



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



† 1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

† 3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.

† 4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

† 6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $-2; -2 - \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}$

Пусть d - это разность арифметической прогрессии.

Тогда $(2-2x+2d) = (x^2+4x)^2, (x^2+4x)^2 + 4d = -6x^2$

$\Rightarrow 2d = (x^2+4x)^2 + 12x - 12 \Rightarrow 4d = 2(x^2+4x)^2 +$

$+ 24x - 24 \Rightarrow 3(x^2+4x)^2 + 24x - 24 = -6x^2$

$\Rightarrow (x^2+4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow (x^2+4x)^2 + 2(x^2+4x) - 8 = 0$

$-8 = 0$. Пусть $t = x^2+4x$. Тогда $t^2 + 2t - 8 = 0$

$\Rightarrow (t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2$ или $t = -4$

$t = 2$

$t = -4$

$x^2+4x = 2$

$x^2+4x = -4$

$x^2+4x-2 = 0$

$x^2+4x+4 = 0$

$D = 16 + 8 = 24$

$(x+2)^2 = 0$

$x = -2$

$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{2} = -2 + \sqrt{6}$

$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{6}}{2} = -2 - \sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $-25 - \frac{1}{3}$

$$1) \begin{cases} 0 \leq 2x - 3y \leq 6 \\ 0 \leq 3x + 2y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x - y \leq 2$$

$$\begin{aligned} 0 \leq (2x - 3y)^2 \leq 36 &\Rightarrow -16 \leq 4x^2 - 12xy + 9y^2 + \\ -16 \leq (3x - 2y)^2 \leq 0 &\Rightarrow 9x^2 + 12xy - 4y^2 \leq 36 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -16 \leq -5x^2 + 5y^2 \leq 36(1) \Rightarrow \frac{16}{5} \geq (x-y)(x+y) \geq \frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow x+y \geq -\frac{18}{5} \quad \Rightarrow 3x+2y \geq -2 + (-\frac{18}{5}) = -\frac{28}{5}$$

$$\Rightarrow 3x \geq -\frac{28}{5} \quad \Rightarrow x \geq -\frac{28}{15} \quad \Rightarrow 5x+5(x+y) \geq$$

$$2 \cdot (-\frac{28}{5}) + (-18) = -25 - \frac{1}{3}$$

(1) работает при любых x, y , удовлетворяющих условию заз

$$2) \begin{cases} 0 \leq 3y - 2x \leq 6 \\ 0 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x + y \leq 10$$

$$\begin{cases} 0 \leq 3y - 2x \leq 6 \\ -4 \leq 2y - 3x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq 5y - 5x \leq 6$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5y^2 \leq (x-y)(x+y)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

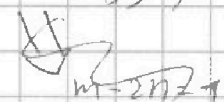
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: (10; 3)

Пусть $A = 17p^2 = (m-2n)(m-2n+13)$, $B = 15q^2 =$

$= mn(m-2n-2)$

$m-2n-2 > 0 \Rightarrow m-2n > 2$



- (1) $\times m-2n=1$ $m-2n+13=17p^2$
- (2) $\times m-2n=17$ $m-2n+13=p^2$
- (4) $\times m-2n=p$ $m-2n+13=17p$
- (5) $\times m-2n=17p$ $m-2n+13=p$
- (3) ~~$\times m-2n=p^2$~~ $m-2n+13=17$
- (1) $\times m-2n=17p^2$ $m-2n+13=p$

если \uparrow \times пара (m, n) или нет (x)

(1) $m-2n$ и $m-2n+13$ не могут равняться 1,

т.к. $m-2n > 2$. (2) Пусть $m-2n=17 \Rightarrow m=2n+17$

$\Rightarrow (2n+17)n \cdot 15 = 15q^2 \Rightarrow (2n+17)n = q^2$

т.к. $2n+17 > n$, то $n=1$ или $n=d$

\Downarrow
 $15=q^2$ \Downarrow
 $2d+17=d$

противоречие -

Пусть (3)

$m-2n+13=17 \Rightarrow m-2n=4 \Rightarrow m=2n+4$

~~$m=2n$~~ $\Rightarrow (2n+4)n \cdot 2 = 15q^2 \Rightarrow q \vdots 2 \Rightarrow q=2$,

т.к. $\overset{d}{n}$ простое $\Rightarrow (n+2)n=15 \Rightarrow (n-3)(n+5)=0$

$\Rightarrow n=3$, т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\frac{10}{3}\right); m=10$, т.е.

(10; 3) подходит. ($A=4 \cdot 17=2^2 \cdot 17$, $B=10 \cdot 3 \cdot 2=15 \cdot 2^2$)

(4) Пусть $m-2n=p \Rightarrow p+13=17p \Rightarrow 13=16p$?!

противоречие



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(5) Пусть ~~$m = 17p$~~ $m - 2n + 13 = p \Rightarrow m - 2n = 17p$

$\Rightarrow 17p + 13 = p \Rightarrow 16p = -13$?! Противоречие

\Rightarrow если $A = 17p^2$, $B = 15q^2$, то (m, n) может быть только $(10, 3)$

Пусть $A = 15q^2$, $B = 17p^2 \Rightarrow mn(m - 2n - 2) = 17p^2$

~~или $m = 1$, то $1 - 2n - 2 = m - 2n - 2 > 0 \Rightarrow m > 2n + 2$?! 4~~

~~Пусть $m - 2n - 2 = 1$, то $m = 2n + 2$~~

Тогда либо $m = 17$, или $n \geq 17$, или $m - 2n - 2 = 17$, либо $n = 1$

и $m - 2n - 2$. Пусть $m = 17 \Rightarrow n(15 - 2n) = p^2$

$\Rightarrow n = p = 15 - 2n$, или $n = 1$, или $15 - 2n = 1$

\Downarrow
 $n = \frac{15}{3} = 5$
 \Downarrow

\Downarrow
 $13 = p^2$?!
противоречие

\Downarrow
 $n = 7$
 \Downarrow
 $7 = p^2$?!
противоречие

$A = 7 \cdot 20 \not\equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow (17, 5)$ не подходит

~~$(17, 5)$ подходит ($A = 7$)~~

Пусть $n = 17 \Rightarrow m(m - 36) = p^2 \Rightarrow m - 36 = 1$,

т.к. $m > m - 36 \Rightarrow m \geq 37 = p^2$?! противоречие

Пусть $m - 2n - 2 = 17 \Rightarrow mn = p^2 \Rightarrow n = 1$, т.к.

$m > 2n + 2 > n \Rightarrow m = 21 = p^2$?! противоречие.

Пусть $m - 2n - 2 = 1 \Rightarrow m = 2n + 3 \Rightarrow (2n + 3)n = 17p^2$
 $\Rightarrow m - 2n = 3$, $m + 2n + 13 = 16 \Rightarrow A = 3 \cdot 2^4 \not\equiv 5 \pmod{5}$ противоречие.

Пусть $n = 1 \Rightarrow m(m - 4) = 17p^2 \Rightarrow m - 4 = 1$, или $m - 4 = 17$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{или } m-4 \geq p, \text{ т.к. } m > m-4$$

$$\text{Пусть } m-4=1 \Rightarrow m=5 = 17p^2 \text{ ?! противоречие}$$

$$\text{Пусть } m-4=17 \Rightarrow m=21 \Rightarrow 17p^2=21 \text{ ?! противоречие}$$

$$\text{Пусть } m-4=p \Rightarrow m=p+4 \Rightarrow p^2+4p=17p^2 \Rightarrow$$

$$p+4=17p \Rightarrow 4=16p \text{ ?! противоречие}$$

$$\text{Пусть } m-4=p^2 \Rightarrow m=17 \Rightarrow p^2=13 \text{ ?! противоречие}$$

$$\Rightarrow A \neq 15q^2, B \neq 17p^2 \Rightarrow \text{подходит}$$

только (10, 3)



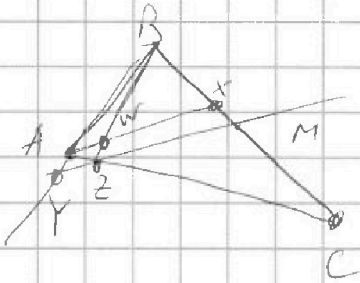
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $8\sqrt{6}$



Пусть BZ и AX пересекаются в W .

Т.к. $MZ \parallel AX$, то $\frac{BM}{MX} = \frac{CZ}{ZA}$
 $= \frac{12}{6} = 2$ и $\frac{MZ}{AX} = \frac{2}{3}$

$BX + XM = BM = MC \Rightarrow BX = XM$

Т.к. $AY \parallel MY$ и $BX : XM = 1 : 1 \Rightarrow AB : AY = 2 : 1 \Rightarrow AB = 6$

и $AX \parallel MY \Rightarrow WX : ZM = 1 : 2$, $AW : YZ = 1 : 2$

Т.к. $AB = AZ = 6$, AX - биссектриса, то AW - высота

в $\triangle ABZ \Rightarrow BW = \sqrt{AB^2 - AW^2} = \sqrt{36 - \frac{9Z^2}{4}} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$

$\frac{AY}{MZ} = \frac{3}{2}$, $\frac{WX}{MZ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AX - WX}{MZ} = 1$

$\Rightarrow \frac{AW}{MZ} = 1 \Rightarrow \frac{YZ}{2} = MZ \Rightarrow MZ = 4 \Rightarrow WX = 2$

$\Rightarrow BX = \sqrt{BW^2 + WX^2} = \sqrt{20 + 4} = \sqrt{24}$

$\Rightarrow BC = 4BX = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: ~~932~~ 512

Разобьем узлы на 4 группы по 4 узла, таких 4, что при повороте группа переходит сама в себя.

Посчитаем сколько способов перебраться ^{два} узла из одной группы. Групп 4, и одна не переходит в другую при повороте. Значит, в каждой группе ~~то~~ кол-во способов перебраться 2 узла равно 2; когда они соседние ~~или~~ ^{или} противоположные, т.к. любая пара соседних или противоположных переходит в любую другую пару этой же группы, а пара соседних в пару противоположных не может перейти. Значит, $16 \cdot 2 = 32$ способов.

Теперь посчитаем кол-во способов перебраться 2 узла из разных групп.

Выбрать 2 различные группы можно

$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ способами. Кол-во способов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



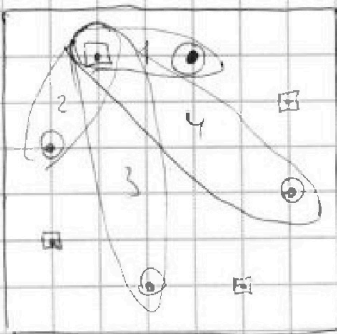
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

не перекрашивать два узла из разных выбранных групп ровно 4: соседние, противоположные, любые соседние или т.е. не соседние.

любые соседние или противоположные переходят при повороте в любые соседние или противоположные. Соседние не переходят в противоположные. Соседних и противоположных по 2 типа, которые переходят при повороте только в свой тип.



1 - соседние 1 типа.

2 - соседние 2 типа

3 - противоположные 1 типа.

4 - противоположные 2 типа.

$$\Rightarrow 120 \cdot 4 = 480 \text{ способов}$$

$$480 + 3 \cdot 2 \neq 512 \text{ способов}$$

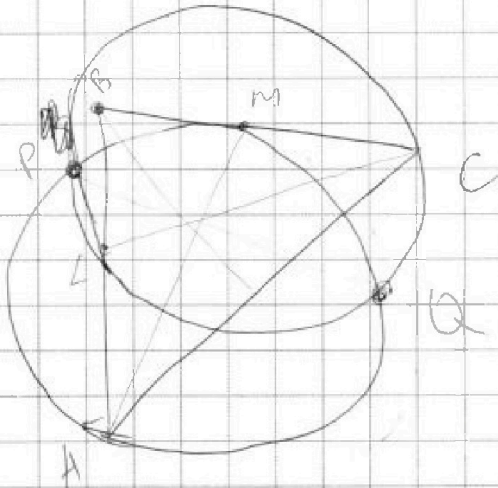


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

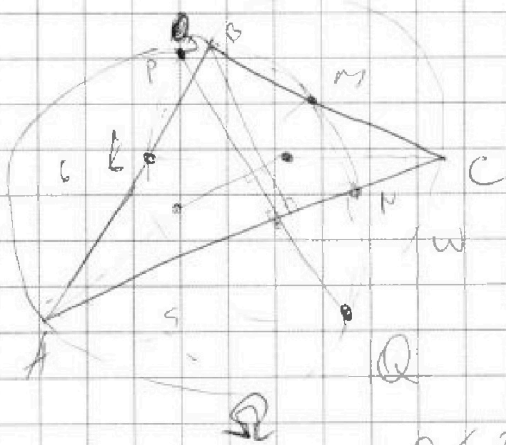
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BL}$$



$$CM^2 = MN^2 + NC^2$$

$$MN^2 = AM^2 - 25$$

$$x - y \leq 2$$

$$x \geq y - 2$$

$$0 \leq 2x + 3y \leq 6$$

$$|2x - 3y| \leq 6$$

$$|3x - 2y| \leq 4$$

$$0 \leq 3y - 2x \leq \frac{18}{5} - \frac{36}{5}$$

$$\frac{(x-y)(x+y)}{x} \geq -\frac{18}{5}$$

$$x+y \geq -\frac{18}{5}$$

$$5x+5y \geq -18$$

$$\frac{16}{5} \geq \frac{28}{5}$$

$$2x \geq 2y \geq \frac{28}{5}$$

$$x \geq \frac{28}{5}$$

$$5x \geq 28$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3 } 0 ≤ -
2

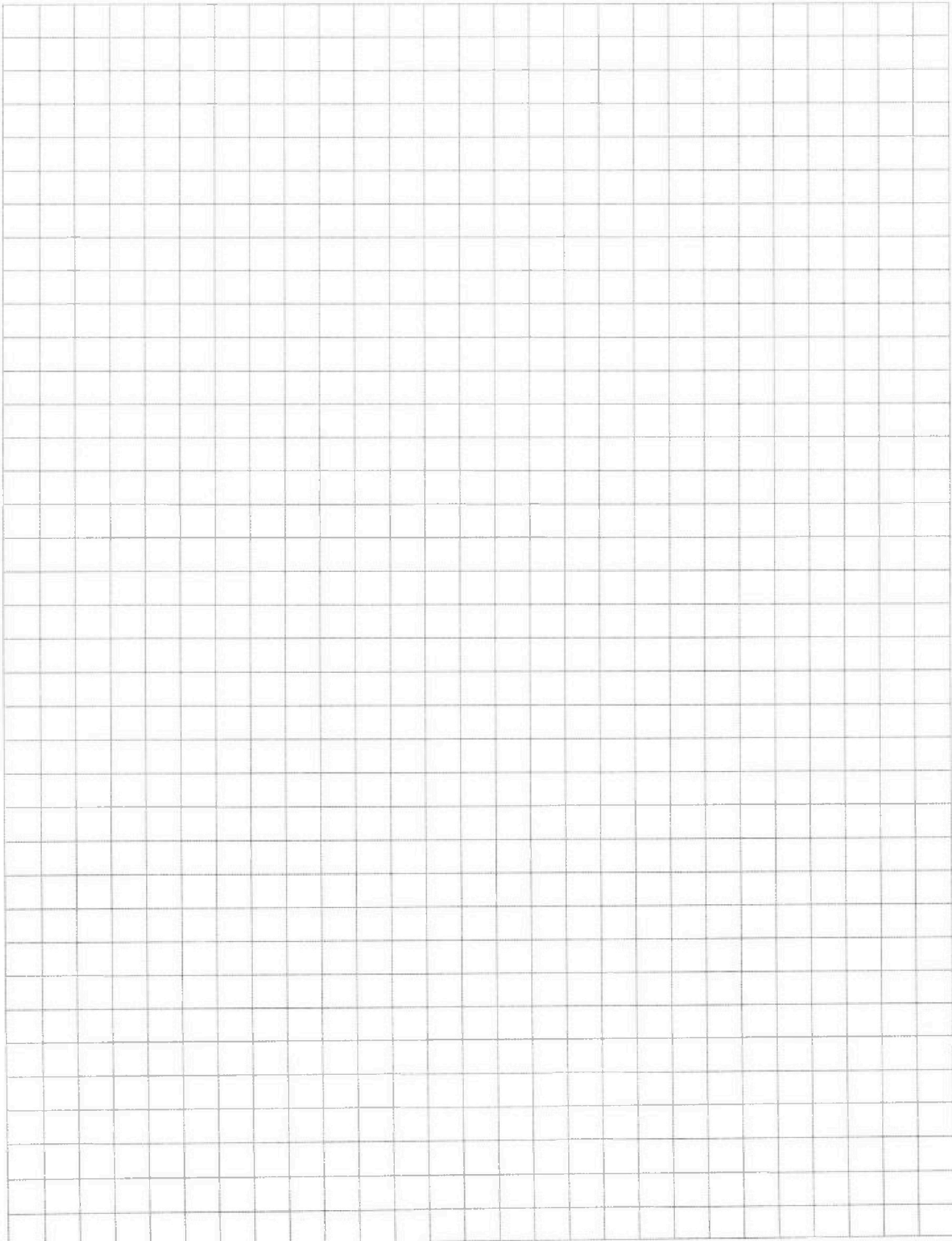


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & m=17 \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt{3y} = 2y^5 - \sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$m(17-2n+13) = p^2$$

$$n = 15 - 2n$$

$$n = 5$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = 17p^2 \quad n=1 \quad 13=p^2!$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = 15q^2 \quad n=17 \quad m(m-36) = p^2$$

$$\frac{(m-2n)(m-2n+13)}{3} = \frac{17p^2}{15q^2}$$

$$m-36 = 1 \quad m = 37 = p^2!$$

$$mn(m-2n-2) = 18q^2$$

$$(m-2)(m+11) = 17p^2$$

$$m-2n-2 > 0$$

$$m-2n > 2$$

$$(2n+17)n \cdot 15 = 15q^2$$

$$m-2n = 17$$

$$m = 2n+17$$

$$(2n+17)n = q^2$$

$$n=1 \Rightarrow 2n+17 > n$$

$$n=q \Rightarrow 19 = q^2 ?!$$

$$2q+17 = q ?!$$

$$m-2n = 1$$

$$m-2n = 17$$

$$-m-2n = p$$

$$m-2n = 17p$$

$$m-2n = p^2$$

$$m-2n = 17p^2$$

$$m-2n+13 = 17p^2$$

$$m-2n+13 = p^2$$

$$m-2n+13 = 17p$$

$$m-2n+13 = p$$

$$m-2n+13 = 17$$

$$m-2n = 1$$

$$m-2n+13 = 1$$

$$m-2n = p$$

$$(2n+p)n \cdot (p-2) = 15q^2$$

$$p-2 = 1$$

$$p = 3$$

$$(2n+3)n = 15q^2$$

$$d=3$$

$$2n^2 + 3n - 9 \cdot 15 = 0$$

$$(2n-15)(n+9) = 0$$

$$n = 7.5 ?!$$

$$m-2n = p$$

$$m-2n+13 = 17$$

$$m-2n = 4$$

$$m = 2n+4$$

$$(2n+4)n \cdot 2 = 15q^2$$

$$q=2$$

$$(n+2)n = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$(n-3)(n+5) = 0$$

$$\Rightarrow n=3, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}$$

$$(3, 5)$$

$$n=1$$

$$(2+p)(p-2) = 15q^2$$

$$p^2 - p = 15q^2$$

$$p-2 = q$$

$$p+13 = 17p$$

$$13 = 16p$$

$$?!$$



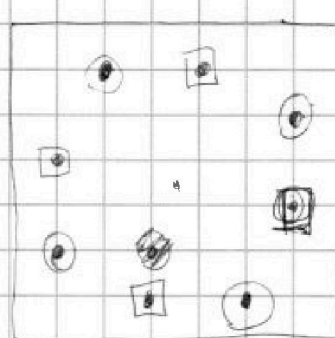
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

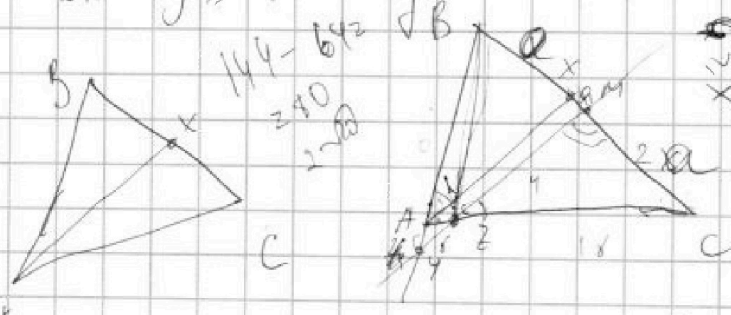
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(2x-3y)^2 \leq 36$
 $0 \leq 4x^2 - 12xy + 9y^2 \leq 36$
 $0 \leq 9x^2 - 12xy + 4y^2 \leq 16$
 $-16 \leq 9x^2 - 12xy + 4y^2 \leq 0$
 $-16 \leq -5x^2 + 5y^2 \leq 36$
 $-16 \leq 5(x+y)(x-y) \leq 36$
 $|2x-3y| + |3x-2y| \leq 10$
 $0 \leq (2x-3y)^2 + (3x-2y)^2 + 2 \cdot (2x-3y)(3x-2y) \leq 100$
 $(2x-3y)(3x-2y) \geq 48$
 $6x + 6y - 13xy \geq 48$
 $6x + 6y \geq 47 + 13xy$





$\frac{18}{30} = \frac{AB}{AC}$
 $AB = 6$
 $m - 2n - 2 = 17$
 $m - 2n = 19$
 $q = 19$
 $m - 2n + 13 = 15 \cdot 19$
 $19 + 13 = 15 \cdot 19$

$\frac{4}{MZ} = 1$
 $MZ = 4$

$\frac{MX}{MZ} = \frac{2}{3}$
 $\frac{NX}{MZ} = \frac{1}{2}$
 $\frac{AX}{MZ} - \frac{NX}{MZ} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$4a^2 = 20 + 4$
 $a^2 = 24$
 $a = 2\sqrt{6}$
 $4a = 8\sqrt{6}$

$6 + 3y \geq 2x$
 $4 + 2y \geq 3x$
 $3y \geq 2x - 6$
 $1.5x \geq x - 3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$12 - 2x + 3d = (x^2 + 4x)^2$
 $12 - 12x > 0$
 $12 > 12x$
 $1 > x$
 $10x(1 + \frac{1}{3}) = 10x + \frac{10}{3}x = 10x + 5y$
 $2 \cdot 10x \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3}x$
 $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x) + 4d = -6x^2$
 $3x^2(x+4)^2 + 2 \cdot 24x - 24 = -6x^2$
 $3x^2(x+4)^2 = -6x^2 - 48x + 24$
 $12 - 2x + 6d = -6x^2$
 $6 - x + 3d = -3x^2$
 $3d = -3x^2 + x - 6$
 $4 + 48 \cdot 3 = 4(1 + 12 \cdot 3) = 4 \cdot 37$
 $3x^2(x+4)^2 = -6(x^2 + 4x - 4) = -6((x+2)^2 - 8) = -6(x+2)^2 + 48$
 $8 > (x+2)^2$
 $x^2(x+4)^2 = -2(x+2)^2 + 16 = -2(x^2 + 4x + 4) + 16 = -2(x^2 + 4x) + 8$
 $(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$
 $x^2 + 4x = t$
 $t^2 + 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = -4, t = 2$
 $x^2 + 4x = -4 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$
 $x^2 + 4x = 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow D = 16 + 8 = 24 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$
 $= -2 \pm 2\sqrt{6}$
 $x + y \in \mathbb{Z}$
 $3y \leq 2x$
 $3x \leq 2y \leq 13 + \frac{9x}{2}$
 $0 \in -x - y \in 8(0)$
 $0 \geq x + y \geq -10$
 $y \leq 0$
 $y = 0$
 $x = -10$
 $9x \leq 4x \Rightarrow x \leq 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:

Рассмотрим 4 случая: 1) $2x-3y \geq 0$, $3x-2y \geq 0$; 2)

$2x-3y \geq 0$, $3x-2y \leq 0$; 3) $2x-3y \leq 0$, $3x-2y \geq 0$;

4) $2x-3y \leq 0$, $3x-2y \leq 0$.

1. $6 \geq 2x-3y \geq 0$, $4 \geq 3x-2y \geq 0$

$$(2x-3y)^2 + (3x-2y)^2 \leq 36 + 16 = 52$$

$$(|2x-3y| + |3x-2y|)^2 \leq 100$$

$$(2x-3y)^2 + (3x-2y)^2 + 2|2x-3y| \cdot |3x-2y| \leq 100$$

$$\Rightarrow 2|2x-3y| \cdot |3x-2y| \geq 48 \Rightarrow |2x-3y| \cdot |3x-2y| \geq 24$$

≥ 24 , но с другой стороны $|2x-3y| \cdot |3x-2y| \leq 6 \cdot 4 = 24$

$$\Rightarrow |2x-3y| \cdot |3x-2y| = 24$$

$$1) 6 \geq 2x-3y \geq 0, 4 \geq 3x-2y \geq 0 \Rightarrow 6x+6y-13xy = 24$$

$$x \geq \frac{3}{2}y, \quad 3+y \geq 0, \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3y} \geq 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

$$2(x^5 - y^5) + (2x-2y)(2x+2y) + \sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \leq 0$$

$$12 - x - y^2 \geq 0, \quad x+4+3-y+25 - 2\sqrt{(x+4)(3-y)} +$$

$$+ 2 \cdot 5\sqrt{x+4} - 2 \cdot 5\sqrt{3-y} =$$

$$= 4 \cdot (12 - x - y^2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$100x^2 - 25y^2$$

$$0 \leq 4x^2 - 12xy + 9y^2 \leq 36$$

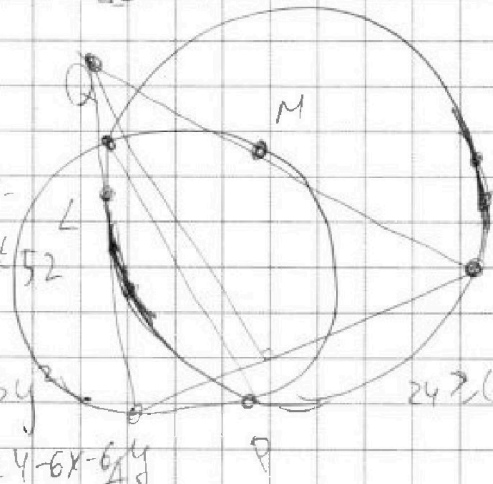
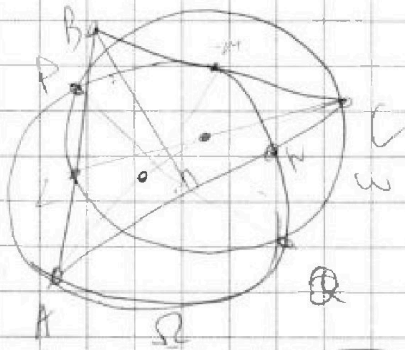
$$0 \leq 9x^2 - 12xy + 4y^2 \leq 16$$

$$-16 \leq -9x^2 + 12xy - 4y^2 \leq 0$$

$$-16 \leq -5x^2 + 5y^2 \leq 36$$

$$-\frac{16}{5} \leq y^2 - x^2 \leq \frac{36}{5}$$

$$\frac{16}{5} \geq x^2 - y^2 \geq -\frac{36}{5}$$



$$(5x^2 + 13y^2 - 20xy) \leq 52$$

$$13x^2 + 13y^2 - 20xy + 24 - 6x - 6y$$

$$0 \leq (2x - 3y)^2 + (3x - 2y)^2 + 2(2x - 3y)(3x - 2y) \leq 100$$

$$24 \geq (2x - 3y)(3x - 2y) \geq 24$$

$$6x + 6y - 13xy \geq 24$$

$$x + y \geq 4 + \frac{13}{6}xy$$

$$\frac{16}{5} \geq (x - y)(x + y)$$

$$13xy \leq -24 + 6x + 6y$$

$$24 = (2x - 3y)(3x - 2y) = 6x + 6y - 13xy$$

$$24 - 6x - 6y = -13xy$$

$$6x + 6y - 13xy - 24 = 0$$

$$y = x + y - \frac{13}{6}xy$$

$$4 + \frac{13}{6}xy + x = 2x + y$$

$$(x - y)^2 + 6(2x^2 + 2y^2 - x - y + 4) \leq 52$$

$$ac = -13$$

$$bc = 6$$

$$ad = 6$$

$$bd = -24$$

$$b = -4a$$

$$bc =$$

$$x + y = 4 + \frac{13}{6}xy$$

$$10x + 9y = 5x + 20 + \frac{65}{6}xy$$

$$= 5(x + y + \frac{13}{6}xy)$$

$8x - (2y) \leq 6x + 6y - 13xy$
 $2x \leq 12y - 13xy$
 $2x \leq 2y - 13xy$
 $3 \Rightarrow -2x \leq y$

$2 \leq 12 - 13x$
 $2 \leq 15 - 13x$
 $13x \leq 13$
 $x \leq 1$