



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a, b, c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in \mathbb{R} : \exists \text{ геом прогрессия } \text{также, что } a_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, a_{10} = x+4,$$

$$a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \Rightarrow$$

$$a_4 = a_1 q^3, a_{10} = a_1 q^9, a_{12} = a_1 q^{11} \quad (a_1 \text{ и } q \neq 0)$$

$$\frac{a_{12}}{a_4} = (x-3)^2 = q^8, a_4 = a_{12} = \sqrt{\frac{(15x+6)^2}{(x-3)^2}} = \left| \frac{15x+6}{x-3} \right| = a_1^2 q^{14}$$

$$a_{10}^2 = a_1^2 q^{18} = (x+4)^2 \Rightarrow \frac{a_{10}^2}{a_4 \cdot a_{12}} = q^4 = \frac{(x+4)^2}{\left| \frac{15x+6}{x-3} \right|} \Rightarrow$$

$$q^8 = (x+4)^4 \cdot \frac{(x-3)^2}{(15x+6)^2} = (x-3)^2 \quad ((x-3) \neq 0) \text{ поделим на } (x-3)^2$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2 \Rightarrow ((x+4)^2 - 15x - 6)((x+4)^2 + 15x + 6) = 0$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x^2 + 23x + 22) = 0$$

$$(x-5)(x-2)(x+22)(x+1) = 0$$

$$x=5; x=2; x=-22; x=-1;$$

$$a_1 \text{ и } q \neq 0, \text{ т.к. если } a_1 \text{ или } q = 0, \text{ то } a_4 = a_{10} = a_{12} = 0 \Rightarrow$$

$$x+4=0 \text{ и } 15x+6=0 \text{ (это не правда)} \Rightarrow a_1 \text{ и } q \neq 0 \Rightarrow$$

$$a_4, a_{10}, a_{12} \neq 0 \Rightarrow x+4 \text{ и } 15x+6 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \text{ и } x \neq -\frac{2}{5}$$

$$\text{и } x \neq 3 \text{ (т.к. } x-3 \text{ в знаменателе)}$$

Тогда при  $x=5, x=2, x=-22, x=-1 \exists a_1 \text{ и } q$  (q находим из уравнения  $(x-3)^2 = q^8, a_1$  и  $a_{10}$ )

Ответ: 5, 2, -22, -1;





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

Если  $y < 20$ , то  $|y-20| + 2|y-35| = (35-y) \cdot 2 + 20-y \Rightarrow$   
 $|y-20| + 2|y-35| > 2 \cdot 15$ , но  $\sqrt{225-z^2} \leq 15 \Rightarrow y \geq 20$ ;

Если  $y > 35$ , то  $|y-20| + 2|y-35| = 20-y + (35-y) \cdot 2 > 15$ , но  $\sqrt{225-z^2} \leq 15$

Значит,  $20 \leq y \leq 35 \Rightarrow$

$$\sqrt{225-z^2} = (35-y) \cdot 2 + y-20 = 50-y \geq 50-35 \geq 15, \text{ но } \sqrt{225-z^2} \leq 15$$

$\Rightarrow y = 35, z = 0$ ; Тогда 1-ое уравнение имеет вид:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = a \geq 0 \\ \sqrt{5-x} = b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 12; \text{ и } a - b + 6 = 2ab$$

Пусть  $a - b = k, 2ab = l \Rightarrow k + 6 = l$  и  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$   
 $\Rightarrow k^2 = 12 - l \Rightarrow k + 6 = l$  и  $l = 12 - k^2 \Rightarrow$

$$k + 6 = 12 - k^2 \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow (k+3)(k-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 2 \end{cases}$$

1 случай:  $k = 2 \Rightarrow l = 8 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ ab = 4 \end{cases} \Rightarrow (2+b)b = 4$

$$\Rightarrow b^2 + 2b - 4 = 0 \Rightarrow b = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}, b \geq 0 \Rightarrow b = \sqrt{5} - 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{5} + 1 \text{ и } b = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow x = 6 + 2\sqrt{5} - 7 = 2\sqrt{5} - 1 \\ \sqrt{5-x} = \sqrt{5} - 1 \Rightarrow x = 5 - 6 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

Тогда  $x = 2\sqrt{5} - 1, y = 35, z = 0$

2 случай:  $k = -3 \Rightarrow l = 3 \Rightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ 2ab = 3 \end{cases} \Rightarrow b = a + 3 \Rightarrow 2a(a+3) = 3$   
 $2a^2 + 6a - 3 = 0$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{4} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}, a \geq 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15} - 3}{2};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{15} + 3}{2} \Rightarrow \sqrt{x+7} = \frac{\sqrt{15} - 3}{2} \Rightarrow x = -\frac{6\sqrt{15} + 4}{4} \\ a = \frac{\sqrt{15} - 3}{2} \Rightarrow \sqrt{5-x} = \frac{\sqrt{15} + 3}{2} \Rightarrow x = -\frac{6\sqrt{15} + 4}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{15} + 2}{2} \\ y = 35; z = 0 \end{cases}$$

Ответ:  $(-\frac{3\sqrt{15} + 2}{2}; 35; 0)$  и  $(2\sqrt{5} - 1; 35; 0)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти все  $p$ : есть  $\geq 1$  решение  $y$  уравнения

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 \cos^3 x + 3 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p \\ 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \end{array}$$

Пусть  $\cos x = a$ , где  $|a| \leq 1 \Rightarrow 4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = p$ ;

Если  $\exists \geq$  одно  $a: |a| \leq 1$ , то  $\exists$  решение для  $x$ ;

$$\underbrace{4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = p}_{f(a) \Rightarrow f(a) = p} \quad |a| \leq 1 \quad f'(a) = 12a^2 - 12a + 3 = 3(2a-1)^2 \geq 0$$

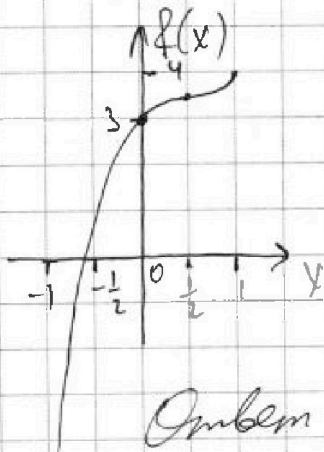
$\Rightarrow f(a) \nearrow$  при  $|a| \leq 1$ ;

$$f''(a) = 24a - 12 = (2a-1) \cdot 12, \text{ если } a \leq \frac{1}{2}, \text{ то } f''(a) < 0$$

$\Rightarrow f(a)$  выпукла вверх, если  $a > \frac{1}{2}$ , то  $f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$  выпукла вниз;

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10, \quad f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4, \quad f(0) = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{4 - 12 + 12}{8} + 3 = 3,5$$



$f(x) = p$  - это горизонтальная прямая и она пересекает  $f(x) \Rightarrow$

$-10 \leq p \leq 4$ , т.к.  $f(x) \nearrow$ , то решение для  $\forall p$  единственное;

Остаток можно угадать без калькулятора в зависимости от  $p$ , но есть сказать, что  $x = k(p)$  найдется;

Ответ:  $-10 \leq p \leq 4$



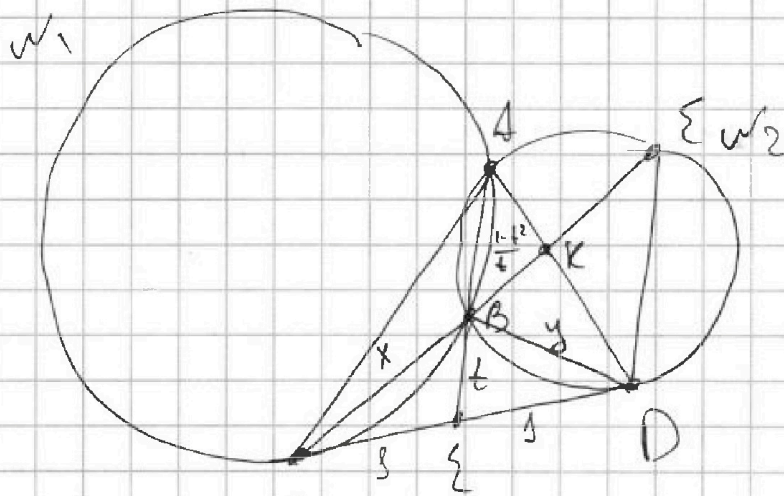


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{ED}{CD} = ?$

Если  $\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$

AB-радиус осей  $w_1, w_2$   
 $\Rightarrow E$  - середина  $CD$ ;  
 Пусть  $CE = ED = 1$   
 Пусть  $CB = x, BD = y$   
 $\triangle CBD$   
 по т. касан. найдем  $BE$ :

$$x^2 = 1+t^2 - 2t \cos \alpha \quad (\triangle CEB) \Rightarrow x^2 y^2 = 2 + 2t^2 \Rightarrow x^2 y^2 - 2 = 2t^2$$

$$y^2 = 1+t^2 - 2t \cos \beta \quad (\triangle BED)$$

ст точки E от  $w_1$ :  $8 \cdot 1 = t \cdot EA \Rightarrow EA = \frac{1}{t} \Rightarrow BA = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}$

$\triangle BED \sim \triangle DEA$  ( $ED$  - кас к  $w_2$ )  $\Rightarrow \frac{AD}{y} = \frac{1}{t} \Rightarrow AD = \frac{y}{t}$

По т. Менелая в  $\triangle EAD$

и применим  $CBK$ :

$$\frac{DK}{KA} \cdot \frac{1-t^2}{t^2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{DK}{KA} = \frac{2t^2}{1-t^2} \quad \text{и} \quad DK + KA = \frac{y}{t}$$

$$\Rightarrow DK = \frac{2t^2}{1+t^2} \cdot \frac{y}{t} \quad \text{и} \quad KA = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{y}{t}$$

$\triangle CBD \sim \triangle CDE$  ( $CD$  кас к  $w_2$ )  $\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{DB}{BC} = \frac{y}{x}$

ст точки C от  $w_2$ :  $y = x \cdot CE \Rightarrow CE = \frac{y}{x} \Rightarrow BE = \frac{y}{x} - x = \frac{y-x^2}{x}$

ст точки K от  $w_2$ :  $BK \cdot BE = AK \cdot KD = \frac{2t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{y^2}{t^2}$

$$\Rightarrow BK \cdot KE = \frac{2(1-t^2)y^2}{(1+t^2)^2} \quad \text{и} \quad BK + KE = \frac{y-x^2}{x}$$

Но  $\frac{x+BK}{KE} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{x+BK+KE}{KE} = \frac{34}{25}$

$$\frac{y}{x \cdot KE} = \frac{34}{25} \Rightarrow KE = \frac{100}{34x} \Rightarrow BK = \frac{y-x^2}{x} - \frac{100}{34x} = \frac{36-34x^2}{34x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BK \cdot KE = \frac{2(1-t^2)y^2}{(1+t^2)^2}, \quad BK = \frac{36-34x^2}{34x}, \quad KE = \frac{100}{34x}$$

$$t^2 = \frac{x^2 y^2 - 2}{2}, \quad \text{хотим найти } y = ?$$

$$\frac{(36-34x^2)100}{34^2 x^2} = \frac{2(1-t^2)y^2}{(1+t^2)^2} \Leftrightarrow \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{(36-34x^2)100}{34^2 x^2 y^2}$$

$$1-t^2 = 1 - \frac{x^2 y^2 - 2}{2} = \frac{2 - x^2 y^2 + 2}{2} = \frac{4 - x^2 y^2}{2}$$

$$1+t^2 = 1 + \frac{x^2 y^2 - 2}{2} = \frac{x^2 y^2}{2}$$

$$\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2 \cdot \frac{4-x^2 y^2}{2}}{\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right)^2} = 4 = \frac{4-x^2 y^2}{(x^2 y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4-x^2 y^2}{(x^2 y^2)^2} = \frac{25(36-34x^2)}{34^2 x^2 y^2} \quad \text{Пусть } y = ax \Rightarrow y^2 = a^2 x^2$$

$$\frac{4-x^2(1+a^2)}{x^4(1+a^2)^2} = \frac{25(36-34x^2)}{34^2 x^4 a^2} \quad | \cdot x^4 \Rightarrow \frac{4-x^2(1+a^2)}{(1+a^2)^2} = \frac{25(36-34x^2)}{34^2 a^2}$$

$$4 \cdot 34^2 a^2 - x^2(1+a^2)34^2 a^2 = 25(36-34x^2)(1+a^2)^2 =$$

$$= 25 \cdot 36 \cdot (1+a^2)^2 - 25 \cdot 34x^2(1+a^2)^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 34^2 a^2 - 25 \cdot 36(1+a^2)^2 + 25 \cdot 34x^2(1+a^2)^2 - x^2(1+a^2)34^2 a^2 = 0$$

$$4(34a - 5 \cdot 3(1+a^2))(34a + 5 \cdot 3(1+a^2)) + 34x^2(1+a^2)(25+25a^2 - 34a^2) = 0$$

$$4(15a^2 + 34a + 15)(34a - 15a^2 - 15) + 34x^2(1+a^2)(25 - 9a^2) = 0$$

$$a = \frac{5}{3}: 15a^2 - 34a + 15 = 15(a - \frac{5}{3})(a - \frac{3}{5}) \Rightarrow 34a - 15a^2 - 15 = (a - \frac{5}{3})(\frac{9}{5} - a)15$$

$$a = -\frac{5}{3}: 15a^2 + 34a + 15 = 15(a + \frac{5}{3})(a + \frac{3}{5})$$

$$4(15a^2 + 34a + 15)(34a - 15a^2 - 15) = 4 \cdot 15^2 (a^2 - \frac{25}{9})(\frac{9}{25} - a^2)$$

$$(a^2 - \frac{25}{9})(4 \cdot 15^2 (\frac{9}{25} - a^2) + 34x^2(1+a^2) \cdot 9) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3} \text{ или}$$

$$34x^2(1+a^2)9 + (a^2 - \frac{9}{25}) \cdot 4 \cdot 15^2 = 0, \text{ но } a > 1, \text{ т.к. } ED > DC;$$

$$\text{Значит } \Sigma > 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}; \quad \text{Ответ: } \frac{5}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 3\cos 2x = 6\cos^2 x - 3 \quad f(a) = 4a^3 - 6a^2 + 3a + 3$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^2 x + p - 3$$

$$f'(a) = 12a^2 - 12a + 3 =$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x = p - 3$$

$$= 3(4a^2 - 4a - 1) = 3(2a-1)^2$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$$

$$f''(a) = 24a - 12 = 12(2a-1)$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 - p = 0 \quad |a| \leq 1$$

$$a < \frac{1}{2} \quad f''(a) < 0 \Rightarrow \text{впадин}$$

$$4a^3 + 6a^2 + 3a + 3 = p$$

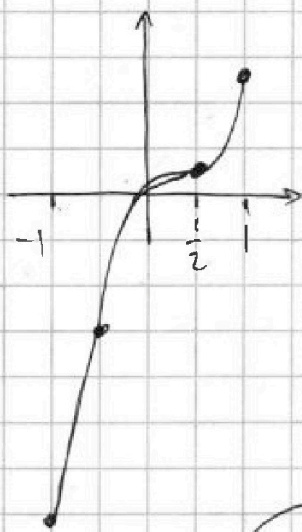
$$a > \frac{1}{2} \quad f''(a) > 0 \Rightarrow \text{выпукл}$$

$$f(a) \text{ при } |a| \leq 1$$

$$f(x) = \dots$$

$$f(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2$$



$$-10$$

$$-4 - 6 + 3 + 3 = 0$$

$$4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$f(-1) = -4 - 6 + 3 + 3 = 0$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$2 \leq p \leq 4$$

$$p = 2 + k \quad (0 \leq k \leq 2)$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 3 = 2 + k$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 = k \quad (0 \leq k \leq 2)$$

$$-10 \leq p \leq 4$$

$$p = -10 + t$$

$$(0 \leq t \leq 14)$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 \quad |a+1$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 = k$$

$$\begin{array}{r} 4a^3 + 4a^2 \\ -10a^2 + 3a \\ -10 - 10a \\ \hline 16a + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4a^3 - 6a^2 + 3a + 1 \\ -4 - 6 - 3 + 1 \\ \hline 4a^3 - 6a^2 + 3a + 13 = t \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4a^3 - 6a^2 + 3a + 13 \quad |a+1 \\ 4a^3 + 4a^2 \\ -10a^2 + 3a \\ -10a^2 - 10a \\ \hline 13a + 13 \end{array}$$

$$(a+1) \mid (4a^2 - 10a + 13) = t$$

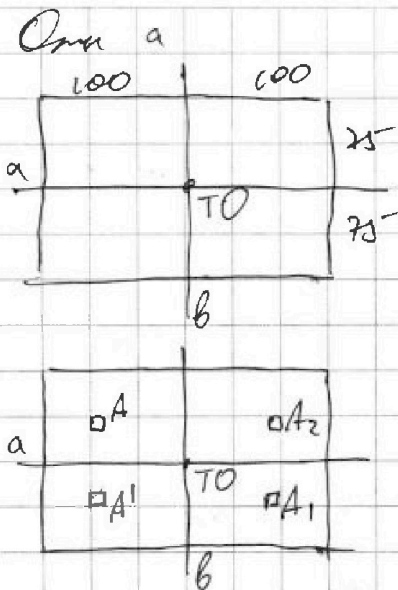


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Тогда в верхней половине  
необходимо выбрать 4 клетки  
 $C_{15000}^4$ ;

Тогда мы получаем ещё  
семь отки  $TO$  и др  $b$ ;

Посмотрим на сим. отки  $a$  и  $b$

Отки же есть клетка  $A$   
или симм отки  $a$  клетка  $A_1$ ;

или симм отки  $b$  клетка  $A_1$ ;

или симм отки  $a$  клетка  $A_2$ ;

Тогда хотим выбрать 2 клетки  
в каком-то квадрате, это  
 $C_{7500}^2$ ;

Но сим. отки  $a$  и  $b$  или отки  $a$  и  $TO$  совпадают  $\Rightarrow$

необходимо только один раз вычесть  $C_{7500}^2$ ;

Тогда только отки  $a$  без  $b$  и  $TO$ :  $C_{15000}^4 - C_{7500}^2$

$\rightarrow$  общее кол-во равно  $3 C_{15000}^4 - 2 C_{7500}^2$ ;

Ответ:  $3 C_{15000}^4 - 2 C_{7500}^2$



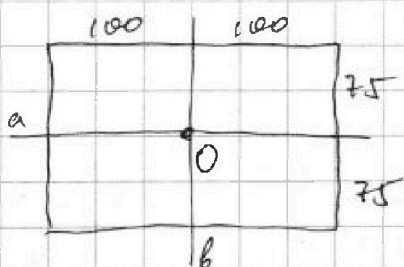


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

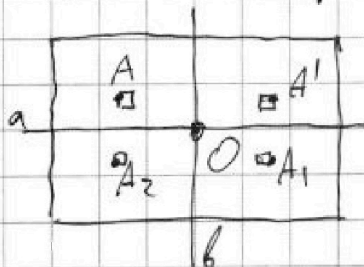


Посчитаем кол-во симметрий относительно  $b$ ;  
Значит, мы выделали слева от  $b$  4 клетки и берем симметрии в правой части;

$C_{15000}^4$  (отн  $b$ )  
 $C_{15000}^4$  (отн  $TO$ )

Теперь посчитаем отн  $TO$ ;  
Это значит, что слева от  $b$  снова 4 клетки и мы их симметрием отн.  $TO$   
То есть опять выделали 4 из половины доск сложили их, тогда

мы посчитаем симметрию отн.  $TO$  и прямой  $b$ .  
Единицы и дванди посчитали симметрию отн.  $TO$  и прямой  $b$  вместе взятый;  
То есть необходимо вывести  $X$  (кол-во симметрий отн.  $TO$  и пр  $b$ )



Пусть есть клетка  $A$ , симм. ей симм.  $A'$  отн.  $b$   
Симметр  $A_1$ , отн.  $O$  и симм.  $A_2$  отн.  $O$   
Клетка  $A_2$  симм.  $A_1$  отн.  $O$

Получим прямоугольный симметр отн.  $a, b, TO$

Значит необходимо выделить еще 3 <sup>клетки</sup>  $B$

какую-то; Тогда от хотим выделить 3 клетки в левом верхнем квадрате (отличные взаимодвигая един. способ)  $\rightarrow X = C_{2500}^3$

$2C_{15000}^4 - C_{2500}^3$  это отн.  $b$ , отн.  $TO$ ;

Теперь хотим добавить кол-во симметрий отн.  $a$ , без  $b$  и  $TO$ ;

Посчитаем возможные симметрии отн.  $a$ ;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{Z} \\ a > b \\ a - b \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$

$$a > b \Rightarrow (a-c) > (b-c) \Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \Rightarrow a-b = p^2 - 1 \end{cases}$$

т.к.  $p^2 = p \cdot p, 1 \cdot p^2$   
↑  
не возможно, т.к.  $a > b$

$$a - b = p^2 - 1 \text{ и } a - b \not\equiv 3$$

$$\text{Если } p \not\equiv 3, \text{ то } p \equiv \pm 1 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \Rightarrow a - b \equiv 0$$

$$\text{Значит, } p \equiv 3, \text{ } p\text{-натуральное} \Rightarrow p = 3 \Rightarrow a - b = 8$$

$$\begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b = 812 \Rightarrow b^2 + b - 812 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249 = 57^2$$

$$\Rightarrow b = \frac{-1 \pm 57}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 28 \Rightarrow a = 36 \\ b = -29 \Rightarrow a = -21 \end{cases}$$

Итак

$$b = 28, a = 36 \text{ и } b - c = 1 \Rightarrow c = 27 \quad (36; 28; 27)$$

$$b = 28, a = 36 \text{ и } a - c = 1 \Rightarrow c = 37 \quad (36; 28; 37)$$

$$b = -29, a = -21 \text{ и } b - c = 1 \Rightarrow c = -30 \quad (-21; -29; -30)$$

$$b = -29, a = -21 \text{ и } a - c = 1 \Rightarrow c = -20 \quad (-21; -29; -20)$$

$$\text{Ответ: } (36; 28; 27), (36; 28; 37), (-21; -29; -30), (-21; -29; -20);$$



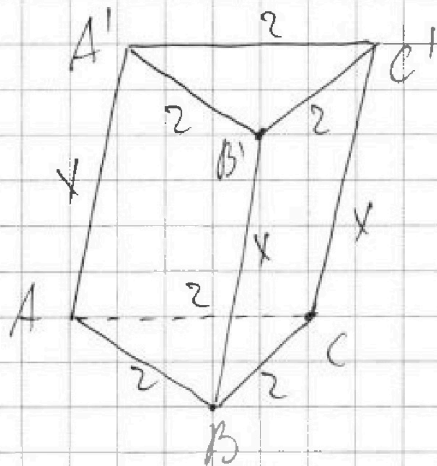


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



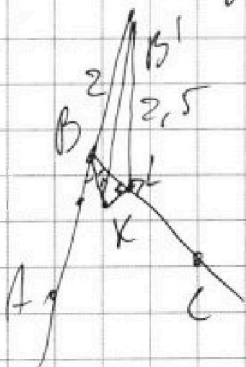
$$S_{ABB'A'} = S_{BCC'B'} = 5$$

По длине стороны и площади параллелограмма однозначно задается  $\Rightarrow$  четырехугольники  $ABB'A'$  и  $BCC'B'$  равны;

и это

Тогда заметим, что картинка симметрична относительно плоскости, проходящей через середину отрезка  $AC$  ( $TM$ ), точку  $B$  и перпендикулярную плоскости  $(ABC)$ ; (назовем эту плоскость  $\alpha$ )

Посмотрим на  $\angle AA'B'C'$  глазами параллельно



Спроецируем  $B'$  в  $m$   $(ABC)$  в  $K$

Тогда из симметрии  $BK$  для  $\angle ABC$  и  $BK \perp KB'$

Также заметим, что  $m$  — картинка симметрична отн.  $\alpha$ , то высота в  $AA'C'C$  совпадает по длине с  $B'B$

(прямо  $AA'C'C$  — прямоугольник

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x=2} \quad (S_{AA'C'C}) \Rightarrow KB' = 2$$

Спроецируем  $B'$  на  $AB$  в  $L$ : Тогда  $B'L \cdot 2 = 5$

$$\Rightarrow B'L = 2,5$$

По теореме о трех  $\perp$ :  $KL \perp BC$ ;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$-\frac{1}{2}$   $-\frac{1}{2}$   
3 0  
3,5  $\frac{1}{2}$   
4 1

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-3)(x-3,5)(x-4)}{(-\frac{1}{2}-3)(-\frac{1}{2}-3,5)(-\frac{1}{2}-4)} + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-4)}{(3,5-\frac{1}{2})(3,5-3)(3,5-4)} + 1 \cdot \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-3,5)}{(4+\frac{1}{2})(4-3)(4-3,5)}$$

$$y = +\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-3)(x-3,5)(x-4)}{+3,5 \cdot +4 \cdot +4,5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-4)}{4 \cdot 0,5 \cdot -\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-3,5)}{4,5 \cdot 1 \cdot 0,5}$$

$$y = \frac{(x-3)(x-3,5)(x-4)}{7 \cdot 4 \cdot 4,5} - \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-4)}{4 \cdot 0,5 \cdot 2} + \frac{(x+\frac{1}{2})(x-3)(x-3,5)}{4,5 \cdot 0,5}$$

$$y = \frac{(x-3)(2x-7)(x-4)}{7 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{(2x+1)(x-3)(x-4)}{4} + \frac{(2x+1)(x-3)(2x-7)}{9}$$

$$y = \frac{(x-3)(x-4)}{4} \left( \frac{2x-7}{7 \cdot 9} - 2x-1 \right) + \frac{(2x+1)(x-3)(2x-7)}{9} =$$

$$= \frac{(x-3)(x-4)}{4} \left( \frac{2x-7}{63} - 2x-1 \right) + \frac{(2x+1)(x-3)(2x-7)}{9}$$

$$\frac{2x^3}{7 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{2x^3}{4} + \frac{2x^3}{9} \quad \begin{matrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & 15000 & 7500 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 & 9 & 4 \\ 4 & & 4 \end{matrix}$$

$$2x^3 -$$

$$\frac{1}{7 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{7 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{63}{4 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{28}{7 \cdot 4 \cdot 9}$$

$$\frac{29}{63} - \frac{29}{63} + \frac{63}{63} = \frac{34}{7 \cdot 4 \cdot 9}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - 1 = p - 4$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - 1 \stackrel{a=1}{=} 0$$

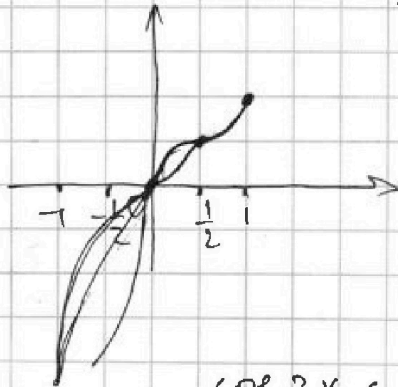
$$\begin{array}{r} 4a^3 - 4a^2 \\ -2a^2 + 3a \\ -2a^2 + 2a \\ \hline a - 1 \end{array}$$

$$(a-1)(3a^2 + (a-1)^2) = p - 4$$

$$\begin{array}{l} < 0 & \geq 0 \\ 4a^3 - 6a^2 + 3a = p - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p - 4 \leq 0 \\ p \leq 4 \end{array}$$

$$a(4a^2 - 6a + 3) = f(a) \quad D = 36 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$$



$$\begin{aligned} f'(a) &= 12a^2 - 12a + 3 = \\ &= 3(4a^2 - 4a + 1) = \\ &= 3(2a - 1)^2 \geq 0 \\ & \quad a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4 - 6 + 3 = 1$$

$$\frac{1}{2}(1 - 3 + 3)$$

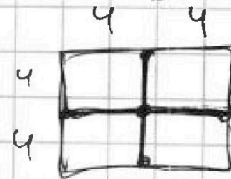
$$-1(4 + 6 + 3) = -13$$

$$-13 \leq p - 3 \leq 1$$

$$\boxed{-10 \leq p \leq 4}$$

$$\cos 3x = 6 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$-10 \leq \leq 10$$



$$C_{15000}^4$$

$$C_{a-x}$$

$$15 \cdot \frac{5}{3} = x = 15$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2-z} \\ |4-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \leq 15 \end{cases}$$

$$\text{или } y \leq 20, \text{ или } y \geq 35 \Rightarrow 20 \leq y \leq 35$$

$$y - 20 + 2(35 - y) = \sqrt{225 - z^2}$$

$$15 \leq 50 - y = \sqrt{225 - z^2} \leq 15$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+7} = a, \sqrt{5-x} = b$$

$$2ab - a + b - 6 = 0$$

$$2ab - a + b = 6 \Rightarrow b = \frac{a+6}{2a-1}$$

$$b^2 = \left(\frac{a+6}{2a-1}\right)^2$$

$$x = a^2 - 7$$

$$5 - \left(\frac{a+6}{2a-1}\right)^2 = x = a^2 - 7$$

$$\frac{20a^2 + 20a + 5 - a^2 - 12a - 36}{4a^2 - 4a + 1} = a^2 - 7$$

$$4a^4 + 4a^3 - 46a^2 - 36a + 24 = 0$$

$$\boxed{y=35 \quad z=0}$$

$$\boxed{5 \geq x \geq -7}$$

$$2ab - a + b - 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = a^2 - 7 \\ 5 - b^2 = x \end{cases}$$

$$5 - \frac{a^2 + 12a + 36}{4a^2 - 4a + 1}$$

$$\begin{aligned} 16a^2 + 8a - 31 &= 4a^4 + 4a^3 + a^2 \\ &- 28a^2 - 28a - 7 \end{aligned}$$





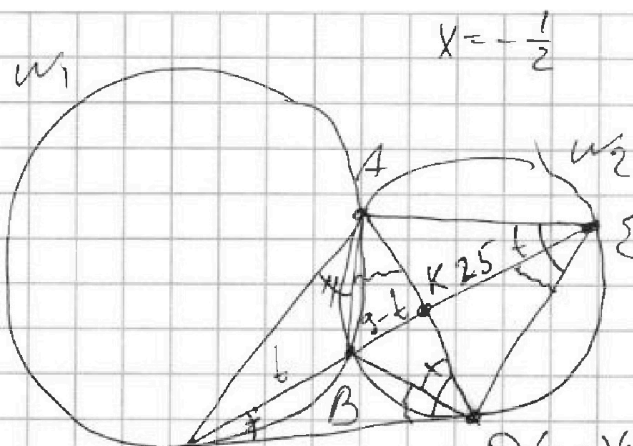


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{ED}{c} = ?$$

$$\begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 \\ 3,5 & \frac{1}{2} \\ 4 & 4 \end{matrix} \begin{matrix} ED \\ c \end{matrix}$$

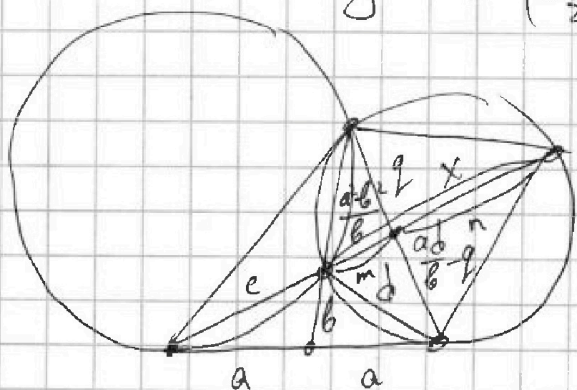
$$4 \cdot 4a^2 = c(c+x)$$

$$\frac{4a^2}{c} - c = x$$

$$\frac{4a^2 - c^2}{c}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot D(x-3)(x-3,5)(x-4) = \frac{4a^2 - c^2}{c}$$

$$\left(-\frac{1}{2}-3\right)\left(-\frac{1}{2}-3,5\right)\left(-\frac{1}{2}-4\right) = b(b+x)$$



$$\frac{a^2}{b} - b = x$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b} = x$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{m}$$

$$m = \frac{ad}{b}$$

$$\left(\frac{ad}{b} - q\right) \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{q}{2a} = 1$$

$$mn = \left(\frac{ad}{b} - q\right) q$$

$$m+n = \frac{4a^2 - c^2}{c}$$

$$\frac{ad}{bq} - 1 = \frac{2b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{ad}{bq} = \frac{2b^2}{a^2 - b^2} + 1 = \frac{2b^2 + a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$q = \frac{ad}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{ad}{b} - \frac{ad}{b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{ad}{b} \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{ad}{b} \left(\frac{a^2 + b^2 - a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) = \frac{ad \cdot 2b^2}{b(a^2 + b^2)} = \frac{2abd}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{2abd}{a^2 + b^2}$$



