



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a-b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p - некоторое простое число. Найдите числа a и b .

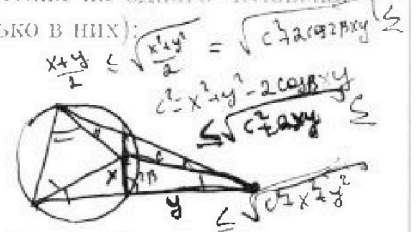
$$16^2 + 3 \cdot 16 = 16 \cdot 9$$

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.

$$\angle CAN$$

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.



Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2,$$

$$\begin{aligned} -(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2 &\geq 1 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-(x-1)^2 - (y+1)^2 + 2} + \sqrt{1 - |x-y-1|} &= 2 \quad \uparrow \\ \begin{matrix} -x^2 + 2x - 1 & \leq \sqrt{2} & \leq 1 \\ -y^2 - 2y + 1 & \leq 1 & < 1 \\ + 2 & & \end{matrix} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}t x + 9t^2 - 9 = 0 \quad \text{и } t - ? \quad \text{два корня и}$$

процуждение положительна

процуждение корней по Виета: $x_1 x_2 = 9t^2 - 9 > 0 \Rightarrow$

↑ по условию

$$\Rightarrow 9t^2 > 9 \Rightarrow t^2 > 1 \Rightarrow (t-1)(t+1) > 0$$

условие 2-ух различных корней $\Leftrightarrow D > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow D = 32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0$$

$$-4t^2 + 36 > 0$$

$$4t^2 < 36 \Rightarrow t^2 < 9 \Rightarrow (t-3)(t+3) < 0$$

имеем систему нер-в:

$$\begin{cases} (t-3)(t+3) < 0 \\ (t-1)(t+1) > 0 \end{cases}$$

Ответ $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если $a - b = 12$, то $a + b$ — число четное, ведь $a - b \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a \equiv b \pmod{2} \Rightarrow 0 + 0$ и $1 + 1 \pmod{2}$ (ну или же a и b одной четности)

$$a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

по выше сказанному $a+b \equiv 2 \pmod{2} \Rightarrow 19p^4 \equiv 2 \pmod{2}$

ио т.к. 19 — нечет, а p — простое, то единственное

простое число, кратное 2 это $2 \Rightarrow p = 2$

$$\Downarrow$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19 \cdot 2^4 = 19 \cdot 16$$

$$\Downarrow a+b=t$$

$$t(t+3) - 16 \cdot 19 = 0$$

$$t^2 + 3t - 16 \cdot 19 = 0$$

по всегда корни $t_1 = -19 < 0$ — не подходит $(a+b)$ — натур

$$t_2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases} \uparrow \Rightarrow 2a = 28 \Rightarrow a = 14$$

$$\Downarrow$$

$$b = 14 - 12 = 2$$

Ответ: $a = 14$; $b = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что на 1-й карте 12, а улетчиков 11 \Rightarrow после посадки, на ~~втором~~ ^{одном} ряду будет 2 человека на оставшихся 3-ех 3 человека

① ② ③ ④ - ряды.
 \otimes \otimes \otimes \otimes
 \otimes \otimes \otimes \otimes
 \otimes \otimes \circ \otimes

Также заметим, что если на ~~втором~~ ^{одном} ряду сидят три человека с ростами: $a_1 < a_2 < a_3$, то они могут сидеть всего

1-м способом:

$a_1 \leftarrow$ первая карта
 $a_2 \leftarrow$ вторая
 $a_3 \leftarrow$ третья

(если на первой карте то он само рухнет второму человеку, если a_2 , то за или a_3 , $a_3 > a_2 > a_1$, но $a_1 < a_2$ противоречие)

и ~~просто так~~ ^{просто так} сидеть ведь по условию, если мы посадим 3-ех

чел-к за 1 ряд, то должно быть выполнено условие:

$b_1 \leftarrow$ 1-й ряд
 $b_2 \leftarrow$ 2-й ряд
 $b_3 \leftarrow$ 3-й ряд

$b_1 > b_2 > b_3 \Rightarrow$ очевидно только 1-м способом можно сделать, если улетчики разной роста.

\Downarrow Также рассмотрим ряд, на котором 2- улетчика,

там есть 4 способа посадить их: $a_1 < a_2$

① ② ③ ④ a_2
 \otimes \otimes \circ \circ
 \otimes \circ \otimes \circ
 \circ \otimes_2 $\otimes a_2$ $\otimes a_1$

т.е. это увеличивает число способов в 4 раза.

Осталось посчитать кол-во способов раздать детей на группы 3; 3; 3; 2

но это очевидно: $11!$

^{одном} $3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!$

из них на ~~втором~~ ^{одном} ряду 2 человека из n -ых рядов 2 человека \Rightarrow умножаем чтобы выбрать этот ряд на $C_4^1 = 4$;

и на этом ряду 4 способа расставить 2-ух людей \Rightarrow

\Rightarrow Ответ: $\left[\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 4 \cdot 4 = 4 \right]$

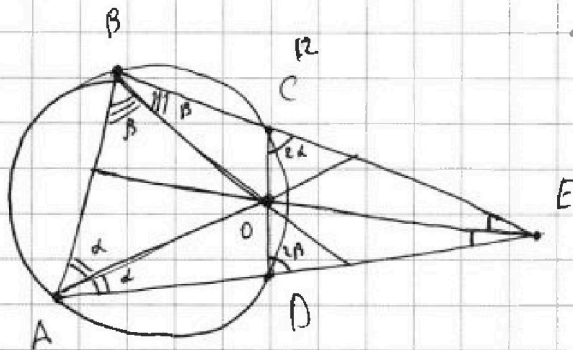


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle A = 2\alpha$$

$$\angle B = 2\beta$$

O — точка пересечения

Дано $\triangle ABE$

O лежит на CE

$$BE = 12$$

OD + DE \rightarrow макс.?

$\triangle CDE$
 $\angle CED = 2\alpha$ и $\angle CDE = 2\beta$ из вписанности ABCD и суммы
 противоположных углов $= 180^\circ$

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$

по свойству подобия $\frac{OC}{OD} = \frac{CE}{DE}$, но $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{BE}$ из подобия
 $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$

т.е. получаем

$$\frac{OC}{OD} = \frac{CE}{DE} = \frac{AE}{BE} = \frac{AE}{12}$$

воспользуемся тем, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, то $\frac{a+c}{b+d} = k$ Доказано

$$a = bk$$

$$c = dk \Rightarrow$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$b+d \neq 0$$

$$\frac{OC}{OD} = \frac{CE}{DE} = \frac{OC+CE}{OD+DE} = \frac{AE}{12}$$

$$OD+DE = \frac{12 \cdot (OC+CE)}{AE}$$

Также заметим следующее: $CE \cdot 12 = DE \cdot AE$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если из любой деревни можно добраться в любую группу \Rightarrow граф связный (верш-деревни дороги-рёбра)

Также заметим, что в графе нет циклов, в противном случае:



из вершины А в вершину

Б можно попасть более чем 1-им способом (например, левом и правом по кругу) значит по кругу

\Downarrow
перед нами связный граф без циклов, но это дерево (одно из его определений) в дереве на N вершинах $N-1$ рёбра. сумма степеней вершин = удвоенное число рёбер \Rightarrow число рёбер $+1 = N$

пусть у нас N -городов, тогда

$$N = \frac{\sum \text{степ. вершин}}{2} + 1 = \frac{5+6+7+9+N-4}{2} + 1$$

рёбер+1 во оставшихся по 1 дороге

$$2N - 2 = 5+6+7+9-4+N = 23+N \Rightarrow$$

$\Rightarrow N = 25$ ~~деревьев~~ деревьев - единств. вариант

Ответ: 25 деревьев ~~можно~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9t^2 - 9 > 0$$

$$t^2 > 1$$

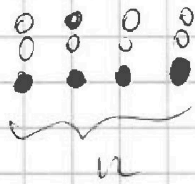
$$32t^2 - 4(9t^2 - 9) > 0$$

$$8t^2 - 9t^2 + 9 > 0$$

$$-t^2 + 9 > 0$$

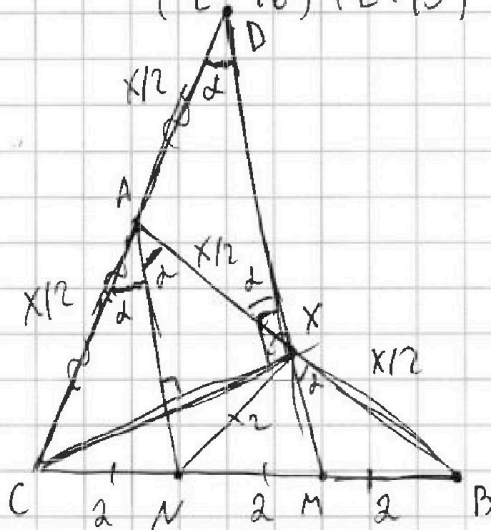
$$9 > t^2 > 1$$

0
0
0
0



$$t^2 + 3t - 12 = 0$$

$$(t - 3)(t + 4) = 0$$



$$a - b = 12$$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) = 19p^4$$

$$(a+b)(a+b+3) = 19p^4$$

$$+ p^2 \cdot 19p^2$$

$$19 \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p$$

$$18p^2 = 3$$

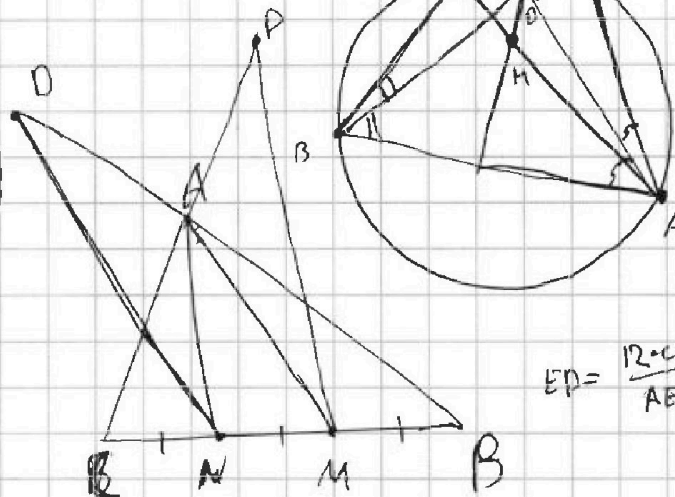
$$a = b + 12$$

11

$$p = 3$$

$$2b + 12$$

a₁
a₂
a₃
a₄
a₅
a₆
a₇



$$ED = \frac{12 \cdot CE}{AE}$$

$$\cos(\angle CAN) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{12 \cdot CE}{AE}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CH}{MA}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} = 2$$

несколько $\sqrt{x} \geq 0$, также $\sqrt{1-|x-y-1|} \leq 1$, ведь $|x-y-1| \geq 0$

\Rightarrow под корнем число не превосходящее 1

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + \sqrt{1-|x-y-1|} \leq \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} + 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{2x-2y-x^2-y^2} \Rightarrow \text{под корнем число, которое}$$

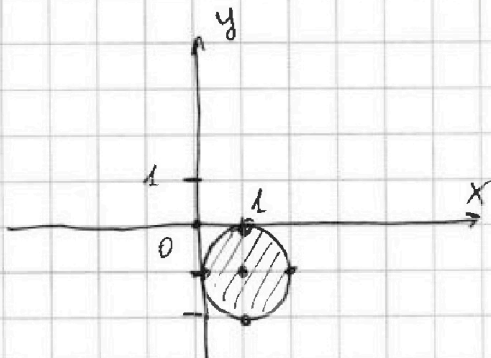
или хотя бы 1, в противном случае нер-во не было бы выполнено (каждому или в квадрате возведем) получим:

$$2x-2y-x^2-y^2 \geq 1$$

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1 \leq 1$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$$

но в целых числах ур-ние имеет не так много реш: переберём их



ведь слева ур-ние окружности с центром (1; -1) и радиусом 1

всего 5 точек с целочисленными координатами:

$$(1; 0) \cup (1; -1) \cup (1; -2) \cup (0; -1) \cup$$

$$(2; -1)$$

проверим подстановкой:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $x=1; y=0$

$$\sqrt{2-0-1-0} + \sqrt{1-|1-0-1|} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \quad \text{✓}$$

логично

② $x=1; y=-1$

$$\sqrt{2+2-1-1} + \sqrt{1-|1+1-1|} = \sqrt{2} + \sqrt{0} = \sqrt{2}$$

≠ 2
не логично ✗

③ $x=1; y=-2$:

$$\sqrt{2+4-1-4} + \sqrt{1-|1+2-1|}$$

-1 < 0 но OДЗ не проходит ✗

$x=0; y=-1$

④ $\sqrt{0+2-0-1} + \sqrt{1-|0+1-1|} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \quad \text{✓}$

логично

и последний ⑤ вариант: $x=2; y=-1$:

⑤ $\sqrt{4+2-4-1} + \sqrt{1-|2+1-1|}$

"-1 < 0 OДЗ не проходит"

Итого Ответ: 2 пары: $x=0; y=-1$
 $x=1; y=0$

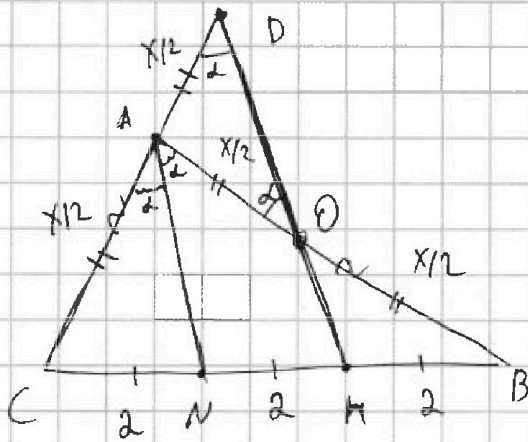


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По условию:

$$BC = 6$$

$$BN = MN = CN = \frac{BC}{3} = 2$$

$$\alpha = \angle CAN$$

$$\cos(2\alpha) = -\frac{3}{4}$$

$$AB = CD = X$$

$$AN \parallel MD$$

O - пересечение AB и MD

т.к. $AN \parallel MD \Rightarrow AN$ средняя линия $\triangle CDM \Rightarrow CA = AD = \frac{X}{2} = \frac{CD}{2}$
(верно $CN = NM$)

т.к. $AN \parallel MD$ и $NM = MB \Rightarrow AO = OB = \frac{X}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{X}{2}$
(проходит диагонально через середину)

из паралл. AN и MD следует: $\angle CDO = \angle CAN = \alpha$ (соотв.)

$\triangle ADO$ - р.б. $\Rightarrow (AO = DO) \Rightarrow \angle AOD = \angle CDO = \alpha$
" $\frac{X}{2}$

\Downarrow

$\triangle CAB \cong \triangle AOD$ $\angle NAB = \angle AOD = \alpha$ (накр. лет.) \Rightarrow

$\Rightarrow \angle CAB = 2\alpha$

Затем т. косин. косинусов $\triangle ABC$:

$$36 = \frac{X^2}{4} + X^2 - 2 \cdot \frac{X}{2} \cdot X \cos(2\alpha)$$

$$36 = \frac{5}{4}X^2 + \frac{3}{4}X^2 = 2X^2$$

$$X^2 = 18 \Rightarrow AB = X = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$

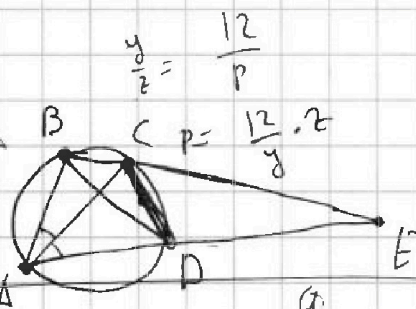
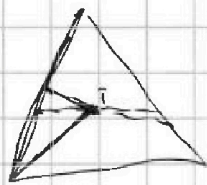
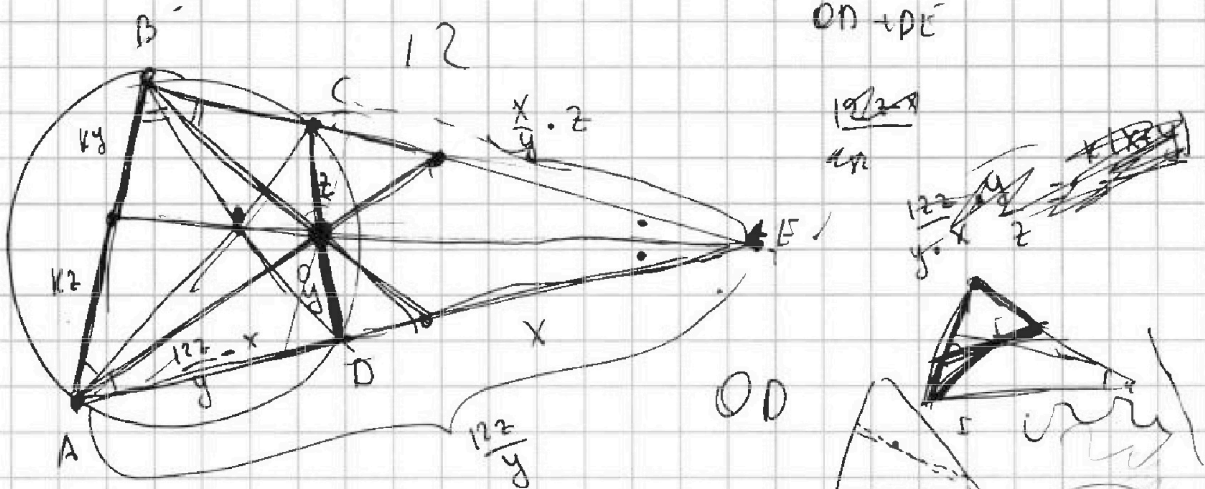


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

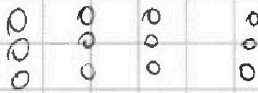
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{12z}{y} \cdot x = \frac{xz}{y} \cdot 12$$

$$\frac{OD}{OC} = \frac{DE}{CE} = \frac{12}{AE} = \frac{DE+OD}{OC+CE}$$

$$OD = \frac{OC}{CE} \cdot DE = \frac{OC}{OC+CE} DE$$



$$\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 16$$

$$\cdot 12$$



$$C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 \cdot 4$$

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2}$$

$$\left[\frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2} \cdot 4 \cdot 4 \right]$$

