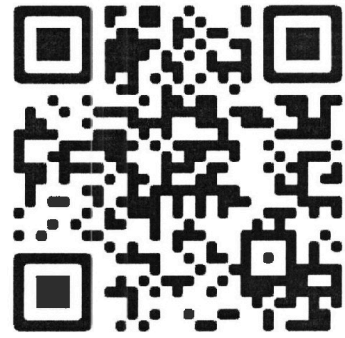




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

51

Пусть первый член геом. пр. это q , а знаменатель её это t , $x \neq 3$

$$q \cdot t^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}; \quad q \cdot t^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^7}; \quad q \cdot t^9 = x+4$$

$$\Rightarrow t^8 = \frac{q t^{11}}{q t^3} = (x-3)^2; \quad t^2 = \frac{q t^{11}}{q t^9} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^7}}{x+4}$$

$$(t^2)^4 = \frac{(15x+6)^2 (x-3)^2}{(x+4)^4} = (x-3)^2$$

Пусть $x \neq -4$; ~~$x \neq 3$~~ , тогда $(15x+6)^2 = (x+4)^4$

$$((x+4)^2 - 15x - 6)((x+4)^2 + 15x + 6) = 0.$$

$$(x+4)^2 - 15x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 - 15x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \Rightarrow x = 5$$

$$x = 2.$$

$$2) \quad x^2 + 8x + 16 + 15x + 6 = x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$(x+1)(x+22) \quad x = -1; x = -22.$$

Теперь если $x = \frac{-4}{3}$, то ~~$q t^3$~~ или $q t^{11}$ не существует, т.к. $(15x+6)(x-3) > 0$, $x = -1$ не подходит

по тем же причинам и $x = -22$ тоже не подходит $\Rightarrow x = 2; x = 5$. Ответ $x = 2; x = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{}$

$$22t - 3u = 4t^2 \Rightarrow 2t^2 - 11t + \sqrt{17} = 0$$

$$t = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 136}}{4} \quad 121 - 136 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Ответ: нет решений.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

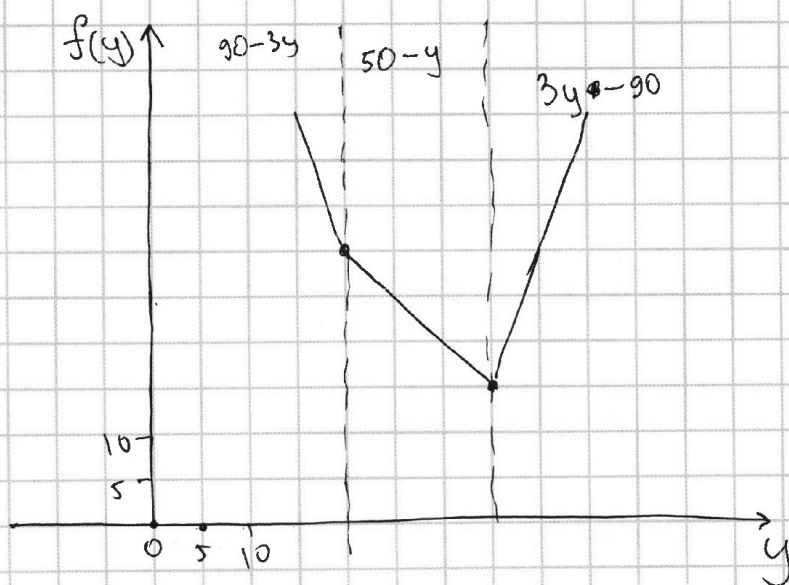
СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

52.

Построим график $(y-20) + 2|y-35| = f(y)$
в масштабе 1 клетка = 5.



Как видим $\min(f(y)) = 15$ при $y = 35$.

Но $\sqrt{225 - z^2} \leq 15 \Rightarrow z = 0$, т.к.

$f(y) = \sqrt{225 - z^2}$, $z = 0$; $y = 35$.

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$38 + 12\sqrt{x+7} - 12\sqrt{5-x} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(35-2x-x^2)$$

$$-12\sqrt{5-x} + 12\sqrt{x+7} = 24\sqrt{35-2x-x^2} - 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 38 + 24\sqrt{35-2x-x^2} - 72 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 4(35-2x-x^2)$$

$$22\sqrt{35-2x-x^2} - 34 = 4(35-2x-x^2)$$

Пусть $\sqrt{35-2x-x^2} = t$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + p$$

$$\cos^3 x - 3 \cos x (\sin^2 x - 2) = 3 (\cos^2 x - \sin^2 x) + p$$

$$\cos^3 x + 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 6 \cos^2 x - 3 + p.$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p.$$

$$f(x) = 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3$$

$$f'(x) = 12 \cos^2(x) \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) - 3 \sin x = 0$$

$$f'(x) = 0, \text{ когда } \sin x = 0 \text{ или когда}$$

$$12 \cos^2 x - 12 \cos x - 3 = 0.$$

$$\text{т.е. } \cos x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 144}}{24} = \frac{12 \pm \sqrt{2} \cdot 12}{24} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{12}.$$

когда $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$. \Rightarrow

минимумы и максимумы $f(x)$ в $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{12}$

и $\cos x = \pm 1$, очевидно, что $f(x)$ если

$g(\cos x) = f(x)$, то $g\left(\frac{1+\sqrt{2}}{12}\right) < g(1)$ и

$g(-1) < g\left(\frac{1-\sqrt{2}}{12}\right) \Rightarrow$ что было хотя

бы 1 корень достаточно, чтобы p было.

~~т.е. $p \geq g(1) \geq g(-1)$~~ ; ~~$f(x)$~~ $g(1) = 4$; $g(-1) = -10$

Ответ: $p \in [-10; 4]$; $p = 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на ~~любую~~ любую точку и найдем, что у нее будет три обрца \Rightarrow 1 точка задает сразу 4 точки. Тогда надо выбрать две точки из 1 четверти, т.е.

$$C_{7500}^2 = d. \text{ Надо найти } a+b+c+d.$$
$$a+b+c+d = (a+d)+(b+d)+(c+d) - 2d = 3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$$

Ответ $3 \cdot C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В своей работе я клеточки называю точками.

Вам будем называть свойствами расстановки следующие события: (расстановка - это 8 замкнутых точек)

1 свойство) расстановка центральносимметричная

2 свойство) расстановка симметрична вертикальной средней линии.

3 свойство) расстановка симметрична горизонтальной средней линии.

Докажем, что если расстановка обладает двумя свойствами (любыми) из этих трёх, то она обладает и третьим.

I. Пусть расстановка обладает свойством 2 и 3, тогда понятно, что любую точку из расстановки мы отсимметрируем сначала от одной средней линии, потом этот образ - от второй средней линии и получим точку центральносимметричную исходной. что.

II Пусть расстановка обладает свойством ^{1 и (2 или 3)} ~~2 и 3~~ =>
=> берем любую точку, симметрируем её централь-
но, а потом относительно одной из средних ли-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ний симметрией центральной образ исходной точки (средняя линия зависит от свойства расстановки \mathbb{Z} , т.е. 2 или 3), получим образ исходной точки, который симметричен исходной точке относительно средней линии, которая не в свойстве расстановки: \mathbb{Z} .

Тогда либо расстановка обладает свойством только 1 \mathbb{Z} , либо только 2, либо только 3, либо 1 и 2 и 3. Пусть расстановок только с 1 свойством a , только со свойством 2 - b , только с 3 - c , ~~только~~ и с 1, и с 2, и с 3 - d .

Тогда ~~c~~ $+ d = C_{15000}^4$, т.к. выбираем четыре точки по одну сторону от горизонт. средней линии и симметрием их относительно неё. Аналогично.

$$b + d = C_{15000}^4; \quad a + d = C_{15000}^4, \text{ т.к. мы выбираем}$$

4 точки по одну сторону от любой ср. линии и центра симметрием их. Расстановок ~~то~~ сразу со всеми свойствами не так уж и много.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$a-c \rightarrow b-c \Rightarrow$ либо $a-c = p^2$; $b-c = 1$, либо

$$a-c = -1; b-c = p^2.$$

Пусть $b-c = 1 \Rightarrow b = c+1$.

$$\text{от } a-b+1 \stackrel{\llcorner}{=} p^2 \quad ; \quad a-b = p^2 - 1, \text{ но}$$

$a-b \not\equiv 3 \Rightarrow$ если p дает остатки при дел.

на 3 1 или 2, то $p^2 - 1 \equiv 3 \Rightarrow a-b \not\equiv 3$ противо-

решие \Rightarrow ~~$p \equiv 1$~~ $p \equiv 3 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a-b = 8 \Rightarrow a = 8+b; \quad ; \quad a+b^2 = 820 \Rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 + b - 812 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3248}}{2} = \frac{-1 \pm 57}{2} =$$

$\Rightarrow b = +28$ или $b = -29$, тогда $b = 28$; ~~или~~ $a = 36$; $c = 27$.
если $b = -29$, то $a = -21$; $c = -30$.

Пусть $a = c-1 \Rightarrow b-a-1 = -p^2 \Rightarrow p^2 - 1 = a-b$,

тогда $p = 3$ аналогично, тогда $a-b = 8$,

$a+b^2 = 820 \Rightarrow b = 28$ или $b = -29$. Если $b = 28$, то

$a = 36$, $c = 37$, если $b = -29$, то $a = -21$; $c = -20$.

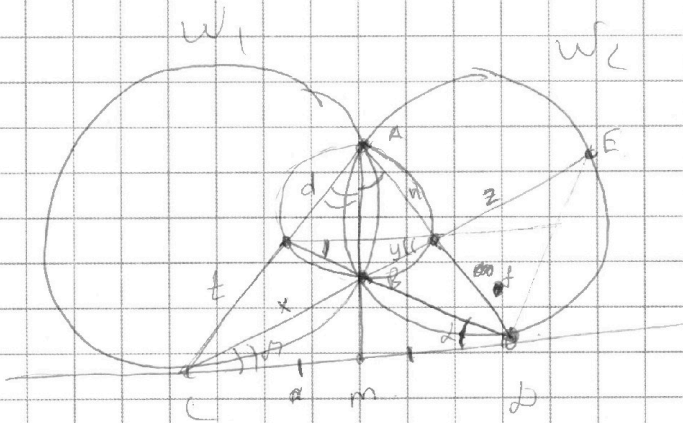


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{x+y}{z} = \frac{9}{25} \quad y$$

$$\begin{matrix} (a-c)(b-c) = p^2 \\ p & p \\ p^2 & 1 \end{matrix}$$

$$b = c + 1$$

$$a - b + 1 = p^2$$

$$x(x+y) = z(t+d)$$

~~a-c~~

$$a - c =$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{m}{f}$$

$$b - c = 1$$

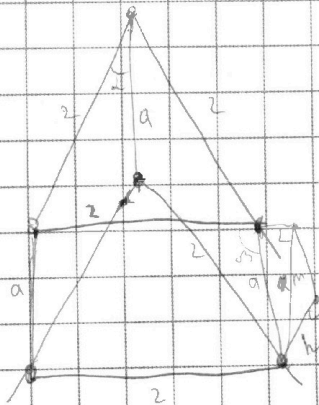
$$c = b - 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{f} = \frac{d}{n}$$

$$a - b^2 = 820$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$0 \quad 1 \quad 2$$



$$\sin \alpha \cdot 2a = 5$$

$$\sin \alpha \cdot 2a$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{2a}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{a}$$

$$a - b = 8$$

$$m \cdot \sin \gamma = h$$

$$m \cdot 2 = 4$$

$$h = 2 \sin \gamma$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = \frac{-p(2)}{4} \quad \begin{array}{r} 4 \quad 285 \\ -57 \\ -57 \\ \hline 1399 \\ +285 \\ \hline 1684 \end{array}$$

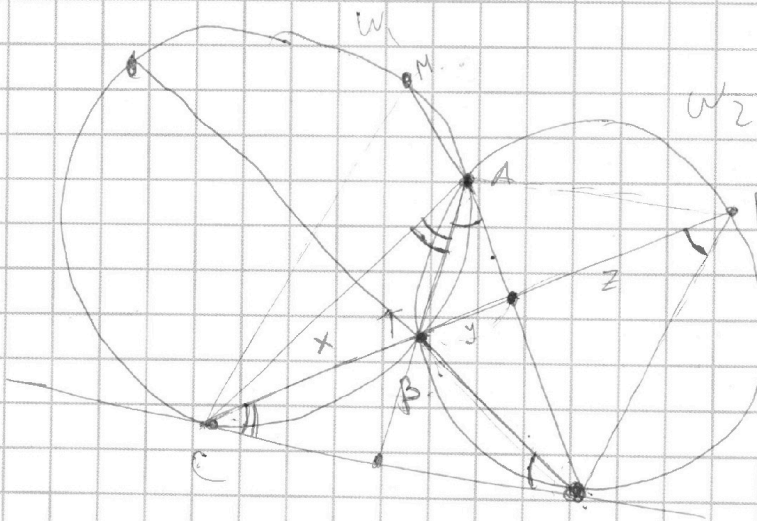
~~$\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$~~

$$\cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x + 6\cos x = \frac{p}{249}$$

$$-3\cos^2 x + 3\sin^2 x = \frac{p}{249}$$

$$\cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 6\cos x - 3\cos^2 x + 3\sin^2 x = p$$

$$3\sin^2 x (1 - \cos x) + \cos x (\cos^2 x + 6 - 3\cos x) = p$$



$ED = ?$

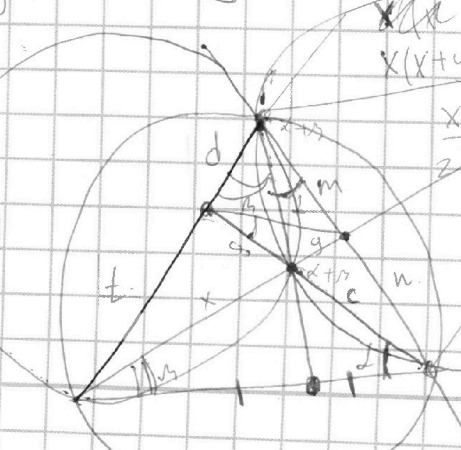
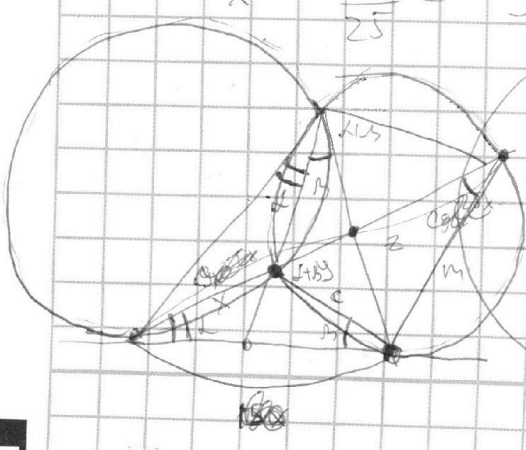
CD

$$\frac{x+y}{2} = \frac{9}{25}$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AD}{TC}$$

$$x = \frac{9}{25} z - y$$



$$x(x+y+z) = m^2$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{9}{25}$$

$$x = \frac{9}{25} z - y$$

$$x+y = \frac{9}{25}$$

$$n \cdot m = yz$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b + 6 = 2ab.$$

36 2-6.

$$a^2 + b^2 = 2$$

$$a^2 + b^2 + 36 - 2ab + 12a - 12b = 4a^2b^2$$

$$38 - 2ab + 12a - 12b = 4a^2b^2$$

$$24ab - 72 + 38 - 2ab = 4a^2b^2$$

$$22ab - 34 = 4a^2b^2$$

$$2t^2 - 11t + 17 = 0$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{11}{4} = 2.75$$

$$\frac{121}{8} - \frac{121}{4} + 17 = -\frac{121}{8} + 17$$

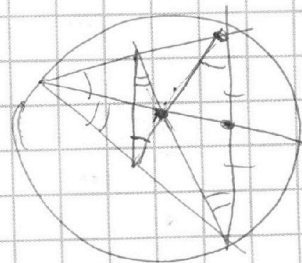
$$\frac{(15x+6)^2 (x-3)^2}{(x+4)^2} = F_8$$

$$F_8 = \frac{(x+4)^2}{(x-3)^2}$$

$$F_{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$F_9 = x+4$$

$$F_3 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$



Handwritten notes and calculations:

$$x+4 = 15x+6$$

$$16x = -10$$

$$x = -\frac{5}{8}$$

$$x = -\frac{5}{8}$$

$$x = -\frac{5}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sin B}{\sin(2t/s)} = \frac{c}{m}$$

$$x + y = \frac{9}{25}$$

$$x + y = \frac{9}{25} \Rightarrow x = \frac{9}{25} - y$$

$$\frac{1}{\sin 2t/s} = \frac{1}{\sin 2t/s}$$

$$\frac{\sin 2t/s}{g} = \frac{\sin t/s}{m}$$

$$\frac{\sin 2t/s}{x} = \frac{\sin t/s}{t+d}$$

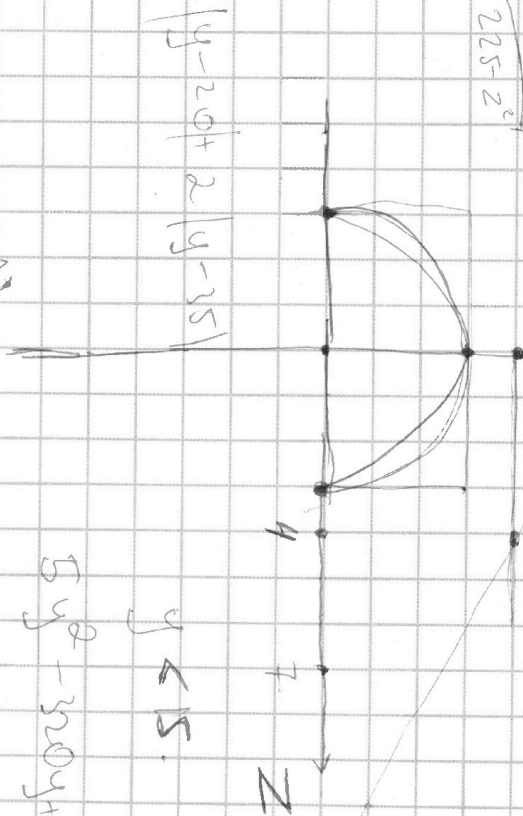
$$t+d = \frac{\sin t/s \cdot x}{\sin 2t/s}$$

$$\frac{\sin t/s}{\sin 2t/s} = \frac{(t+d)y}{m \cdot x}$$

$$= 90 - 3y$$

$$20 - y + 70 - 2y =$$

$$m/n$$



$$5 \geq x + 3z$$

$$x \geq -7$$

$$15 \geq z \geq -15$$

$$y + z \geq 2x + x^2$$

$$y^2 - 40y + 400 +$$

$$+ 4y^2 - 280y + 4800 = 225 - 2^2$$

$$5y^2 - 320y + 5300 = -2^2$$

$$5y^2 - 320y + 5075 = -2^2$$

$$5y^2 - 320y + 1024 +$$



На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА _____ ИЗ _____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Поля QR-кода недопустимы!

$$\begin{aligned} \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos x &= 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + p \\ \cos^3 x - 3 \cos x (\sin^2 x + a) &= 3 (\cos^2 x - \sin^2 x) + p \\ \cos^3 x + 3 \cos x + 3 \cos^3 x &= 2 \cdot 6 \cos^2 x - 3 + p \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 &= p \end{aligned}$$

$$12 \cos^2 x \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) - 3 \sin x = 0$$

$$12 \cos^2 x - 12 \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 36}}{2}$$

$$\cos x = \frac{12 \pm \sqrt{180}}{2} = 6 + \sqrt{27} \text{ ; } 6 - \sqrt{27}$$

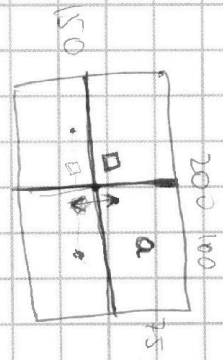
$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x+7)(5-x)} - 11 - 22$$

$$a - b + 6 = 2ab \quad (8+17=35)$$

$$a \cdot a \cdot a(x-2b) = b - b$$

$$a = \frac{b-6}{1-2b}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1-2b}{b-6} = -2 + \frac{11}{b-6} = \frac{1}{a}$$



$$\begin{aligned} x^2 + 23x + 22 &= 0 \\ 1 - 23 + 22 &= 0 \end{aligned}$$

$$(x-1)(x-22)$$

$$x = -22 \pm \sqrt{21^2}$$

$$\begin{array}{r} x = \\ (x-1)(x-22) = \frac{1}{46} \\ \frac{1}{69} \\ \frac{1}{21} \\ \frac{1}{21} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= x^2 - 22x + 22 \\ &= x^2 - 23x + 22 \\ &(x+1)(x+22) \end{aligned}$$

$$38 - 2\sqrt{11} = 12\sqrt{5-x^2+11\sqrt{5-x^2}}$$

$$= 4(35 - 2x - x^2)$$