



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

ОдЗ: ①  $\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$



②  $(15x+6)(x-3) \geq 0 \Rightarrow$



$x \in (-\infty, -\frac{2}{5}] \cup (3, +\infty)$

Т.е.:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3 & (1) \\ x+4 = b_1 \cdot q^9 & (2) \\ \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^6 & (3) \end{cases}$$

цел.  $b_1$  -  
1-ый член геом. прогрессии.  
 $q$  - "шаг" геом. прогрессии.

(3) : (1)  $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{15x+6}} = q^3$$

$\sqrt{(x-3)^4} = q^8$ ;  $(x-3)^2 = q^8$ ,  $q^4 = |x-3|$   
 $q^4 \geq 0$  (всегда)  
 $x \neq 3$ ,  $x \neq 0$

сооб.

$q^4 = |x-3|$

(3) : (2):  $\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = q^2$

$\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2} = |x-3|$

т.е.:

①  $x-3 \geq 0$ , т.е.  $(x-3) \left( \frac{15x+6}{(x+4)^2} - 1 \right) = 0$

$x \neq 3$  (из ОдЗ); если  $x = -4$ , то,  $b_1 \cdot q^9 = 0$   
исключаемо

т.е.:

$15x+6 = x^2 + 8x + 16$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$

$x=2$ ;  $x=5$ ; при  $x > 3$ , то

$x=5$

(иначе  $x = -4$  и, очевидно,  
 $x = -\frac{2}{5}$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а)  $x-3 < 0$   
 $x < 3 \Rightarrow (x-3) \left( \frac{15x+6}{(x+9)^2} + 1 \right) = 0$

$x \neq 3$   
 $15x+6 + x^2 + 8x + 16 = 0$

$x^2 + 23x + 22 = 0$

$(x+22)(x+1) = 0$

корни:  $\begin{cases} x = -1 \\ x = -22 \end{cases}$

приведем по мн.  $x^1$

если  $x=5$ :  $b_4 = \frac{9}{2\sqrt{2}}$  (✓)

$b_{10} = 9$

$b_{12} = 9\sqrt{2}$

если  $x=-1$ :  $b_4 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$  (✓)

$b_{10} = 3$

$b_{12} = 3\sqrt{2}$

если  $x=-22$ , то:  $b_4 > 0$

$b_{10} < 0$

$b_{12} > 0$

заметьте, что раз  $b_4, b_{10}, b_{12}$  имеют или "четных" или "нечетных" (т.е. 4-ый или 10-ый или 12-ый член), то они должны быть один знака

корни  $x \neq -22$   
Ответ:  $-1, 5$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

рассмотрим второе выражение:

$$\begin{aligned} \sqrt{225-z^2} &\geq 0 \text{ или } \text{т.к. } \sqrt{\dots} \geq 0 \\ 225-z^2 &\geq 0, \quad z^2 \leq 225. \quad \text{т.к.} \\ \text{т.к. } z &\text{ значение: } \sqrt{225-z^2} \leq 15 \end{aligned}$$

состав:

$$\textcircled{1} \rightarrow \begin{cases} \text{выполняется} \\ \text{и выполнено} \end{cases} \quad 0 \leq |y-20| + 2|y-35| \leq 15$$

$y=20, y=35:$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ |y-20| \quad - \quad + \quad + \\ |y-35| \quad 20 \quad 35 \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array}$$

$\textcircled{1} \quad y \leq 20, \text{ тогда: } -y+20 - 2y+70 \leq 15$   
 $3y \geq 75; \quad y \geq 25 \text{ (не подходит)}$

$\textcircled{2} \quad 20 \leq y \leq 35: \quad y-20 - 2y+70 \leq 15$   
 $50-y \leq 15$   
 $y \geq 35 \rightarrow \text{только если } y=35$

$\textcircled{3} \quad y \geq 35: \quad y-20 + 2y-70 \leq 15$   
 $3y-90 \leq 15$   
 $3y \leq 105; \quad y \leq 35 \Rightarrow \text{только при } y=35$

состав,  $y=35$ , тогда:  $|35-20| + 2|35-35| = \sqrt{225-z^2}$   
 $15 = \sqrt{225-z^2}, \quad \text{состав, } z=0$

получаем  $z$  и  $y$  в оба: в первое выражение:  $(0,0): \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}; \quad 2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}$$

пусть  $\sqrt{x+7} = t, \quad \sqrt{5-x} = p;$   
 $(t-p+6 = 2tp)$   
 $(x+7)(5-x) = 5x-x^2+35-7x = -x^2+2x+35$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ищоб: возведем в квадрат  $\rightarrow$  получим уравнение  $x$ .

$$(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 = (2(\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}) - 3)^2$$

$$x+7 + 5-x - 2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x} = 4((x+7)(5-x) - 6\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}) + 9$$

пусть  $\sqrt{x+7}\sqrt{5-x} = t$  ( $t \geq 0$ )

$$12 - 2t = 4(t^2 - 6t + 9)$$

$$6 - t = 2t^2 - 12t + 18$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 8 \cdot 12 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{4}, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

ищоб:  $\sqrt{x+7}\sqrt{5-x} = 4$   
 $-x^2 - 2x + 35 = 16$

$$x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D_1 = 1 + 76 = 77$$

$$\textcircled{V} \quad -1 - \sqrt{77} < -7$$

$$-1 + \sqrt{77} < 5$$

$$\sqrt{77} < 6$$

$$20 < 36 \text{ (!)}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{20}$$

$\textcircled{V}$

$$\sqrt{x+7}\sqrt{5-x} = \frac{3}{2}$$

$$-x^2 - 2x + 35 = \frac{9}{4}$$

$$-4x^2 - 8x + 140 = 9$$

$$4x^2 + 8x - 131 = 0$$

или

пусть  $\frac{3}{2}, 4$

$$(\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x})^2 = (2 \cdot \frac{3}{2} - 3)^2$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3, \quad (\sqrt{5-x} + \sqrt{x+7} = 3.) \textcircled{V}$$

$$-x^2 - 2x + 35 = \frac{9}{4}$$

$$-4x^2 - 8x + 140 = 9$$

$$4x^2 + 8x - 131 = 0$$

$$D_2 = 16 + 4 \cdot 131 = 4(4 + 131) = 4 \cdot 135$$

$$-4 \pm \frac{2\sqrt{135}}{4}$$

$$x_{1,2} =$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{135}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

привести:

$$-1 - \frac{\sqrt{35}}{2} > -7$$

$$-\frac{\sqrt{35}}{2} > -6$$

$$-\sqrt{35} > -12$$

$$\sqrt{35} < 12$$

$$135 < 144 \quad \text{①}$$

$$-1 + \frac{\sqrt{35}}{2} < 5$$

$$\frac{\sqrt{35}}{2} < 6$$

$$\sqrt{35} < 12 \quad \text{②}$$

Ответ:

$z=0; y=35;$

$$\begin{cases} X_2 = -1 \pm \frac{\sqrt{35}}{2} \\ X = -1 \pm \sqrt{35} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p; \quad \leftarrow \text{уравнение имеет две или одну решение}$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x = \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2 \sin x \cos x = \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2(1 - \cos^2 x) \cos x$$

пусть  $\cos x = t; \quad (t \in [-1; 1])$

$$\cos 3x = t(2t^2 - 1) - 2(t - t^3) = 2t^3 - t - 2t + 2t^3 = 4t^3 - 3t$$

$$3 \cos 2x = 6t^2 - 3; \quad 6 \cos x = 6t, \text{ тогда}$$

$$4t^3 - 3t + 6t - 6t^2 + 3 = p; \quad p = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$

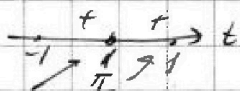
$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3; \quad f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$$

$$f'(t) = 3(4t^2 - 4t + 1)$$

$$f'(t) = 3(2t - 1)^2$$

замечаем, что  $f'(t) \geq 0$  (всегда), тогда

$f(t)$  всегда возрастает



минимум:  $f(t) (\min) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10 \quad p \in [-10; 4]$

$f(t) (\max) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$

т.е.  $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = -10$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 13 = 0; \quad -1 \quad \begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 13 \\ 4 & -10 & 13 & 0 \end{array}$$

$$t = -1; \quad \cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4t^2 - 10t + 13 = 0; \quad D = 25 - 52 < 0$$

и тогда  $4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 4$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t - 1 = 0; \quad \textcircled{1} \begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$t = 1; \quad \cos x = 1; \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4t^2 - 2t + 1 = 0; \quad D < 0$$

т.е.  $\cos x = p; \quad x = \pm \arccos p + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \leftarrow \text{если } p > 0$

$$\rightarrow x = \pm(\pi - \arccos p) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \leftarrow p < 0$$

Ответ:  $p \in [-10; 4];$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

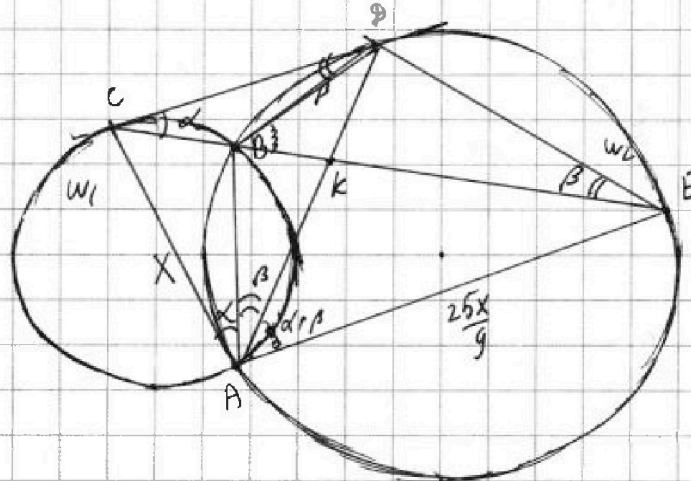
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

- Окр.  $W_1$  и  $W_2$
- $W_1 \cap W_2 = T, A \in T, B \in T$
- касат.  $CD \Rightarrow T, C \in W_1, D \in W_2$
- $T, B$  симм. к  $CD$
- $CB \cap W_2 = T, B_1 \in T, E \in W_2$
- $AD \cap CE = T, K \in T$
- $\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$

$\frac{ED}{CD} = ?$

Решение:



Пусть  $\angle DCE = \alpha$ , так как  $CD$  - касат., то по свойству между хордой и касат.  $\angle CAB = \angle DCE = \alpha$

Пусть  $\angle COB = \beta$ , то так как  $OB$  - хорда касат. и хорды:  $\angle DEB = \beta$

$BDEA$  - впис. в окр. четырехуг. Тогда:

$\angle BED = \angle BAD = \beta$  (опр или  $\sphericalangle BDA$ );

$\angle DBE = 180^\circ - \angle DBC$  (вписанная);  $\sphericalangle ODB = \angle OBC = \alpha$   
 $\angle DBE = \angle DAE = \alpha$  (опр или  $\sphericalangle DE$ )  $\sphericalangle ODB = \angle OAE = \alpha$

$AK$  - осн. в  $\triangle CAE$ ;  $\sphericalangle ODB = \angle OAE = \alpha$

$\frac{AC}{CK} = \frac{AE}{KE}$ ,  $\frac{AC}{AE} = \frac{9}{25}$   $\angle BOA = \angle BEA$  (опр или  $\sphericalangle BA$ )  
 Пусть  $AC = x$ ,  $AE = \frac{25x}{9}$

$\sphericalangle ODB = \angle OAE = \alpha$ ;  $\triangle CAO \sim \triangle OAE$ ;  $\frac{AC}{AO} = \frac{AO}{AE} = \frac{CO}{OE}$

$AO^2 = AC \cdot AE \Rightarrow AO^2 = x \cdot \frac{25x}{9}$ ,  $AO = \frac{5x}{3}$

Пусть  $\frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AO}$ ,  $\frac{CO}{DE} = \frac{x/3}{5x}$ ,  $\frac{EO}{CO} = \frac{5}{3}$

Ответ:  $\frac{5}{3}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \cdot 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{ простое;} \\ a+b = 820 \end{cases}$$

$p \neq 1$  (если  $a \neq b$ )

пусть  $p$  - простое, то:  
 $a, (a, b, c) \in \mathbb{Z}(\text{по уму}), \text{ то:}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

т.е.  $b > a$ ,  
никогда

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases}$$

$a = b$   $\textcircled{X}$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

↓  
возможно

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-b = (p-1)(p+1)$$

пусть  $a-b \cdot 3$ , то:  $(p-1)(p+1) \cdot 3$

если  $p = 3k$ , то:  $(3k-1)(3k+1) \cdot 3$

если  $p = 3k+1$ , то:  $(3k+1)(3k+2) \cdot 3$

$3k(3k+1) \cdot 3 \rightarrow$  не подходит

если  $p = 3k+2$ , то:  $(3k+1)3(k+1) \cdot 3 \rightarrow$  не ф.

сумма

$p \cdot 3$ . Пусть  $a$  - одно простое  $\Rightarrow p = 3$ .

$$\begin{cases} a-b = 8 \\ a+b = 820 \end{cases}$$

$$b^2 + a - a + b = 820 - 8$$

$$b^2 + b = 812$$

$$b^2 + b - 812 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249 = 57^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 57}{2}$$

$$b_1 = 28; a_1 = 36$$

$$b_2 = -25; a_2 = -21$$

1) если

$$b = 28$$

$$a = 36$$

$$c = b-1 = 27$$

2) если

$$b = -25$$

$$a = -21$$

$$c = -30$$

$b > a(x)$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

т.е.

$$a-c - b+c = p^2 - 1 \quad (a-b) = p^2 - 1 \rightarrow \text{те же рассуждения}$$

т.е.

$$p = 3; \begin{cases} b-c = -9 \\ a-c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b = 8 \\ a+b = 820 \end{cases} \Rightarrow \text{те же рассуждения}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т-с

$$\begin{aligned} b_1 &= 28, & a_1 &= 36 \\ b_2 &= -29, & a_2 &= -21 \end{aligned}$$

точки:

$$\begin{aligned} a_1 &= 36, & b_1 &= 28, & c_1 &= a_1 + b_1 = 37 \\ a_2 &= -21, & b_2 &= -29, & c_2 &= -20. \end{aligned}$$

↓ возможные точки  $(a, b, c)$ :

Ответ:

$$\begin{aligned} (36, 28, 37); & (-21, 29, -30) \\ (36, 28, 37); & (-21, -29, -20) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

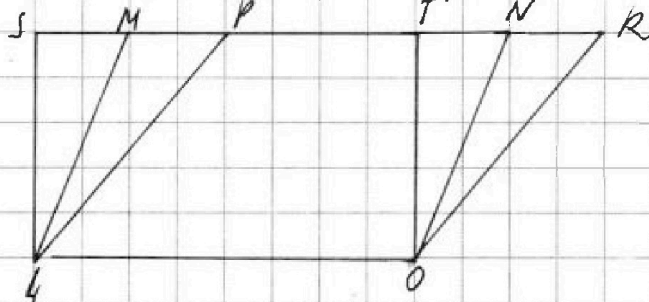
Дано:  
 Призма  $ABC A_1 B_1 C_1$   
 $\triangle ABC$  - равностор.  
 $AB = BC = AC = 2$   
 $S_{AA_1 C_1 C} = 4$   
 $S_{AA_1 B_1 B} = 5$   
 $S_{CC_1 B_1 B} = 5$   
 $h = ?$

Решение:

Если от призм отнимем пирамиды,

$AA_1 C_1 C : AA_1 B_1 B : CC_1 B_1 B$  - пирамиды.  
 Объем, пирамиды и пирамиды отнимем от равных

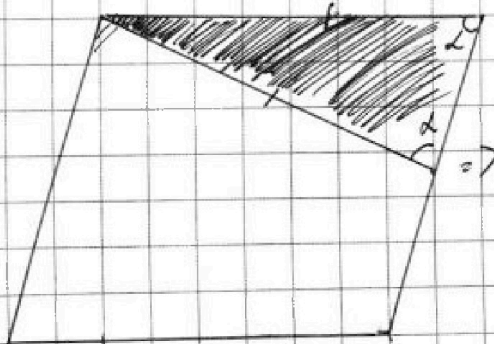
параллелограмм и параллелограмм:



Пирамиды с тем же основанием  $LSPO$  имеют равные объемы.  
 Паралл.  $LMNO$  и  $LPPO$  - образованы от равных  $S_{LSPO}$ , следовательно  $S_{LMNO} = S_{LPPO} = TO \cdot LO$ .  
 Поэтому, если от  $AA_1 C_1 C$ ,  $AA_1 B_1 B$  и  $CC_1 B_1 B$  отнимем пирамиды ~~образованные~~ параллелограмм, то  $S_{AA_1 C_1 C} = S_{AA_1 B_1 B} = S_{CC_1 B_1 B}$ .  
 Т.е.  $ABC$  не паралл.  $A_1 B_1 C_1$ .

Поэтому, призма - наклонная,  $ABC \parallel A_1 B_1 C_1$ ,  
 пирамиды отнимем, что  $\triangle ABC$  - равностор.  
 решение:

угол  $\alpha$  от призм, где  $ABC \parallel A_1 B_1 C_1$ , с тем же объемом  
 (попарно на одну из граней)



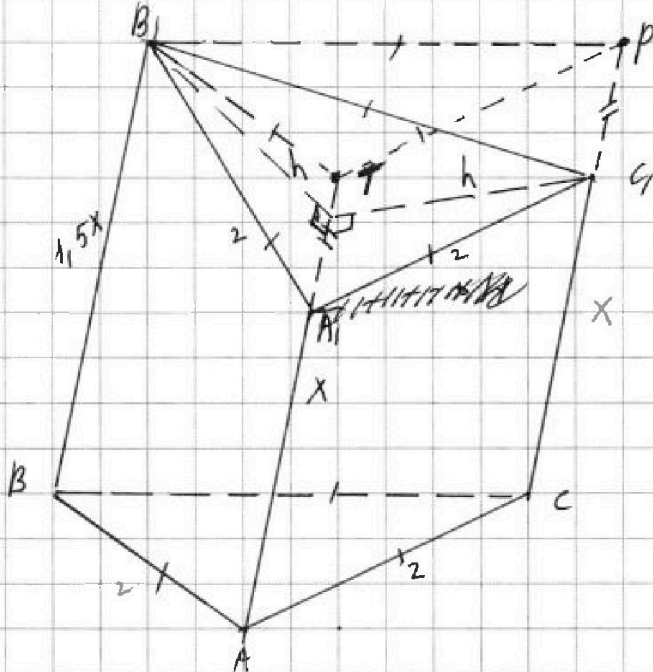


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

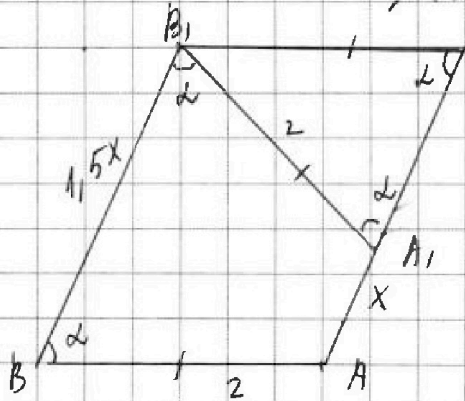
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



← симметрично.

т.е;  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  — проекции равновелики  
( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ;  $AA_1 = AB = BB_1 = BC$ )

а  $AA_1C_1C$  — паралл. ( $AA_1 \parallel CC_1$ ;  $AA_1 = CC_1$ )



$$S_{AA_1C_1C} = h \cdot AA_1$$

$$S_{AA_1B_1C_1} = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot h$$

$$\frac{2AA_1}{AA_1 + BB_1} = \frac{4}{5}$$

$$10AA_1 = 4AA_1 + 4BB_1$$

$$6AA_1 = 4BB_1 \quad \text{пусть } AA_1 = x$$

$$BB_1 = 1,5x$$

~~1,5x AA1 = 4BB1~~ ~~BB1 = 1,5x~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

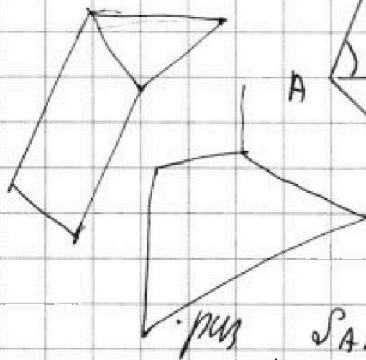
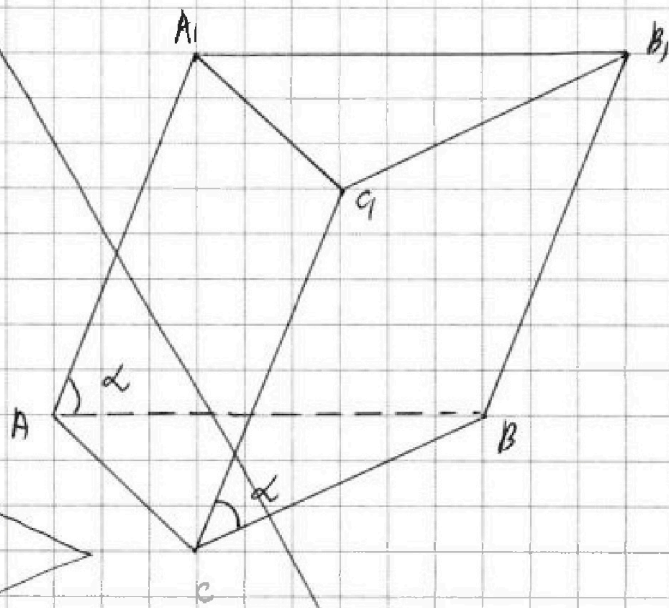
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

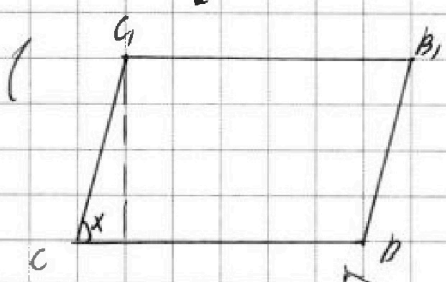
Дано:  
 Призма  $ABC A_1 B_1 C_1$   
 $\Delta ABC$  -  $\triangle$  равнобедренный  
 $S_{AA_1 C_1 C} = 4$   
 $S_{AA_1 B_1 B} = 5$   
 $S_{CC_1 B_1 B} = 5$   
 $h = ?$

Решение:  
 Если, что призма наклонная  
 (тогда площади боковых граней равны)  
 да равны.

Если  
 описанная  
 призма  
 пирамида ели



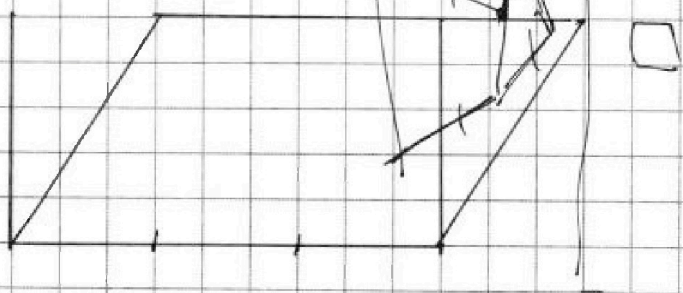
$S_{AA_1 B_1 B} = S_{CC_1 B_1 B}$ ,  $\angle A_1 A B = \angle C_1 C B = \alpha$



Все боковые стороны - параллельны  
 пусть угол  $\angle C_1 C B = \alpha$ , тогда:  
 $S_{пар.} = h \cdot BC = \sin \alpha \cdot CC_1 \cdot BC$

$BC = AB = AC$ ,  $CC_1 = BB_1 = AA_1$

если описанная параллельно



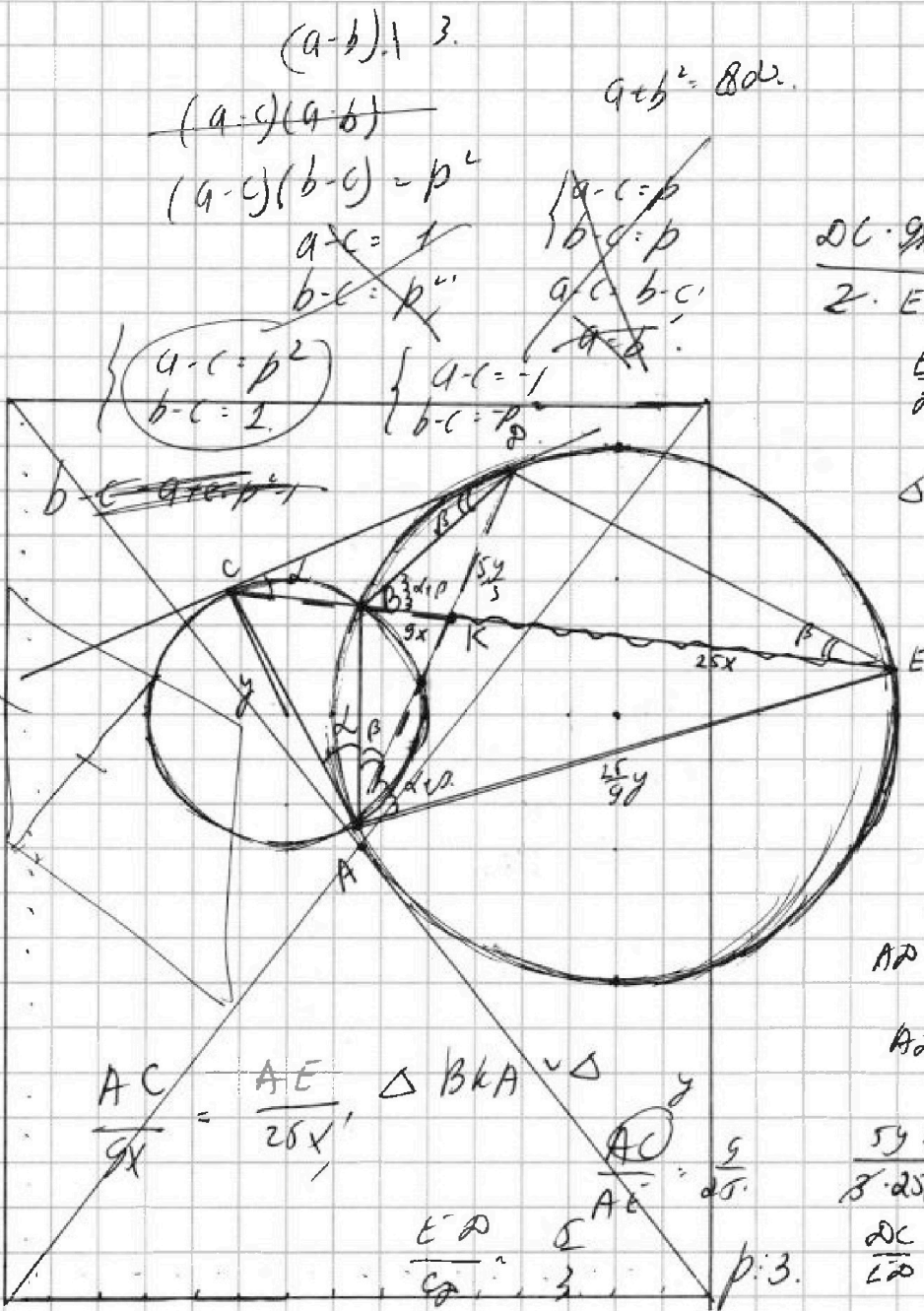


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$(a-b) \cdot 3$$

$$(a-c)(a-b)$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a-c = 1$$

$$b-c = p^2$$

$$a+b^2 = 800$$

$$x = \frac{-6}{15} = \frac{-2y}{5x}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$$

$$\frac{DC \cdot 9x \sin \alpha}{2 \cdot ED \cdot 25x \sin \alpha} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{ED}{DC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\triangle ADC \sim \triangle AED$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DC}{ED} = \frac{AC}{AD}$$

$$AD^2 = AE \cdot AC$$

$$AD^2 = y \cdot \frac{25y}{9}$$

$$AD = \frac{5y}{3}$$

$$\frac{AC}{9x} = \frac{AE}{25x}$$

$$\triangle BKA \sim \triangle$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{5}{25}$$

$$\frac{5y \cdot 5}{3 \cdot 25y} = \frac{DC}{ED} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{DC}{ED} = \frac{30}{5}$$

$$a-x-b+c = p^2 - 1$$

$$a-b = p^2 - 1, \quad a-b = (p-1)(p+1)$$

3  
2-9  
p:3

$$b^2 + b = 801 - p^2$$

$$b(b+1) = 801 - p^2$$

$$\begin{cases} a-b = p^2 - 1 \\ a+b = 800 \end{cases}$$

$$b^2 + b = 801 - p^2$$

$$p-1 = 1$$

$$p+1 = 2$$

$$p = 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y = 35$   
 $t = 2 = 0$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} =$   
 $= a \sqrt{35 - 2x - x^2}$   
 $5 - x =$

$x+7 + 5 = x -$   
 $-2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}$

$12 - 2\sqrt{x+7}\sqrt{5-x}$

$\Delta EDB \sim \Delta EDB$

$\frac{b}{a} = \frac{t}{z} = \frac{2t}{EP}$

$12 - 2t = 2t$

$4t^2 + 4t - 6 = 0$   
 $t = 1 + \sqrt{1 + 1.5} = 2.5$

$0 \leq 2\sqrt{25 - z^2} \leq 15$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{t}{z}$

$0 \leq |y - 20| + 2|y - 35| \leq 15$   
 $0 \leq y - 20 + 2y - 70 \leq 15$   
 $0 \leq 3y - 90 \leq 15$

$y \geq 30$

$3y \leq 105$   
 $y \leq 35$

$y = 35$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} =$   
 $= 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$   
 $\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} = 4\sqrt{x+7}$

$\Delta DCB \sim \Delta EDB$

$\frac{a}{b} = \frac{t}{z} = \frac{2t}{EP}$

$12 - 2t = 2t$

$4t^2 + 4t - 6 = 0$

$t = 1 + \sqrt{1 + 1.5} = 2.5$

$0 \leq y - 20 + 2|y - 35| \leq 15$

$0 \leq y - 20 + 2y - 70 \leq 15$

$0 \leq 3y - 90 \leq 15$

$y \geq 30$

$3y \leq 105$

$y \leq 35$

$y = 35$

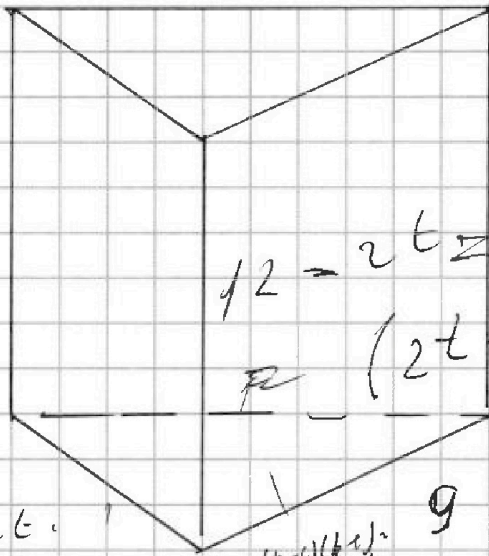


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$3 + 5 = 8$$

$$3 + 5 + 5 = 13 \neq 4 \cdot 4$$

$$30 + 28 = 58$$

$$a > b$$

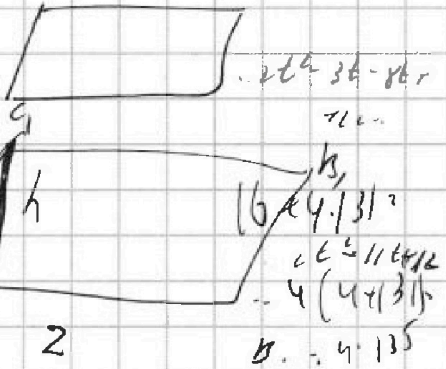
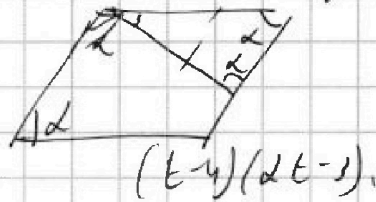
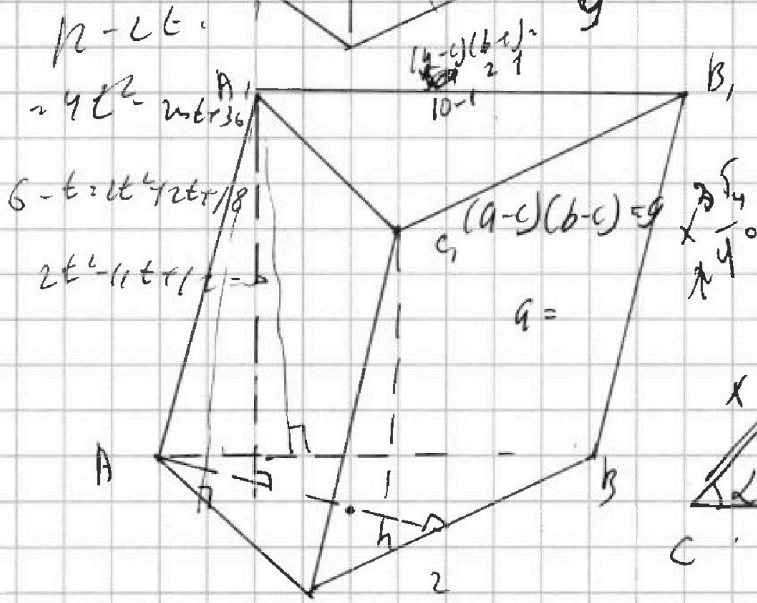
$$(a-b) \cdot 3$$

$$(a-c)(b-c) = p$$

$$ab - ac - cb + c^2 = p$$

$$ab - c(a+b) = p - c^2$$

$$ab - c(a+b) = (a-c)(b-c) - c^2$$



1)  $a-b = 3k+1$

2)  $a-b = 3k+2$

$a = 3k+1+b$

$(a-c)(b-c) = p$

$3k+1+b+c = 820$

$ab - c(a+b) + c^2 = p$

$(3k+1+b)c - c(3k+1+b) + c^2 = p$

$(820-b-c)(b-c) = p$

$820b - 820c - b^2 + b^2c - bc + c^2 = p$

$\sin \alpha = \frac{h}{x}$

$\sin \alpha \cdot x - 2 = 5$

$x^2 + 2x - 19 = 0$

$12 - 2 \cdot 15 - 3(15+1) = 9$

$3 = \sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$

$\frac{3}{2}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$225 - t^2 \geq 0$$

$$t \in [-15, 15]$$

$$x \geq -7$$

$$y - 2x + z \geq 0$$

$$y - 2x - x^2 + z \geq 0$$

$$y + z \geq x^2 + 2x$$

$$5 - x - 3z \geq 0$$

$$5 \geq x + 3z$$

$$t \in [-15, 15]$$

$$y + z \geq (x+1)^2$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$f(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t-1)^2 \geq 0$$

$$f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$

$$-y + 2x - 2x^2 + z = \sqrt{225 - t^2}$$

$$-5y + 5z = \sqrt{225 - t^2} \quad 4t^3 - 3t + 6t = 6t^2 - 3t + p$$

$$\sqrt{225 - t^2} = 50 - 5y$$

$$-4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos x \cos^2 x$$

$$3(2 \cos^2 x - 1) = 3(2t^2 - 1)$$

$$f(x) = (\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos x)$$

$$f(x) = -\sin 3x - 6 \sin x + 3 \cdot 2 \sin x$$

$$= 6 \sin x - 6 \sin x - 3 \sin 3x$$

$$2 \cos$$

$$= 3(2 \sin^2 x - 2 \sin x - \sin 3x)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

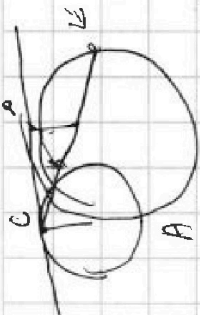
$$= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-b = p^2 - 1 \end{cases}$$

$$a-b = (p-1)(p+1) \Rightarrow p:3, a-b:3$$

$$(a:3) (c:5)$$

$$\begin{array}{r} 274 \\ \times 3 \\ \hline 822 \\ 819 \\ \hline 821 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1096 \\ \times 3 \\ \hline 3288 \\ 3288 \\ \hline 3288 \end{array}$$

$$a = 3k, b = 3k-1, p = 3l$$

$$3k + 9k^2 - 12k + 4 = 820$$

$$\begin{array}{r} 819 \\ \times 3 \\ \hline 2457 \\ 2457 \\ \hline 2457 \end{array}$$

$$9k^2 - 3k + 1 = 820$$

$$(k:5)$$

$$9k^2 - 3k - 819 = 0$$

$$3k^2 - k - 273 = 0$$

$$D = 1 + 273 \cdot 3 \cdot 4 = 3772$$

$$a = 3k-1; b = 3k-2$$

$$\begin{array}{r} 5230 \\ 16295 \\ 49885 \end{array}$$

$$3k-1 + 9k^2 - 12k + 4 = 820$$

$$9k^2 - 9k - 817 = 0$$

$$D = 9^2 + 4 \cdot 9 \cdot 817 = 5 \cdot 618 \cdot 4 = 5(9+4 \cdot 817)$$

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b = p^2 - 1 \\ a+b = 820 \end{cases}$$

$$(a:2) (c:3)$$

$$b-1=1, b=2$$

$$\begin{array}{r} 822 \cdot 3 \\ \times 3 \\ \hline 2466 \\ 2466 \\ \hline 2466 \end{array}$$

$$3k-2 + 9k^2 = 820$$

$$9k^2 + 3k - 822 = 0$$

$$3k^2 + k - 274 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 274 = 1285$$

$$2 \sqrt{y - (x+1)^2 + 271}$$

$$y - 2x^2 - 2x - 1 = 271$$

$$\begin{array}{r} 820 \\ \times 3 \\ \hline 2460 \\ 2460 \\ \hline 2460 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(a-c)(b-c) = p^2$   
 $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$

$a - b = p^2$   
 $a - b = (p-1)(p+1)$   
 $a - b = 8$

$a = 8 + b$   
 $8 + b + b = 8200$   
 $b^2 + b - 8120 = 0$   
 $D = 1 + 8120 \cdot 4 = 3249 = 57^2$   
 $b_{1,2} = \frac{-1 \pm 57}{2} = \begin{cases} 28 \\ -29 \end{cases}$   
 $b = 28$   
 $a = 36$   
 $c = 27$

$x + 7 + 5 - x - 3z = 12 - 3z$   
 $2\sqrt{y - 2x - x^2 + z} = (1 + \sqrt{y - 2x - x^2 + z})^2 - 1 - y + 2x + x^2 + z$   
 $2\sqrt{t} = (t+1)^2 - t - 1 = t^2 + 2t$   
 $t = 2\sqrt{t+1}$   
 $t = t+1$

$x + 7 + 5 - x - 3z = 12 - 3z$   
 $12 - 3z = 12 - 3z$

$2\sqrt{y - 2x - x^2 + z} = (1 + \sqrt{y - 2x - x^2 + z})^2 - 1 - y + 2x + x^2 + z$   
 $2\sqrt{t} = (t+1)^2 - t - 1 = t^2 + 2t$   
 $t = 2\sqrt{t+1}$   
 $t = t+1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

$b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^2}}$      $90 - 3y \in 15$   
 $b_1 \cdot q^3 = x+y$      $y+1$      $\frac{90}{75}$   
 $y-20 - 2y + 20 =$   
 $-20 - y.$

$b_1 \cdot q^4 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$   
 $q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+y} = \frac{x^2}{96} - \frac{12}{25} = \frac{25}{121}$      $\frac{81}{23}$

$\frac{15x+6}{(x+y)^2} = q^4$      $\frac{(15x+6)^2(x-3)^2}{(x+y)^4} = \frac{15 \cdot 5}{81}$   
 $\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+y)^2} = \frac{15}{9}$      $\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+y)^2} = \frac{15}{9}$   
 $\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+y)^2} = \frac{15}{9}$      $\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+y)^2} = \frac{15}{9}$

$(x-3) \left( \frac{15x+6}{(x+y)^2} - 1 \right) = 0$      $(x+y)^2 = x^2 + 8x + 16$   
 $15x+6 = x^2 + 8x + 16$      $q^4 = -15 \cdot 6 =$   
 $x^2 - 7x + 10 = 0$      $q^3 = 4$   
 $(x-5)(x-2) = 0$      $q^2 = 2$   
 $x^2 - 2x + 5x + 10 = 0$      $x^2 = 4$      $x = 2$

$t - p + 6 = 2tp$      $\frac{35}{19}$   
 $x^2 + 2x + 16 - 35 = 0$   
 $x^2 + 2x - 19 = 0$

$15 - x + x + 7$   
 $12 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 5$      $x - 3 < 0$

$\frac{11}{2}, 1 - 5, 5 = 4, 5$      $(x-3)$   
 $15x+6 = -x^2 - 8x - 16$   
 $x^2 + 23x + 22 = 0$   
 $(x+1)(x+22) = 0$      $x = -22$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$3 + 4 + 5 + 5 = 4 + 4 + 5 =$   
 $20 + 8 + 3 = 31$

$b_4 = b_1 \cdot q^3; \quad b_{10} = b_1 \cdot q^9$   
 $b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$

$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x \Leftrightarrow$   
 $\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$   
 $= \cos x \cdot (2 \cos^2 x - 1) - \cos x$   
 $\cos 3x = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x$

$3(2 \cos x - \cos 2x) = 3(2 \cos x - 2 \cos^2 x + 1)$

$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{a}{b^3}} = b_1 \cdot q^3$

$\begin{cases} 15x+6 = a & x+4 \\ x-3 = b \end{cases}$   
 $15x - x + 6 + 3 = 14x + 9$   
 $15x + 6 - 14x + 3/4 =$   
 $= x$

$b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$   
 $b_1 \cdot q^5 = x+4$   
 $b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$   
 $-15x + 45 = 15(x-3)$   
 $15x - 45 = 15(x-3)$   
 $15x - 45 + 45 + 6 = 51 + 15x - 45$   
 $\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0 \Rightarrow (15x+6)(x-3) \geq 0$   
 $x = \frac{-6}{15} = -\frac{2}{5}$

$\sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$   
 $x \in [-\frac{2}{5}, \frac{1}{3}] \cup (3, +\infty)$   
 $g^8 = \sqrt[8]{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{(x-3)^3}$   
 $g^1 = (x-3)^2$   
 $g = (x-3)^{\frac{2}{3}} \cdot (x-3)^{\frac{1}{3}}$