МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x-4z}+4=2\sqrt{y-4x-x^2+z},\\ |y+4|+4|y-5|=\sqrt{81-z^2}.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение
$$p\cos 3x+3(p+4)\cos x=6\cos 2x+10$$
имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2:5$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:
   - $a<b$,
   - число $b-a$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a^2+b=710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

~~Из условия~~

~~Пусть~~ Геометрическая прогрессия задаётся формулой $b_n = b_1 q^{n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$; b_1 – первый член геометрической прогрессии. По условию:

$$\begin{cases} b_1 q^6 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} & (1) \\ b_1 q^8 = x+3 & (2) \\ b_1 q^{14} = \sqrt{\dfrac{25x-9}{(x-6)^3}} & (3) \end{cases}$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} (25x-9)(x-6) \geqslant 0, \quad 25x-9 = 25\left(x-\frac{9}{25}\right) \\ \dfrac{25x-9}{(x-6)^3} \geqslant 0 \\ x-6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 6 \Rightarrow (x-6)^4 > 0 \end{cases}$$

$+ \quad \frac{9}{25} \quad - \quad 6 \quad +$; x

По методу интервалов: $x \in \left(-\infty; \frac{9}{25}\right] \cup (6; +\infty)$

Таким образом, (3) можно записать следующим образом: $b_1 q^{14} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)}$ (4)

Если бы $b_1 = 0$ или $q = 0$, то: $\begin{cases} 25x-9=0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{25} \\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$ противоречие

Значит $b_1 \neq 0$ и $q \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{9}{25}$.

Из (1) и (4): $\cancel{b_1} q^{14} = \frac{1}{(x-6)^2} \cdot \cancel{b_1} q^6 \Leftrightarrow q^8 = \frac{1}{(x-6)^2}$ (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (из (2) и (5)) $b_1 \cdot \frac{1}{(x-6)^2} = x+3 \Leftrightarrow b_1 = (x-6)^2(x+3)$ (6)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Зная b_1 и q^2~~. Преобразуем (5): $q^2 =$ (так как $q^2 > 0$) $\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}} \Leftrightarrow q^6 = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}}\right)^3 \overset{(7)}{\Rightarrow}$ (из (6) и (7))

$\Rightarrow (x-6)^2(x+3)\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^2}}\right)^3 = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\left((x-6)^2\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{(x-6)^6}}\right) = \sqrt{(25x-9)(x-6)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)\cdot\sqrt[4]{(x-6)^2} = \sqrt{(25x-9)(x-6)}$ (напомним, что равносильность применяем на ОДЗ). Теперь мы понимаем, что (так как $x \neq 6$ и $x \neq \frac{9}{25}$) $x > -3$. Тогда ~~не мы~~ можем (учитывая, что $x \in \left(-3; \frac{9}{25}\right) \cup (6; +\infty)$) возвести обе части в квадрат: $(x+3)^2\sqrt{(x-6)^2} = (25x-9)(x-6)$. Рассмотрим 2 случая:

I случай: $x > 6 \Rightarrow (x+3)^2 = 25x - 9 \Leftrightarrow x^2 - \overbrace{19}^{18+1}x + 18 = 0 \Leftrightarrow (x-18)(x-1) = 0$. Но $x - 1 > 5 > 0 \Rightarrow x = \boxed{18}$ (>0)

II случай: $x \in \left(-3; \frac{9}{25}\right) \Rightarrow (x+3)^2 = 9 - 25x \Leftrightarrow x^2 + 31x = 0 \Leftrightarrow x(x+31) = 0$. Но $x + 31 > 28 > 0 \Rightarrow x = \boxed{0} \left(\in \left(-3; \frac{9}{25}\right)\right)$

Если $x = 0$, то $b_1 = 108$, а $q \in \left\{-\sqrt[4]{\frac{1}{6}}; \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\right\}$.

Если $x = 18$, то $b_1 = 12^2 \cdot 21$, а $q \in \left\{-\sqrt[4]{\frac{1}{12}}; \sqrt[4]{\frac{1}{12}}\right\}$.

$\boxed{\text{Ответ: } 0; 18}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{\text{Задача 2}}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

Пусть $x+2=t$; $y+4=W$. Тогда:

$$\begin{cases} \sqrt{t+3} - \sqrt{3-t-4z} + 4 = 2\sqrt{W-t^2+z} \quad (1) \\ |W| + 4|W-9| = \sqrt{81-z^2} \quad (2) \end{cases}$$

2) правая часть $\in [0;9]$ (по ОДЗ: $z \in [-9;9]$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ левая часть тоже. Если бы $W \geq 9$, то $|W| + 4|W-9| =$

$= 5W - 36 \geq 9$ бы. Значит $W \leq 9$.

Заметим, что $|W| + 4|W-9| = \begin{cases} 5W-36, \text{ если } W \geq 9 \\ -3W+36, \text{ если } W \in [0;9] \\ -5W+36, \text{ если } W < 0 \end{cases}$

Первый случай невозможен $\Rightarrow$ выполняется один из 2 других. Но $(-3W+36)' = -3 < 0$ и $(-5W+36)' = -5 < 0$ $\Rightarrow$ на $(-\infty; 9]$: $|W| + 4|W-9| \searrow$ (непрерывно, так раз до 9) $\Rightarrow$ $|W| + 4|W-9| \in [9; +\infty)$. Но $\sqrt{81-z^2} \leq 9$.

Таким образом: $\begin{cases} z = \boxed{0} \\ W = 9 \Leftrightarrow y = \boxed{5} \end{cases}$

Подставим z и w в (1): $\sqrt{t+3} - \sqrt{3-t} + 4 = 2\sqrt{9-t^2}$ (3)

ОДЗ: $t \in [-3; 3]$.

3) $\sqrt{t+3}+4 = 2\sqrt{9-t^2} + \sqrt{3-t} \Leftrightarrow (t+3)+16+$

$+8\sqrt{t+3} = (36-4t^2) + (3-t) + 4\sqrt{3-t}\cdot\sqrt{9-t^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

3) $\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t} = 2\sqrt{9-t^2}-4$. Возведём обе части в квадрат (потом сделаем проверку):

$(t+3)+(3-t)-2\sqrt{9-t^2} = (36-4t^2)+16-16\sqrt{9-t^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14\sqrt{9-t^2} = -4t^2-2t+52$. ~~Пусть $t^2 = v$. Тогда:~~

~~$7\sqrt{9-v} = -2$~~ Пусть $v = 2t$. Тогда: $7\sqrt{36-v^2} =$

$= -v^2 - v + 52 \Rightarrow$ Возведём обе части в квадрат:

---

3) $\underbrace{2\sqrt{t+3}}_{a} - \underbrace{2\sqrt{3-t}}_{b} + 8 = 2\sqrt{t+3}\cdot 2\sqrt{3-t} \Leftrightarrow a-b+8 =$

$= ab \Leftrightarrow 7 = ab+b-a-1 \Leftrightarrow (\sqrt{t+3}+1)(\sqrt{3-t}-$

$-1) = 7$. Производная левой части: $\frac{1}{2\sqrt{t+3}}(\sqrt{3-t}-1) -$

$-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}\cdot(\sqrt{t+3}+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(3-t)-\sqrt{3-t}-(t+3)-\sqrt{t+3}}{\sqrt{3-t}\cdot\sqrt{t+3}} =$

$= -\frac{2t+\sqrt{t+3}+\sqrt{3-t}}{2\sqrt{3-t}\sqrt{t+3}}$. Если $t \geq 0$, то производная <0.

Пусть теперь $t<0$. Тогда $\sqrt{t+3}+\sqrt{3-t} \; ? \; -2t \Leftrightarrow$ (иначе $t=3$)

$\Leftrightarrow (t+3)+(3-t) \; ? \; 4t^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \; ? \; t^2 \Leftrightarrow 0 \; ? \; (t-\sqrt{\tfrac{3}{2}})(t+\sqrt{\tfrac{3}{2}})$

$\Leftrightarrow t \; ? \; -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \Rightarrow$ при $t \in [-\sqrt{\tfrac{3}{2}}; 0)$: производная <0, а при $t \in (-3; -\sqrt{\tfrac{3}{2}})$: >0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Попробуем преобразовать (3) в $(a\sqrt{t+3}+b\sqrt{3-t}+c)^2-d^2=0$.

Если это возможно, то получим: $a^2(t+3)+b^2(3-t)+$

$+c^2+2ac\sqrt{t+3}+2bc\sqrt{3-t}+2ab\sqrt{9-t^2}-d^2=0.$

Так как изначально $4+\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t}-2\sqrt{9-t^2}=0$, то удобно считать $b=-a$. Тогда:

$(6a^2+c^2-d^2)+2ac(\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t})-2a^2\sqrt{9-t^2}=0.$

Видим, что $-2a^2=-2$. Без ограничения общности, $a=1 \Rightarrow (6+c^2-d^2)+2c(\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t})-2\sqrt{9-t^2}=0.$

Как видим, $2c=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$. А $6+c^2-d^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d^2=2+c^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Без ограничения общности, $d=\frac{3}{2}$. Итак: (3) преобразовано в $(\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t}+$

$+\frac{1}{2})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t}-1)(\sqrt{t+3}-\sqrt{3-t}+$

$+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{t+3}=\sqrt{3-t}+1 \Leftrightarrow t+3=(3-t)+1+2\sqrt{3-t} \quad (4)\\ \sqrt{t+3}+2=\sqrt{3-t} \Leftrightarrow (t+3)+4+4\sqrt{t+3}=3-t \quad (5)\end{array}\right.$

4) $2\sqrt{3-t}=2t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\geqslant \frac{1}{2} \\ 12-4t^2=4t^2-4t+1 \end{cases} \Leftrightarrow 8t^2-4t-11=0$

$D_4=4+88=92>0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{2\pm 2\sqrt{23}}{8}$. Но $t\geqslant\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{2+2\sqrt{23}}{8}>$

$> 2+2\cdot 4>3$. Противоречие с ОДЗ

5) $2\sqrt{t+3}=-t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq -2 \\ 4t+12=t^2+4t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\boxed{-2\sqrt{2}} \ (\in(-3;-2)) \\ t=2\sqrt{2}>-2 \ (\text{не то}) \end{array}\right.$

$t=-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\boxed{-2\sqrt{2}-2}$ $\boxed{\text{Ответ: } (-2\sqrt{2}-2;\, 5;\, 0)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$p\cos(3x) + 3(p+4)\cos(x) = 6\cos(2x) + 10 \Leftrightarrow p(4\cos^3(x) - 3\cos(x)) + (3p+12)\cos(x) = 6(2\cos^2(x) - 1) + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t = \cos(x))\quad 4pt^3 - \cancel{3pt} + \cancel{3pt} + 12t = 12t^2 - \cancel{6} + \cancel{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4pt^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (1-p)t^3 \Leftrightarrow$ ~~t=0 всё~~ (при $t=0$: $-1=0$, что неверно) $1-p = \left(\frac{t-1}{t}\right)^3 = \left(1-\frac{1}{t}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = 1 - \left(1-\frac{1}{t}\right)^3 = f(t)$

$f'(t) = 1 - 3\cdot\left(1-\frac{1}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2} = \frac{t^4 - 3\cdot(t-1)^2}{t^4} =$

$= \frac{(t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3})(t^2 + t\sqrt{3} - \sqrt{3})}{t^4}.$

Посмотрим на $t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3}$: $D = 3 - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-4) < 0$ (так как $3 < 16$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 - t\sqrt{3} + \sqrt{3} > 0.$

Посмотрим на $t^2 + t\sqrt{3} - \sqrt{3}$: $D = 3 + 4\sqrt{3} > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}.$

$\frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} < \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < -1 \le t$ (по свойству косинуса) $\Rightarrow$ ~~данный корень~~

$\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} \ ?\ 1 \Leftrightarrow \sqrt{3+4\sqrt{3}} \ ?\ 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + \cancel{4\sqrt{3}} \ ?\ 7 + \cancel{4\sqrt{3}}$

(как видим, $3 < 7$) $\Rightarrow \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2} < 1$ (и >0, так как $\sqrt{3+4\sqrt{3}} > \sqrt{3}$)

Так как $t \in [-1;1]$, то $f(t) \searrow$ на $[-1;0)$ и $\left(0; \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right]$;

$f(t) \nearrow$ на $\left[\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}; 1\right]$; $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}$ – точка минимума; при $t \to 0$ и $t > 0$: $\frac{1}{t} \to +\infty \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{t}\right) \to -\infty \Leftrightarrow f(t) \to +\infty$; при

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$t \to 0$ и $t < 0$: $\frac{1}{t} \to -\infty \Leftrightarrow \overbrace{f(t)}^{(1-\frac{1}{t}) \to +\infty \Leftrightarrow} \to -\infty$.

Итак, на $[-1; 0)$: $f(t) \searrow$ от $\overbrace{-7}^{f(-1)=}$ до $-\infty$; на $\left(0; \frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right]$: $f(t) \searrow$ от $+\infty$ до $f\left(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right) =$

$= 1 - \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3}\right)^3 = *$;

на $\left[\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}; 1\right]$: $f(t) \nearrow$ от $f\left(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right)$ до $f(1) = 1$. ~~Сравним~~ ~~Очевидно, их~~ Выше получили, что $\frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3}{2} \in (0; 1) \Rightarrow f\left(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right) \in (0;1) \Rightarrow E(f(t)) = \boxed{(-\infty; -7] \cup \left[f\left(\frac{-3+\sqrt{3+4\sqrt{3}}}{2}\right); +\infty\right)}$ ответ.

Откуда получаем ответ.

$$* = \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3} \cdot \left(1 + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3}\right) + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3}\right)^2\right) =$$

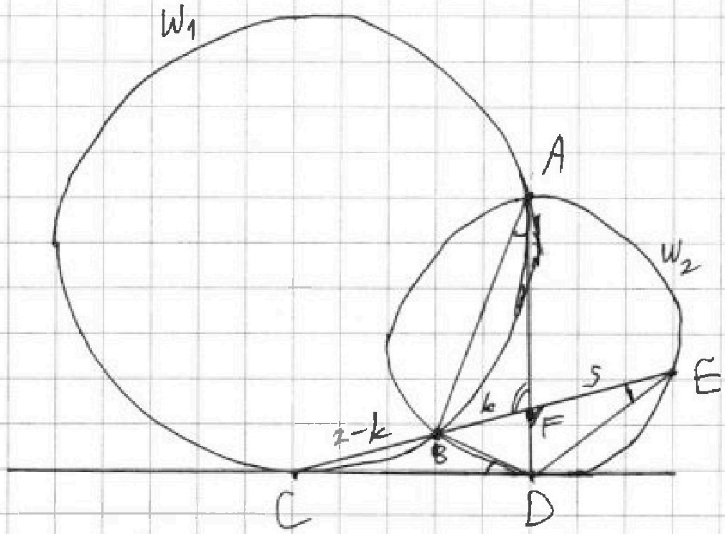
$$= \frac{2}{(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3)^3} \cdot \left(2(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3)^2 - 2(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3) + (\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3)^2 - 4(\sqrt{3+4\sqrt{3}}-3) + 4\right) =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и **суммарное** количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\{A;B\} = w_1 \cap w_2$; CD — общ. кас. к w_1 и w_2; $C \in w_1$; $D \in w_2$; B ближе к (CD), чем A; $E = (CB) \cap w_2$; $F = AD \cap CE$; $CF : FE = 2:5$

Найти: $ED : CD$

Решение:

~~Из вписанности:~~ $\cancel{\begin{cases} AF \cdot FD = BF \cdot FE \\ CB \cdot CE = CD^2 \end{cases}}$

~~Пусть $CB = 2x$;~~ $FE = 5x$; $BF = k \cdot x \Rightarrow$ ~~$CB = (2-k)\cdot x$~~

Без ограничения общности, $FE = 5$ и $BF = k \Rightarrow BC = 2-k$.

Из вписанности: $\angle DAB = \angle DEB$ и ~~к~~ $= \angle BDC$. Как верт. $\angle$-ы, $\angle AFB = \angle EFD \Rightarrow \triangle AFB \sim \triangle DEFD$ и $\triangle CED \sim \triangle CDB \Rightarrow \begin{cases} \frac{AF}{5} = \frac{k}{FD} = \frac{AB}{ED} \\ \frac{7}{CD} = \frac{ED}{DB} = \frac{CD}{2-k} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Докажем, что если закрашенное множество обладает хотя бы 2 симметриями из 3, описанных в условии, то данное множество обладает всеми 3 симметриями. (далее стр.)

~~Что означает~~ Введём „систему ~~координат~~ точечных координат”: ~~по клеткам~~ клетка с ~~коорд~~ координатами $(i;j)$ $(i \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}; i \leq 100; j \leq 400)$ – это клетка на пересечении i-й строки и j-го столбца (при этом порядковый номер строки отсчитывается ~~слев~~ сверху-вниз, а порядковый номер столбца отсчитывается слева-направо; например, самая верхняя строка имеет номер 1; самая нижняя – номер 100; самый левый столбец имеет номер 1; самый правый – номер 400), при этом считаем, что строки параллельны большей стороне прямоугольника 100×400 (то есть стороне 400), а столбцы – меньшей (стороне 100).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Что ~~та~~ означает симметрия относительно центра прямоугольника 100×400 в СТК? Означает она следующее: $\forall i \in \mathbb{N}; j \in \mathbb{N}; i \leq 100; j \leq 400$: клетки $(i;j)$ и $(101-i; 401-j)$ либо обе закрашены, либо ~~обе не~~ обе не являются закрашенными.

Симметрия относительно ~~центра~~ вертикальной средней линии прямоугольника 100×400 ~~(она ра~~ (расположенной между 200-м и 201-м столбцами) в СТК означает следующее: $\forall i \in \mathbb{N}$ и $i \leq 100$; $j \in \mathbb{N}$ и $j \leq 400$: клетки $(i;j)$ и $(i; 401-j)$ либо обе закрашены, либо обе закрашенными не являются.

Симметрия относительно горизонтальной средней линии прямоугольника 100×400 (расположенной между 50-й и 51-й строками) в СТК означает следующее: $\forall i \in \mathbb{N}$ и $i \leq 100$, $j \in \mathbb{N}$ и $j \leq 400$: клетки $(i;j)$ и $(101-i; j)$ либо обе закрашены, либо обе закрашенными не являются.

Рассмотрим все возможные пары симметрий, которыми может обладать прямоугольник 100×400:

1) относительно обеих средних линий прямоугольника.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Давайте считать, что закрашенные клетки чёрные, а незакрашенные клетки белые. По свойствам этих 2 симметрий: одного цвета $(i;j)$ и $(i;401-j)$, а также $(i;401-j)$ и $(101-i;401-j) \Rightarrow (i;j)$ и $(101-i;401-j)$ одного цвета $\Rightarrow$ симметрия относительно центра тоже есть.

2) относительно вертикальной средней линии и центра.

$\left\{\begin{array}{l} (i;j) \text{ и } (i;401-j) \text{ одного цвета} \\ (i;401-j) \text{ и } (101-i;401-(401-j)) \text{ одного цвета} \end{array}\right. \Rightarrow (i;j)$ и $(101-i;j)$ одного цвета $\Downarrow$ симметрия относительно горизонтальной средней линии тоже есть.

3) относительно горизонтальной средней линии и центра.

$\left\{\begin{array}{l} (i;j) \text{ и } (101-i;j) \text{ одного цвета} \\ (101-i;j) \text{ и } (101-(101-i);401-j) \text{ одного цвета} \end{array}\right. \Rightarrow (i;j)$ и $(i;401-j)$ одного цвета $\Downarrow$ симметрия относительно вертикальной средней линии тоже есть.

Итак, ~~мы~~ из нашего доказательства следует, что прямоугольник 100×400 обладает или 3 симметриями, или одной, или не имеет ни одной симметрии, описанной в условии.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Сколько ее~~ ~~Посчитаем количество способов добиться~~ ~~симметрий относите~~

Заметим, что количество пар клеток, обязательно одноцветных, одинаково для каждой из 3 симметрий — это $\frac{100 \cdot 400}{2}$. Почему? Потому что в каждом из определений симметрий через СПК пары ~~(i; j) и~~ клеток $\{(a;b);(c;d)\}$ и $\{(c;d);(a;b)\}$ считаются одинаковыми (при этом не может быть такого, что $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$, иначе $\left[\begin{array}{l} 101 \vdots 2 \\ 401 \vdots 2 \end{array}\right)$. То есть, выбирая 1 строку (100 способами) и 1 столбец (400 способами), на каждую из пар мы наткнёмся дважды (так как в паре 2 клетки, а на пересечении 1 строки и 1 столбца ровно 1 клетка). Таким образом, нужных пар действительно $\frac{100 \cdot 400^{200}}{2_1} = 20000$.

Чтобы добиться конкретной ~~организовать хотя бы 1 из~~ симметрии, нужно закрасить ровно 4 ~~пары~~ из 20000 пар, соответствующих данной симметрии. Количество

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

способов сделать ~~такое~~ это равно C^4_{10000}. А как добиться всех 3 симметрий? Обратим ~~вним~~ внимание на то, что $(i;j)$, $(i;401-j)$; $(201-i;j)$ и $(201-i;401-j)$ одного цвета. Сколько таких четвёрок? Учитывая, что они не пересекаются (как и пары ранее), $\frac{200\cdot\cancel{400}^{100}}{\cancel{4}\cdot 1}=10000$ (аналогично). И чтобы добиться всех 3 симметрий, нужно закрасить равно 2 из 10000 таких четвёрок. Количество способов сделать это равно C^2_{10000}. Так как ~~такие~~ не ~~не~~ способы учитываются в ~~каждом~~ количестве способов для каждой из 3 симметрий, то общее кол-во способов добиться хотя бы одной симметрии равно $\boxed{3\cdot C^4_{10000}-2\cdot C^2_{10000}}$ (нужно учитывать C^2_{10000} 1 раз, а не 3 раза, как ранее).

$$\boxed{\text{Ответ: } 3\cdot C^4_{10000}-2\cdot C^2_{10000}}$$

Задача 6

Рассмотрим все случаи относительно остатков a и b при делении на 3:

$a \underset{3}{\equiv} ?$ (какой остаток при делении a на 3?) / $b \underset{3}{\equiv} ?$ (какой остаток при делении b на 3?)	0	1	2
0	$b-a \underset{3}{\equiv} 0$, то есть $(b-a) \vdots 3$. Противоречие с условием.	$\overset{710}{a^2+b} \underset{3}{\equiv} 1$, а $710 = 3\cdot 236+2$. Противоречие с условием.	$\overset{710}{a^2+b} \underset{3}{\equiv} 1$, а $710 = 3\cdot 236+2$. Противоречие с условием.
1	$\overset{710}{a^2+b} \underset{3}{\equiv} 1$, а $710 = 3\cdot 236+2$. Противоречие с условием.	$b-a \underset{3}{\equiv} 0$, то есть $(b-a) \vdots 3$. Противоречие с условием.	~~(возможность I)~~ $\begin{cases} b-a \underset{3}{\equiv} 2 \\ a^2+b \underset{3}{\equiv} 2 \end{cases}$ Всё корректно ~~(I случай)~~ (возможность I)
2	~~(возможность II)~~ $\begin{cases} b-a \underset{3}{\equiv} 2 \\ a^2+b \underset{3}{\equiv} 2 \end{cases}$ Всё корректно ~~(II случай)~~ (возможность II)	$\overset{710}{a^2+b} \underset{3}{\equiv} 0$, а $710 = 3\cdot 236+2$. Противоречие с условием.	$b-a \underset{3}{\equiv} 0$, то есть $(b-a) \vdots 3$. Противоречие с условием.

Далее $a<b \Leftrightarrow a-c<b-c$. Учтём это далее. К ~~вариантам~~ ~~случаям~~ возможностям I и II вернёмся позже.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\underset{\mathbb{Z}}{(a-c)}\underset{\mathbb{Z}}{(b-c)}=p^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow a<b & \text{(всё корректно) (случай а)} \\ \begin{cases} a-c=-p \\ b-c=-p \end{cases} \Rightarrow a=b & \text{(противоречие с условием)} \\ \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \Rightarrow a>b & \text{(противоречие с условием)} \\ \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases} \Rightarrow b>a & \text{(всё корректно) (случай б)} \\ \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow a=b & \text{(противоречие с условием)} \\ \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow a>b & \text{(противоречие с условием)} \end{array}\right.$$

Так как ~~число~~ p – простое число, то $p\in\mathbb{N}$ и $p\geq 2$

В случае а: $c=b+1 \Rightarrow a-b-1=-p^2 \Leftrightarrow b-a+1=p^2$.

~~Так как~~ В любой из возможностей I и II: $b-a \underset{3}{\equiv} 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b-a+1 \underset{3}{\equiv} 0$, то есть $p^2 \,\vdots\, 3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow b-a+1=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b=a+8 \Rightarrow a^2+(a+8)=702 \Leftrightarrow a^2+27a-26a-27\cdot 26=$

$=0 \Leftrightarrow (a+27)(a-26)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\underset{\equiv_3 0}{-27} \Rightarrow b=\underset{\equiv_3 2}{-19} \Rightarrow c=-18 \\ a=\underset{\equiv_3 2}{26} \Rightarrow b=\underset{\equiv_3 1}{34} \Rightarrow c=35 \end{array}\right.$

Как видим, при $a=-27$ реализуется возможность II, а при $a=26$ реализуется возможность I.

В случае б: $c=a-1 \Rightarrow b-a+1=p^2$. Аналогично $p=3$ и

$b=a+8 \Rightarrow$ (аналогично) $\left[\begin{array}{l} a=-27 \Rightarrow b=-19 \Rightarrow c=-28 \text{ (возможность II)} \\ a=26 \Rightarrow b=34 \Rightarrow c=25 \text{ (возможность I)} \end{array}\right.$

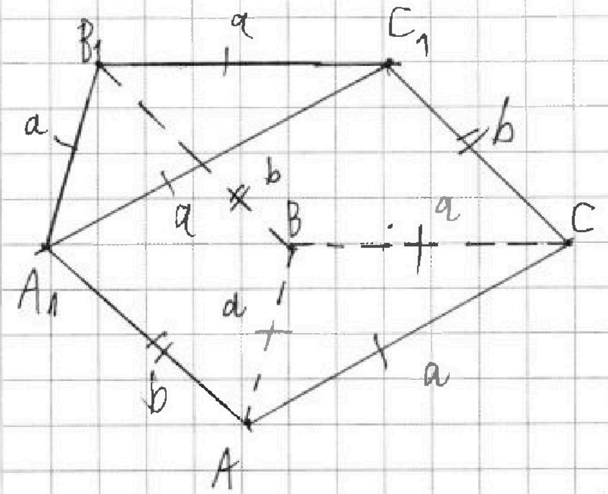
$\boxed{\text{Ответ: } (-27;\,-19;\,-28);\ (-27;\,-19;\,-18);\ (26;\,34;\,25);\ (26;\,34;\,35)}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: ΔABC равност.;
$ABCA_1B_1C_1$ — призма;
$S_{A_1B_1BA} = S_{A_1C_1CA} = 3$;
$S_{B_1C_1CB} = 2$.

Найти: $V_{ABCA_1B_1C_1}$

Решение:

По св. призмы: $A_1A = BB_1 = CC_1 =$ (пусть) b.

~~AB~~ ΔABC равност. $\Rightarrow AB = BC = AC =$ (пусть) a.

По св. призм: $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = a$.

По св. равност. Δ-а: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4\sqrt[4]{27}}{9}$

$\Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$.

По св. пр.: A_1B_1BA, A_1C_1CA, B_1C_1CB — параллелограммы $\Rightarrow S_{AA_1B_1B} = ab\sin(\angle A_1AB)$; $S_{AA_1C_1C} = ab\sin(\angle A_1AC)$; $S_{BB_1C_1C} = ab\sin(\angle C_1CB)$.

Из условия:
$$\begin{cases} \frac{2\sqrt[4]{27}}{3} b\sin(\angle A_1AB) = 3 \\ \frac{2\sqrt[4]{27}}{3} b\sin(\angle A_1AC) = 3 \\ \frac{2\sqrt[4]{27}}{3} b\sin(\angle C_1CB) = 2 \end{cases}$$

Значит $\sin(\angle A_1AB) = \sin(\angle A_1AC)$, а $\sin(\angle A_1AB) : \sin(\angle C_1CB) = 3 : 2$.

$V_{ABCA_1B_1C_1} = h \cdot S_{\Delta ABC} = h$. Ищем h.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t+3}}\cdot(\sqrt{3-t}-1)-\frac{1}{\sqrt{3-t}}\cdot(\sqrt{t+3}+1)\right)$

$a^2+b=710=3\cdot 236+2$

b\a	0	1	2
0	0	1	1
1	1	2	2
2	2	0	0

b\a	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\equiv 0\\ b\equiv 2\end{cases}\\ \begin{cases}a\equiv 2\\ b\equiv 1\end{cases}\end{array}\right.$ (mod 3)

~~$12+15\sqrt{3}$~~ $27+12\sqrt{3}$

$9\cdot 78=3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 13$

$(a-c)(b-c)=p^2$

$4pt^3-3pt+3pt+72t$

$702=$ $12t^2-6+12$

~~$a^2+b=710$~~

$(\sqrt{3}+1)^3$

p^2

отрицательные есть числа

~~$b-a$~~ $=9+a$

$c=a-1$

$b=a+8$

$b-a+1=9$

$a^2+a-702=0$

$ab\sin(\alpha)=3$

$ab=2$

$(-27;-19;-28)$

$(a+27)(a-26)$

$(26;34;25)$

$1\to 0$

$2\to$

$1-2\sqrt{3}$

$3\cdot C^4_{20000}-2C^2_{10000}$

20000 $C^4_{20000}+C^4_{20000}+C^4_{20000}-2C^2_{10000}$

$\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}+3}+1\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{\frac{3}{2}}}-1\right)=7$

$\frac{a^2}{}=\frac{\sqrt[4]{27}}{}\Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$

$(t+3)^6+(3-t)^6+\frac{9}{2}$

$ab\sin(\alpha)$

$-1\to -7$

$-\frac{1}{2}\to -\frac{5}{4}$

$-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$k^2=x^2+y^2-2xy\cos(\alpha)$

$m^2=y^2+z^2+2yz\cos(\alpha)$

$n^2=x^2+z^2-2xy\cos(\beta)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

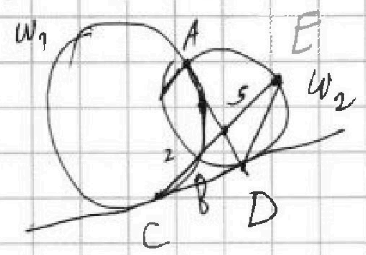
$a^3 = 9 - 9ab^2$

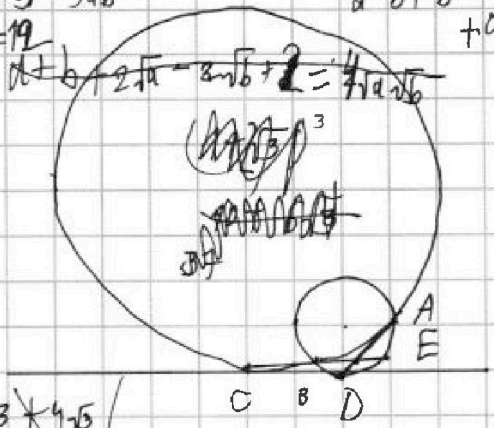
$3a^2b + 3b^3 = 12$

$a^2b + b^3 = 4$

$+\infty$

$9 + 7\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^3$





$-5W + 36$

$-3W + 36$

9

$5W + 36$

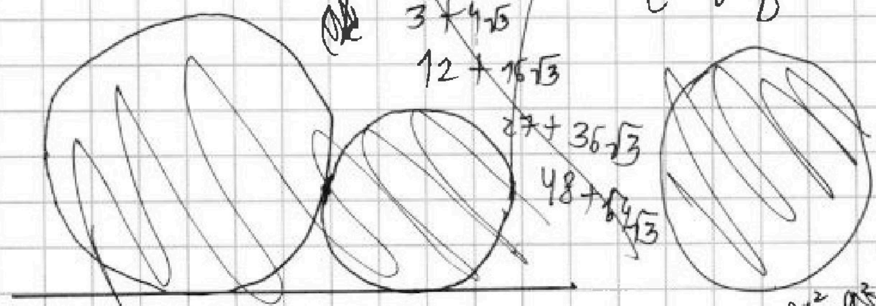
$+\infty$

$3 + 4\sqrt{3}$

$12 + 16\sqrt{3}$

$27 + 36\sqrt{3}$

$48 + 64\sqrt{3}$



$t + 3$ $\quad 4(y - t^2 + z)$

16 $\quad 3 - t - 4z$

$(a\sqrt{t+3} - b\sqrt{3-t} + c)^2$

$6a^2 + c^2 -$

$-(x+2)^2 + 9 + z + 4 - 2a^2\sqrt{9-t^2} +$

$+ 2ac\sqrt{t+3} - 2bc\sqrt{3-t}$

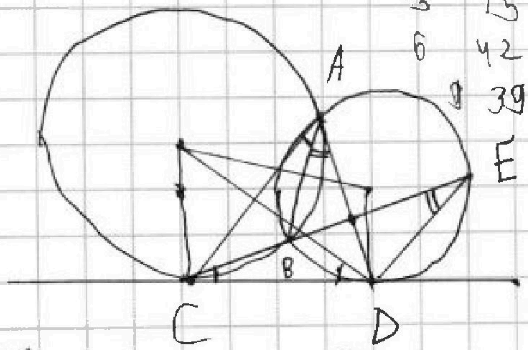
3 45

6 42

9 39

12

$(x+2) + 3$



$\sqrt{t+3} - \sqrt{3 - t - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - t^2 + z + 4}$

$2ac = 1$

$c^2 = \quad b^2 - 2$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{6 - t - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z + 20} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81 - z^2} \end{cases}$$

$x \geq -5$

$y - 4x - x^2 + z$

$x + 4z \leq 1$

$1 - x - 4z$

$y - 4x - x^2 + z$

$(a+1)(b-1) = 5$

$6a^2 + c^2 - 2a^2\sqrt{9-t^2} + 2ac\sqrt{t+3} -$

$-2ac\sqrt{3-t} - b^2$

$\sqrt{t+3}$ $\quad \sqrt{3-t}$

$(1 + 4\sqrt{3})^3$