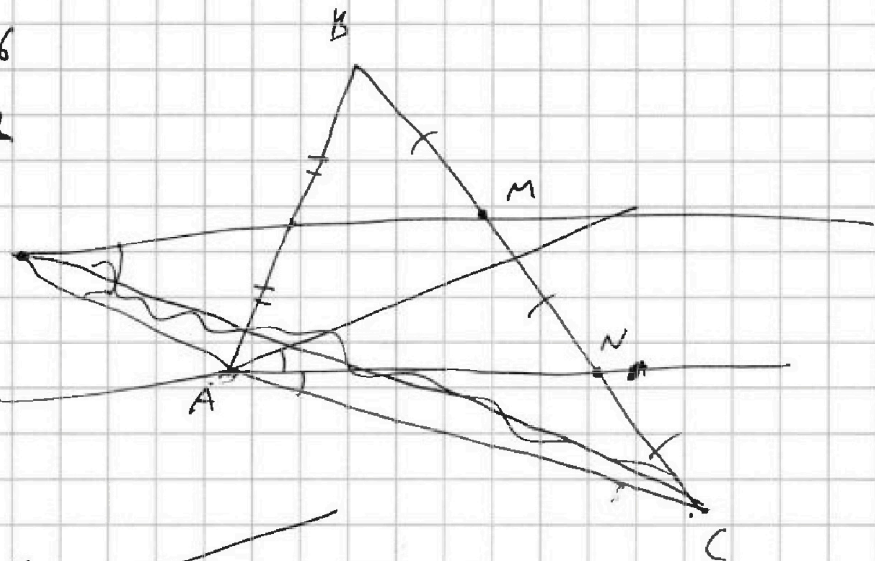
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b = 16$$

$$a - b = 12$$

$$a = 14$$

$$b = 2$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \quad 0^{11} \quad 0^{10} \quad 0^9$$

$$0^8 \quad 0^7 \quad 0^6 \quad 0^5$$

$$0^4 \quad 0^3 \quad 0^2 \quad 0^1$$

$$(C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 \cdot 4) \quad \text{МММ}$$

$$4 \cdot C_{11}^2 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 4$$

