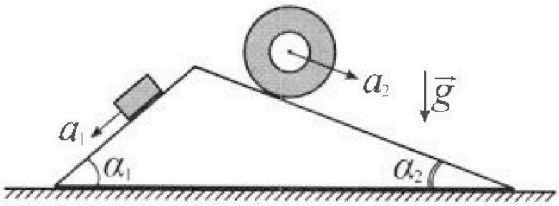
Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2024

Вариант 11-03

В ответах всех задач допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

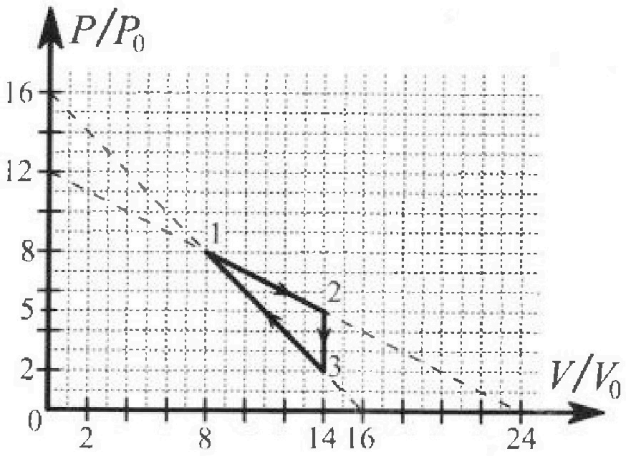
1. С клина, находящегося на шероховатом горизонтальном столе, соскальзывает брусок массой m с ускорением $a_1 = 6g/13$ и скатывается без проскальзывания полый цилиндр массой $2m$ с ускорением $a_2 = g/4$ (см. рис.). Клин остается в покое. Углы наклона поверхностей клина к горизонту $\alpha_1 (\sin\alpha_1 = 3/5, \cos\alpha_1 = 4/5)$ и $\alpha_2 (\sin\alpha_2 = 5/13, \cos\alpha_2 = 12/13)$. Направления всех движений лежат в одной вертикальной плоскости.



1) Найти силу трения F_1 между бруском и клином.
2) Найти силу трения F_2 между цилиндром и клином.
3) Найти силу трения F_3 между столом и клином.

Каждый ответ выразить через m и g с число вым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

2. С идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс 1-2-3-1. На рисунке представлена зависимость P/P_0 от V/V_0. Здесь V и P - объем и давление газа, V_0 и P_0 - некоторые неизвестные объем и давление.

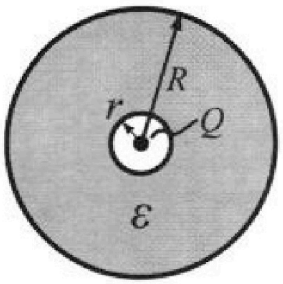


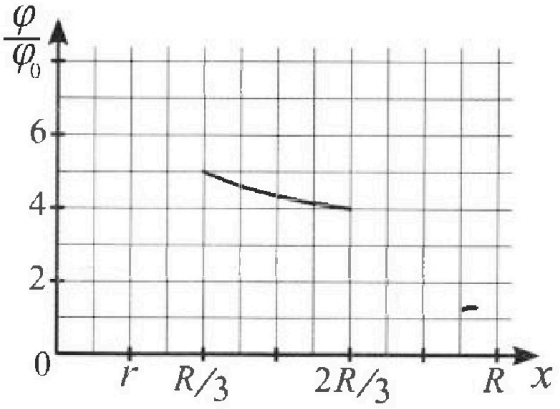
1) Найдите отношение модуля приращения внутренней энергии газа в процессе 1-2 к работе газа за цикл.
2) Найдите отношение максимальной температуры газа в процессе 1-2 к температуре газа в состоянии 3.
3) Найдите КПД цикла.

Ответы выразите числом в виде обыкновенной дроби или целого числа.

3. В центре полого шара с диэлектрической проницаемостью ε и радиусами поверхностей r и R находится шарик с зарядом Q (см. рис.). Известна графическая зависимость потенциала φ электрического поля внутри диэлектрика от расстояния x от центра полого шара в интервале изменений x от $R/3$ до $2R/3$ (см. рис.). Здесь φ_0 — потенциал в некоторой точке вне шара. Потенциал в бесконечно удаленной точке принят равным нулю.

1) Считая известными r, R, Q, ε, найти аналитическое выражение (в виде формулы) для потенциала внутри диэлектрика при $x = 5R/6$.
2) Используя график, найти численное значение ε.



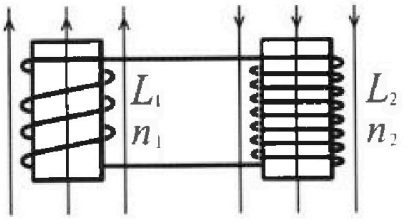


Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2024

Вариант 11-03

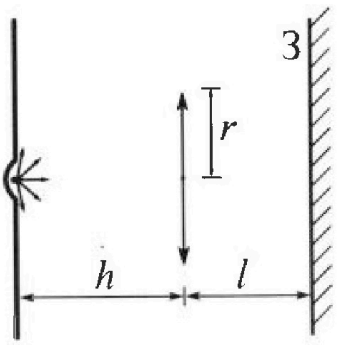
В ответах всех задач допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

4. Две катушки с индуктивностями $L_1 = L$ и $L_2 = 16L$ и числами витков $n_1 = n$ и $n_2 = 4n$ помещены во внешние однородные магнитные поля с постоянными во времени индукциями (см. рис.). Площадь витка каждой катушки S. Индукции внешних полей направлены перпендикулярно плоскостям витков катушек. Катушки находятся достаточно далеко друг от друга. Омическое сопротивление катушек и соединительных проводов пренебрежимо мало. Вначале тока в катушках нет.



1) С какой скоростью (по модулю) начнет из меняться ток в катушках, если в катушке с индуктивностью L_1 индукция внешнего поля начнет возрастать со скоростью $\Delta B / \Delta t = \alpha (\alpha > 0)$, а во второй катушке внешнее поле останется неизменным?
2) За некоторое время индукция внешнего поля в катушке с индуктивностью L_1 уменьшилась от B_0 до $B_0/3$, не изменив направления, а в катушке с индуктивностью L_2 индукция внешнего поля уменьшилась от $3B_0$ до $9B_0/4$, не изменив направления. Внешние поля в катушках изменялись неравномерно. Найти ток (по модулю) в катушках к концу изменения внешних полей. Ответ дать с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

5. В стене сделана небольшая выемка, внутри которой находится маленькая лампочка так, что прямой свет от лампочки на стену не попадает (см. рис.). Справа от лампочки на некотором расстоянии h расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = h/3$. Главная оптическая ось линзы горизонтальна и проходит через лампочку. Радиус линзы $r = 5$ см. Справа от линзы на расстоянии $l = 2h/3$ расположено параллельно стене плоское зеркало 3. Считать, что свет, идущий мимо линзы, проходит плоскость линзы беспрепятственно. Размеры стены и зеркала намного больше размеров линзы.



1) Найдите площадь неосвещённой части зеркала.
2) Найдите площадь неосвещённой части стены.

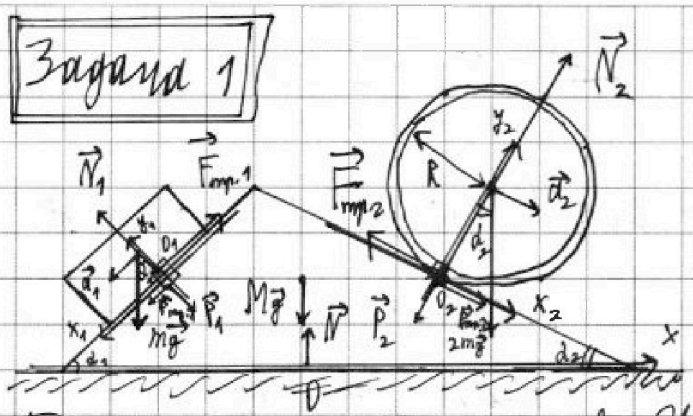
Ответы дайте в [см^2] в виде $\gamma\pi$, где γ - целое число или простая обыкновенная дробь.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1



($\vec{F}_{тр.1}$, действующую на клин, не указываем, так как не знаем её направление)

По II закону Ньютона в ИСО Земли:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр.1} = m\vec{a}_1 \text{ (брусок)} & (1) \\ 2m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр.2} = 2m\vec{a}_2 \text{ (цилиндр)} & (1.2) \\ M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_{тр.1} + \vec{P}_{тр.2} = \vec{0} \text{ (клин)} & (2) \end{cases}$$

Прокомментируем (1.2): центр тяжести полого цилиндра расположен в его геометрическом центре. Для цилиндра центр тяжести полого цилиндра имеет такое ускорение, как будто бы к нему была приложена единственная сила, действующая на цилиндр, и равная которой не равно 0, – это $\vec{F}_{тр.2}$; её момент силы $M_{тр.2} = F_{тр.2} R = I \cdot w' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (так как $v_{ср.} = v_{пост.}$ у цилиндра, то $w' = \frac{a_2}{R}$) $F_{тр.2} R =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$= 2m \cdot \vec{P}^{1}_{2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow$ ~~$a_2 = \frac{F_{вн.2}}{2m} \; F_{тр.2} = 2ma_2 =$~~

(1) в проекциях на ось O_1X_1: $mg\sin(\alpha_1) - F_{тр.1} = ma_1 \Leftrightarrow F_{тр.1} = m(g\sin(\alpha_1) - a_1) = m\left(g \cdot \frac{3}{5} - \frac{6g}{13}\right) =$

$= mg\left(\frac{39-30}{65}\right) = \boxed{\frac{9}{65}mg}$ (ответ на пункт 1)

(1) в проекциях на ось O_1Y_1: $-mg\cos(\alpha_1) + N_1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow N_1 = mg \cdot \frac{4}{5} = \frac{4mg}{5}$

(3) в проекциях на ось ~~O_2X_2~~ Ox: $-P_{тр.1}\cos(\alpha_1) +$

$+P_1\sin(\alpha_1) - P_2\sin(\alpha_2) + P_{тр.2}\cos(\alpha_2) + F_{тр.x} = 0$

По III закону Ньютона:

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = -\vec{N}_1 \Rightarrow \text{(в проекциях на } O_1Y_1) \; P_1 = N_1 \\ \vec{P}_{тр.1} = -\vec{F}_{тр.1} \Rightarrow \text{(в проекциях на } O_1X_1) \; P_{тр.1} = F_{тр.1} \\ \vec{P}_2 = -\vec{N}_2 \Rightarrow \text{(в проекциях на } O_2Y_2) \; P_2 = N_2 \\ \vec{P}_{тр.2} = -\vec{F}_{тр.2} \Rightarrow \text{(в проекциях на } O_2X_2) \; P_{тр.2} = F_{тр.2} \end{cases}$$

Значит: $-F_{тр.1} \cdot \frac{4}{5} + N_1 \cdot \frac{3}{5} - N_2 \cdot \frac{5}{13} + P_{тр.2} \cdot \frac{12}{13} + F_{тр.x} =$

$= 0 \Leftrightarrow$ ~~$F_{тр.x} =$~~ (3.1)

Так как ~~рассуждаем о цилиндре; пусть в какой-то~~ его центр тяжести момент он имеет скорость v. Рассмотрим время dt (малое время). За это время:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) непотенциальная сила трения $\vec{F}_{тр.2}$ совершает работу $A = -F_{тр.2} \cdot v\,dt$;

2) центр тяжести цилиндра опускается на $v\,dt \cdot \sin(\alpha_2) \Rightarrow \Delta E_п = -2mgv\sin(\alpha_2)dt$;

3) скорость центра масс увеличилась на $dv \Rightarrow$ $\Rightarrow$ вращательная скорость цилиндра тоже увеличилась на dv (так как $v_{вр.} = v_{пост.}$ у цилиндра) $\Rightarrow \Delta E_{к.пост.} = \frac{2m \cdot v^2}{2} + \frac{2m \cdot (v+dv)^2}{2} =$

$= -mv^2 + (mv^2 + 2mv\,dv + m(dv)^2) \approx 2mv\,dv$ и

$\Delta E_{к.вр.} = \frac{I\omega_1^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{2m \cdot R^2}{2}\left(\left(\frac{v+dv}{R}\right)^2 - \left(\frac{v}{R}\right)^2\right) \approx 2mv\,dv$.

По ЗСЭ: $\Delta E_{к.пост} + \Delta E_{к.вр.} + \Delta E_п = A \Leftrightarrow 4m\,dv^{a_2} - 2mg\sin(\alpha_2)\,dt = -F_{тр.2}\,v\,dt \Leftrightarrow F_{тр.2} = 2mg\sin(\alpha_2) - 4ma_2 = 2m\left(g \cdot \frac{5}{13} - \frac{g}{4_2}\right) =$

Для цилиндра тоже применим II закон Ньютона; мы найдём

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Проанализируем график $\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)$ из условия:

~~1) про~~ I) процесс 1→2.

Данный процесс – часть прямой ~~$y = k_1 x + b_1$~~. $\frac{p}{p_0} = k_1 \cdot \frac{V}{V_0} + b_1$.

Зная координаты состояний 1 и 2, получаем:

$$\begin{cases} 8 = 8k_1 + b_1 \text{ (состояние 1)} \\ 5 = 14k_1 + b_1 \text{ (состояние 2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 6k_1 = -3 \\ 1 \end{matrix} \Leftrightarrow k_1 = -0{,}5 \Rightarrow b_1 =$$

$$= 8 - 8 \cdot (-0{,}5) = 12.$$

Итак, в процессе 1→2: $\frac{p}{p_0} = -\frac{V}{2V_0} + 12$, при этом $\frac{V}{V_0} \in [8;14]$ и V/V_0 возрастает.

II) процесс 2→3.

Данный процесс является изохорным (так как в нём $\frac{V}{V_0} = 14 = \text{const} \Leftrightarrow V = 14V_0 = \text{const}$), при этом $\frac{p}{p_0} \in [2;5]$ и $\frac{p}{p_0}$ убывает.

III) процесс 3→1

Данный процесс – часть прямой $\frac{p}{p_0} = k_3 \cdot \frac{V}{V_0} + b_3$. Зная координаты состояний 3 и 1, получаем:

$$\begin{cases} ~~14~~ 2 = 14k_3 + b_3 \\ 8 = 8k_3 + b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 6k_3 = -6 \\ 1 \end{matrix} \Leftrightarrow k_3 = -1 \Rightarrow b_3 = 2 -$$

$$- 14 \cdot (-1) = 16.$$

Итак, в процессе 3→1: $\frac{p}{p_0} = -\frac{V}{V_0} + 16$, при этом $\frac{V}{V_0} \in [8;14]$ и V/V_0 убывает.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть T_1, T_2 и T_3 – температуры газа в состояниях 1, 2 и 3 соответственно; ν – количество этого газа.

По закону Менделеева – Клапейрона:

$$\begin{cases} 8p_0 \cdot 8V_0 = \nu R T_1 \text{ (состояние 1)} \Leftrightarrow T_1 = \dfrac{64 p_0 V_0}{\nu R} \\ 5p_0 \cdot 14V_0 = \nu R T_2 \text{ (состояние 2)} \Leftrightarrow T_2 = \dfrac{70 p_0 V_0}{\nu R} \\ 2p_0 \cdot 14V_0 = \nu R T_3 \text{ (состояние 3)} \Leftrightarrow T_3 = \dfrac{28 p_0 V_0}{\nu R} \end{cases}$$

В процессе 1→2 выберем точку $\left(\dfrac{V_4}{V_0}; \dfrac{p_4}{p_0}\right)$.

Во-первых, $\dfrac{p_4}{p_0} = -\dfrac{V_4}{2V_0} + 12$. Во-вторых, $\dfrac{V_4}{V_0} \in [8; 14]$.

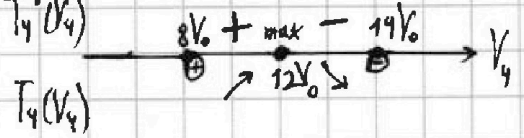
В-третьих, по закону Менделеева – Клапейрона:

$$p_4 V_4 = \nu R T_4 \text{ (состояние 4 в процессе 1→2)} \Leftrightarrow T_4 = \frac{p_0 V_4}{\nu R} =$$

$$= \frac{p_0 \left(-\frac{V_4}{2V_0} + 12\right) \cdot V_4}{\nu R} = \frac{p_0}{\nu R} \cdot \frac{1}{2V_0}\left(-V_4^2 + 24 V_4 V_0\right).$$

Если возьмём производную от T_4 по V_4, то получим:

$$T_4' = \frac{p_0}{2\nu R V_0}\left(-2V_4 + 24V_0\right) = -\frac{p_0}{\nu R V_0}\left(V_4 - 12V_0\right)$$



Как видим, максимальная температура в процессе 1-2 равна

$$T_4(12V_0) = \frac{p_0}{2\nu R V_0}\left(-144V_0^2 + 288V_0^2\right) = \frac{72 p_0 V_0}{\nu R} = T_{max,1\to2}.$$

Таким образом, $\dfrac{T_{max.1\to2}}{T_3} = \dfrac{72}{28} = \boxed{\dfrac{18}{7}}$ (ответ на пункт 2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Работа газа в процессе $1 \to 2$ равна $A_{1\to 2} = S_{\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)_{1\to 2}} \cdot p_0 V_0 =$

$= \frac{8p_0 + 5p_0}{2} \cdot (14V_0 - 8V_0)$ (прямоугольная трапеция) $=$

$= 39 p_0 V_0$.

Работа газа в процессе $2 \to 3$ равна $A_{2\to 3} = 0$, так как в этом процессе: $V_{2\to 3} = const$.

Работа газа в процессе $3 \to 1$ равна $A_{3\to 1} = -S_{\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)_{3\to 1}}$ (так как $V_{3\to 1} \searrow$) $\cdot p_0 V_0 = -\frac{8p_0 + 2p_0}{2} \cdot (14V_0 - 8V_0)$ (прямоугольная трапеция) $= -30 p_0 V_0$

Таким образом, работа газа за цикл равна $A =$

$= A_{1\to 2} + A_{2\to 3} + A_{3\to 1} = 9 p_0 V_0$.

Далее проверим, везде всегда ли в процессе $1 \to 2$ подводится тепло. При $V_4 \in [8V_0; 12V_0]$: $T_4 \nearrow \Rightarrow U_{1\to 2} \nearrow$. При этом совершается положительная работа (так как $V_{1\to 2} \nearrow$) $\to$ тепло только подводится (по I началу термодинамики: $Q = A_\Gamma + \Delta U$).

Пусть теперь $V_4 \in [12V_0; 14V_0]$. Тогда количество теплоты, подведённое между $12V_0$ и V_4 равно $Q_4 \overset{\text{(по I н.т.)}}{=} A_4 + \Delta U_4 =$ (для одноатомного газа: $i = 3$); при этом если бы $V_4 = 12V_0$, то

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{p_4}{p_0} = -\frac{12V_0}{2V_0} + 12\frac{V_4}{V_0} = 6 \Leftrightarrow p_4 = 6p_0$ (доказано) $\frac{6p_0 + \left(-\frac{V_4}{2V_0} + 12\right)p_0}{2}$ · $(V_4 - 12V_0)$ (прямоугольная трапеция) $+ \frac{3}{2}\nu R(T_4 - \frac{72p_0V_0}{\nu R}) = \frac{p_0}{2}\cdot\left(18 - \frac{V_4}{2V_0}\right)\cdot(V_4 - 12V_0) - \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{72p_0V_0}{\nu R} - \frac{p_0}{2\nu R V_0}\left(-V_4^2 + 24V_4V_0\right)\right) = \frac{p_0V_0}{4}\left(36 - \frac{V_4}{V_0}\right)\left(\frac{V_4}{V_0} - 12\right) - \frac{3}{2}\left(72p_0V_0 - \frac{p_0}{2V_0}\left(-V_4^2 + 24V_4V_0\right)\right) = -108p_0V_0 - \frac{p_0V_0}{4}\cdot\left(\frac{V_4}{V_0}\right)^2 + 12p_0V_0\cdot\frac{V_4}{V_0} - 108p_0V_0 - \frac{3p_0V_0}{4}\cdot\left(\frac{V_4}{V_0}\right)^2 + 18p_0V_0\cdot\left(\frac{V_4}{V_0}\right) = -216p_0V_0 - p_0V_0\cdot\left(\frac{V_4}{V_0}\right)^2 + 30p_0V_0\cdot\frac{V_4}{V_0} = -p_0V_0\left(\left(\frac{V_4}{V_0}\right)^2 - 30\left(\frac{V_4}{V_0}\right) + 216\right) = -p_0V_0\left(\frac{V_4}{V_0} - 12\right)\left(\frac{V_4}{V_0} - 18\right) \geq 0 \Rightarrow$ тепло подводится.

(12+18; 12·18; $\frac{V_4}{V_0} - 12 \geqslant 0$; $\frac{V_4}{V_0} - 18 < 0$)

Теперь проверим, всегда ли в процессе 3→1 подводится тепло: отметим на 3→1 точку $\left(\frac{V_5}{V_0}; \frac{p_5}{p_0}\right)$, при этом $\frac{V_5}{V_0} \in [8;14]$. Тогда (по I н.м.) $Q_{3\to5} = A_{3\to5} + \Delta U_{3\to5} = -\frac{2p_0 + \left(-\frac{V_5}{V_0} + 16\right)p_0}{2}\cdot(14V_0 - V_5) + \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{\left(-\frac{V_5}{V_0} + 16\right)p_0V_5}{\nu R} - \frac{28p_0V_0}{\nu R}\right) = -\frac{p_0V_0}{2}\left(\frac{V_5}{V_0} - 18\right)\left(\frac{V_5}{V_0} - 14\right) + \frac{3p_0V_0}{2}\left(-\left(\frac{V_5}{V_0}\right)^2 + \cancel{\ldots}\right) = -\frac{p_0V_0}{2}\left(\left(\frac{V_5}{V_0}\right)^2 - 32\left(\frac{V_5}{V_0}\right) + 252 - 3\left(\frac{V_5}{V_0}\right) - 18\right) + 16\left(\frac{V_5}{V_0} - 28\right) = -\frac{p_0V_0}{2}\left(\left(\frac{V_5}{V_0}\right)^2 - 35\left(\frac{V_5}{V_0}\right) + 252 - \frac{3}{2}\left(\frac{V_5}{V_0}\right)^2 + 24\left(\frac{V_5}{V_0}\right) - 448\right) = \frac{p_0V_0}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{V_5}{V_0}\right)^2 + \frac{11}{2}\left(\frac{V_5}{V_0}\right) - 210\right) = p_0V_0\left(\left(\frac{V_5}{V_0} + 2\right)^2 - 109\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решим пункт 1: $\frac{|\Delta U_{1\to 2}|}{A} = \frac{\frac{3}{2}\nu R\,|T_2 - T_1|}{\frac{3}{2}p_0V_0} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 4\,p_0V_0}{\frac{3}{2}p_0V_0} = 4$

(ответ на пункт 1)

Вернёмся к $a_{3\to 5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

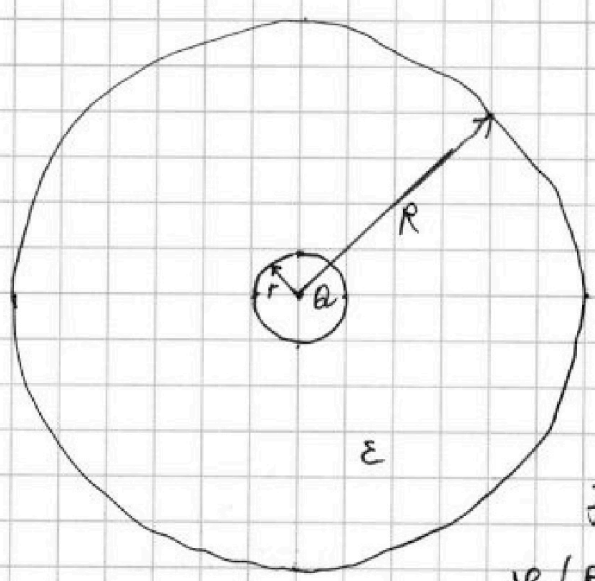
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

φ_0 вне шара $\Rightarrow \varphi_0 \le \frac{kQ}{R}$



Запишем формулу для φ в зависимости от x:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{kQ}{x}, & \text{если } x \in (0; r] \\ \frac{kQ}{\varepsilon x}, & \text{если } x \in (r; R) \\ \frac{kQ}{x}, & \text{если } x \in [R; +\infty) \end{cases}$$

~~Пусть $r \to$~~ По графику $\frac{\varphi}{\varphi_0}(x)$:

$\varphi\left(\frac{R}{3}\right) = 5\varphi_0$ и $\varphi\left(\frac{2R}{3}\right) = 4\varphi_0$.

Если $r \ge \frac{2R}{3}$, то $\varphi\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{3kQ}{R}$ и $\varphi\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{3kQ}{2R}$, откуда $4\varphi_0 = \frac{5\varphi_0}{2}$, что неверно $\Rightarrow r < \frac{2R}{3}$.

Если $r < \frac{R}{3}$, то $\varphi\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{3kQ}{\varepsilon R}$ и $\varphi\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{3kQ}{2R}$,

откуда $4\varphi_0 = \frac{5\varphi_0}{2}$, что неверно $\Rightarrow r \ge \frac{R}{3}$

Итак, $r \in \left[\frac{R}{3}; \frac{2R}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{3kQ}{R} = 5\varphi_0 \\ \varphi\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{3kQ}{2\varepsilon R} = 4\varphi_0 \end{cases} \Rightarrow 2\varepsilon = \frac{\varphi\left(\frac{R}{3}\right)}{\varphi\left(\frac{2R}{3}\right)} = \frac{5\varphi_0}{4\varphi_0} \Leftrightarrow \varepsilon = \boxed{\frac{5}{8}}$

~~$r < \frac{5R}{6} \Rightarrow \varphi\left(\frac{5R}{6}\right) = \frac{kQ}{\varepsilon \frac{5R}{6}} = \boxed{\frac{6kQ}{5\varepsilon R}}$~~

~~3) По графику $5r = \frac{R}{6}$~~ (ответ на пункт 2)

Если ориентироваться по графику, то $\varphi\left(\frac{5R}{6}\right) = \frac{6kQ}{5R}$.

Иначе $\varphi\left(\frac{5R}{6}\right) = \begin{cases} \frac{6kQ}{5\varepsilon R}, & r < \frac{5R}{6} \\ \frac{6kQ}{5R}, & r \ge \frac{5R}{6} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

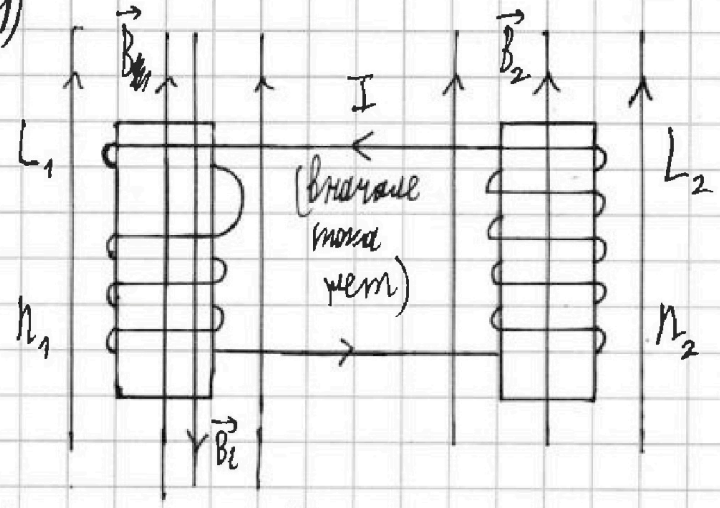
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

1)



$B \nearrow \Rightarrow$ (по правилу Ленца) возникает $\vec{B}_i$, препятствующее возрастанию магнитного потока через первую катушку (так как $\Phi_1 = B S n_1$, а $B \nearrow$), то есть $\vec{B}_i \uparrow\downarrow \vec{B}$. По правилу буравчика: ток потечёт, как на рис. выше. По закону ЭМИ: $\mathcal{E}_i = -\Phi' = -S n_1 \cdot B'$ (напомним, что $B' = \frac{\Delta B}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$). Также $|\mathcal{E}_i| = (L_1 + L_2) I'$ (берём ЭДС индукции по модулю, так как понятно, что ток будет возрастать из-за ~~наличия~~ ~~увеличения~~ наличия $\mathcal{E}_i$). Таким образом, $I' (= |I'|$ в нашем случае$) = \frac{S n_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} =$

$= \frac{\alpha n_1 S}{L_1 + L_2}$ (ответ на пункт 2) $= \frac{\alpha \cdot n \cdot S}{L + 16L} =$

$= \boxed{\frac{\alpha n S}{17 L}}$ (ответ на пункт 1)

2) ~~Пусть за малое время~~ 2) ~~Заметим, что во-первых,~~ если

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2) Будем считать силу тока положительной, если он течёт против часовой стрелки (как ~~ж~~ в пункте 1). Тогда во-первых, если бы $B \searrow$, то (аналогично) $I \searrow$ бы. (~~то есть возможно~~, ~~изменить~~ ~~бы направление на~~ ~~противоп~~ Во-вторых, если бы $B_2 \nearrow$, то (аналогично) $I \searrow$ бы. В-третьих, если бы $B_2 \searrow$, то (аналогично) $I \nearrow$ бы. * Ответ: 1) $\frac{d n_2 S}{17L}$; 2) $\frac{7 B_0 n S}{51L}$

В ~~нашем случае~~ пункте 2: $B \searrow$ и $B_2 \searrow$ (не меняя направления) $\Rightarrow$ ~~будет~~ * ~~$I_к$ = первая катушка~~ ~~левое поле~~ ~~уменьшится~~ $\Rightarrow$ ~~из-за B~~ $\Rightarrow$ уменьшение B уменьшит силу тока I / а уменьшение B_2 увеличит силу тока I.

Пусть за ~~малое~~ время ~~$\Delta t \to 0$~~ dt (малое время) B ~~уменьшилась~~ увеличилась на $dB^{<0} \Rightarrow$ (аналогично пункту 1) $\Rightarrow$ I ~~уменьшилась~~ увеличилась на $\frac{n_1 S}{L_1+L_2} dB = dI_1^{<0}$. Аналогично при ~~уменьшении~~ увеличении B_2 на $dB_2 < 0$: I ~~уменьшается~~ увеличивается на $-\frac{n_2 S}{L_1+L_2} dB_2 = dI_2 > 0$. Таким образом, $I_к =$

$$= \int_{B_0}^{B_0/3} \frac{n_1 S}{L_1+L_2} dB - \int_{3B_0}^{9B_0/4} \frac{n_2 S}{L_1+L_2} dB_2 = \frac{S}{L_1+L_2}\left(n_1\left(\frac{B_0}{3}-B_0\right) - n_2\left(\frac{9B_0}{4}-3B_0\right)\right) =$$

$$= \frac{S}{17L}\left(n\cdot\left(-\frac{2B_0}{3}\right) - 4n\cdot\left(-\frac{3B_0}{4}\right)\right) = \frac{SnB_0}{17L}\left(-\frac{2}{3}+3\right) = \boxed{\frac{7SnB_0}{51L}} \left(>0 \Rightarrow \text{против часовой стрелки}\right) *$$

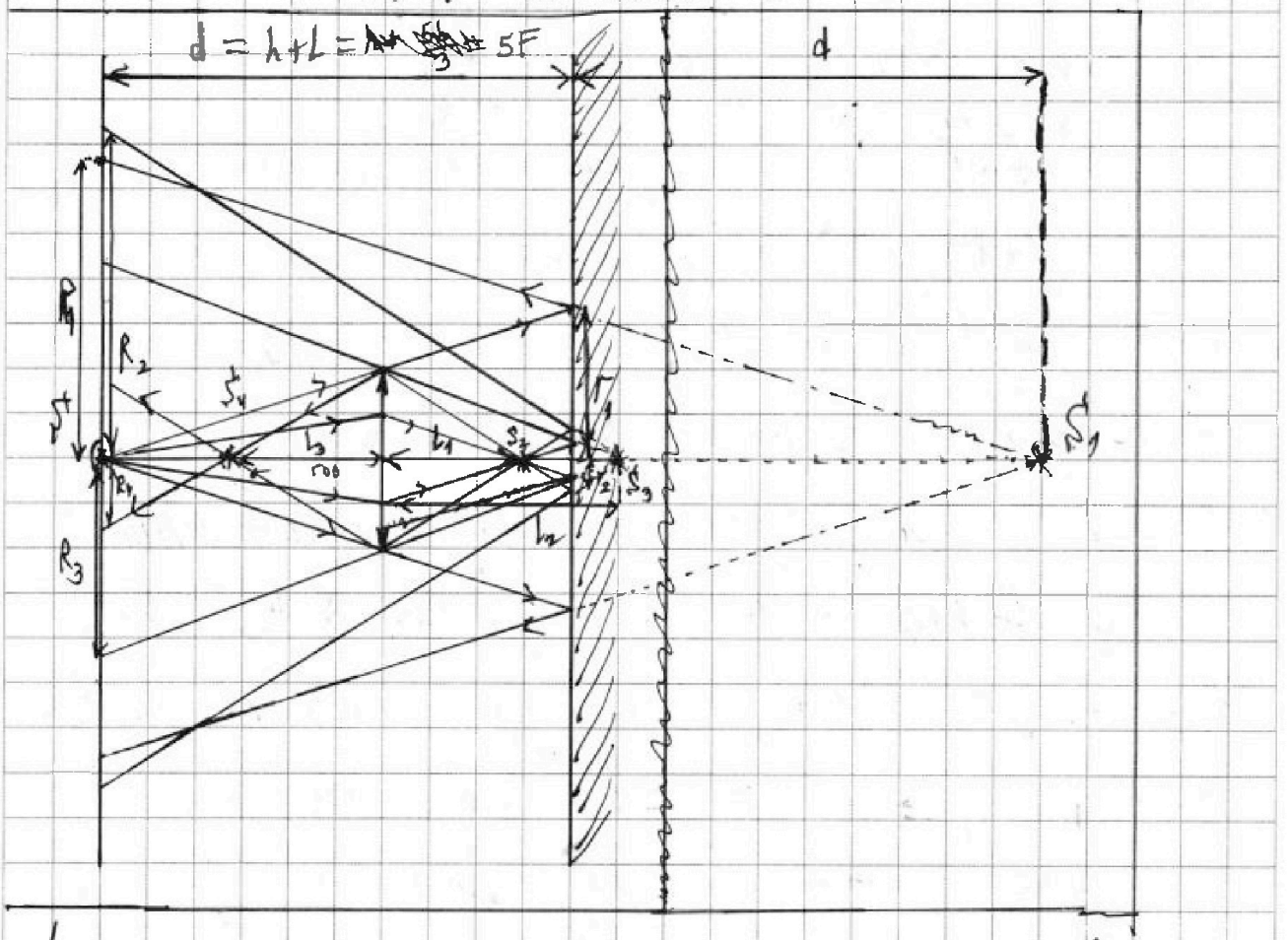
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Из условия: $h = 3F$ и $L = 2F$



Лучи, исходящие из лампы, об которые обогнули линзу на пути к зеркалу, дошли до зеркала, отразились от него и не попали на стену (очевидно, снова не пройдя через линзу). Продолжения таких лучей образуют изображение S_1 в зеркале. Таким образом, мы понимаем, что отмеченные выше лучи не освещают

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Область стены в виде только круга радиусом $R_1 = 2r$ (так как изображение и источник равноудалены от зеркала, а также из подобия Δ-в), а также у стены зеркала только круг радиусом $r_1 = r \cdot \frac{h+L}{h}$ (из подобия Δ-в) $= r \cdot \frac{5}{3}$, а у стены только круг радиусом $R_1 = 2r_1 = \frac{10r}{3}$ (так как изображение и источник равноудалены от зеркала).

Далее Теперь рассмотрим лучи, прошедшие через линзу по пути к зеркалу. Так как $d > F$, то $h > F$, то по формуле тонкой линзы:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{h} + \frac{1}{L_1} \Leftrightarrow L_1 = \frac{3F}{2} < L \Rightarrow$ такие лучи осветят на зеркале пятно круг радиусом $r_2 = r \cdot \frac{L - L_1}{L_1}$ (из подобия Δ-в) $= \frac{r}{3}$, $\Rightarrow S_{н.з.} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi \left(\frac{25r^2}{9} - \frac{r^2}{9} \right) = \frac{8\pi r^2}{3} = \boxed{\frac{200}{3} \pi \cdot см^2}$ (ответ на пункт 1)

После отражения от зеркала описанные выше лучи могут пройти через линзу, а могут и обогнуть её. Заметим, что оба пятна подтона лучей образуют изображение S_2 (действительное), а оно, в свою очередь,

S_3 в зеркале (мнимое). Таким образом, расстояние между S_3' и линзой равно $L_2 = L_1 + 2(L - L_1) =$
$= 2L - L_1 = \frac{5F}{2} > F$. Таким образом, лучи, прошедшие через линзу в первый раз, но не прошедшие через второй, ~~равно F образуют~~ освещают на стене кольцо, ограниченное окружностями радиусами $R_3 = r \cdot \frac{L_2 + h}{L_2} = r \cdot \frac{11}{5}$ и $R_2 = r_2 \cdot \frac{h + L_2}{L_2 - L} =$
$= \frac{r}{3} \cdot \frac{11}{1} = \frac{11r}{3}$. Теперь посмотрим на лучи, прошедшие через линзу два раза. Они образуют S_4 (действительное). По формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F} =$
$= \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \Leftrightarrow L_3 = \frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{2}{5F}} = \frac{5F}{3} < h$. Значит такие лучи освещают на стене круг радиусом
$R_4 = L_3 \cdot r \cdot \frac{h - L_3}{L_3} = \frac{4r}{5}$. на стене
Заметим, что $R_4 < R_3 < R_1 < R_2 \Rightarrow$ не освещается кольцо, ограниченное окружностями радиусами R_4 и $R_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{кол.} = \pi(R_3^2 - R_4^2) = \pi\left(\frac{121r^2}{9} - \frac{16r^2}{25}\right) = \frac{1873}{225}\pi r^2 =$
$= \pi \cdot 144 \left(\frac{55^2}{9} - 16\right) см^2 = \frac{3025 - 144}{9}\pi см^2 = \boxed{\frac{2881}{9}\pi \cdot см^2}$ (ответ на пункт 2)

Ответ: 1) $\frac{200}{3}\pi \cdot см^2$; 2) $\frac{2881}{9}\pi \cdot см^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow S_{н.с.} = \pi(R_3^2 - R_4^2) = \pi r^2\left(\frac{121}{25} - \frac{16}{25}\right) = \pi r^2 \cdot \frac{105}{25} =$

$= \boxed{105\pi \cdot см^2}$ (ответ на пункт 2)

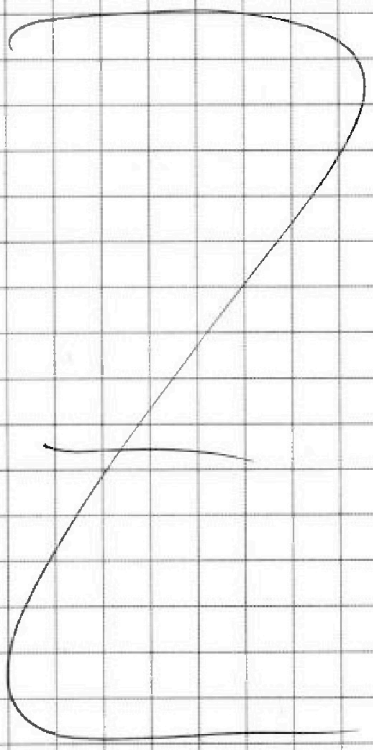
Ответ: 1) $\frac{200}{3}\pi \cdot см^2$; 2) $105\pi \cdot см^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

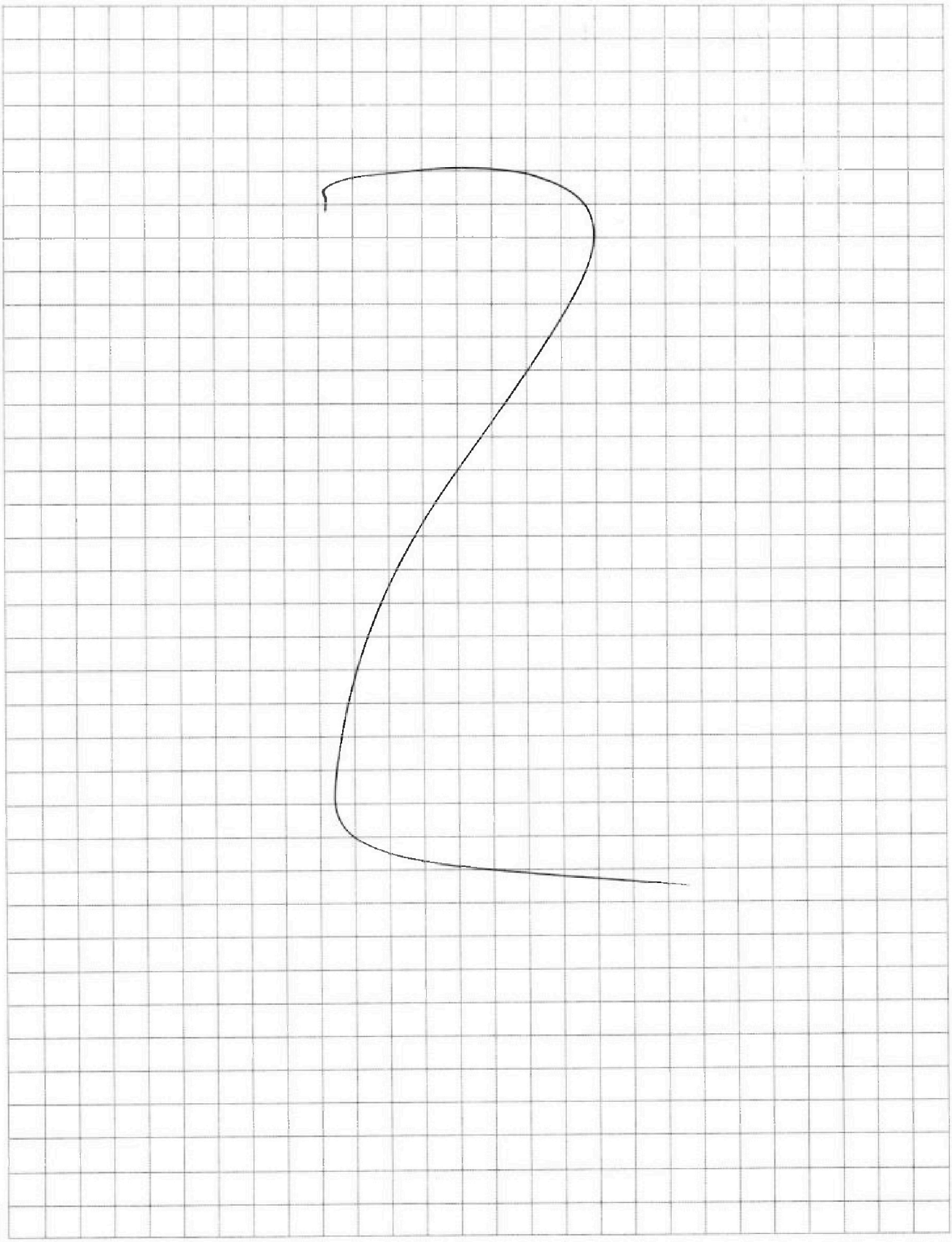


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

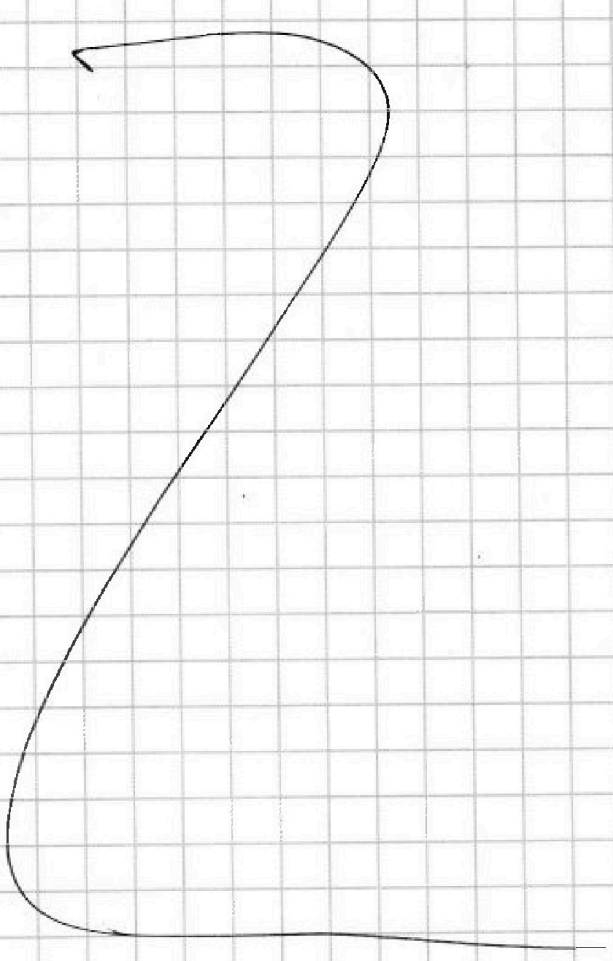


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



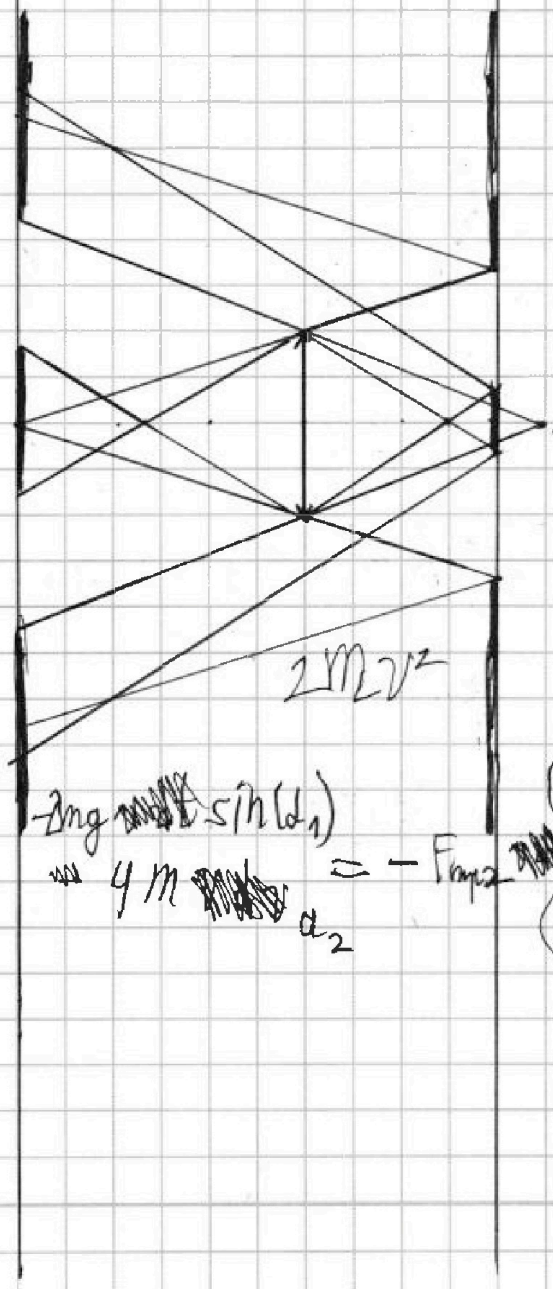
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

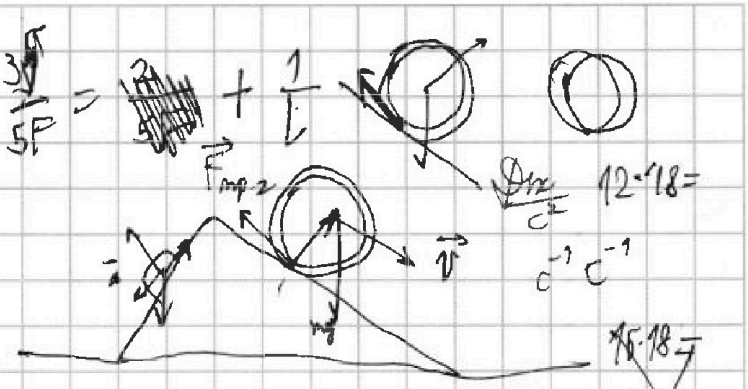
Черновик



$2mv^2$

$-2mg\sin(\alpha_1)$

$4m\,a_2 = -F_{тр.2}$



$I = 2mR$

$F_{тр.2}R = I\omega'$

$2m$

$a = \frac{F_{тр.2}}{2m}$

$F_{тр.2} = ma$

$M = I\omega'$

$F_{тр.2}\cdot R = 2m\cdot R^2\cdot \frac{a_2}{R}$

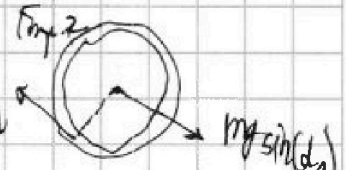
$F = ma$

$FR = mR\cdot a$

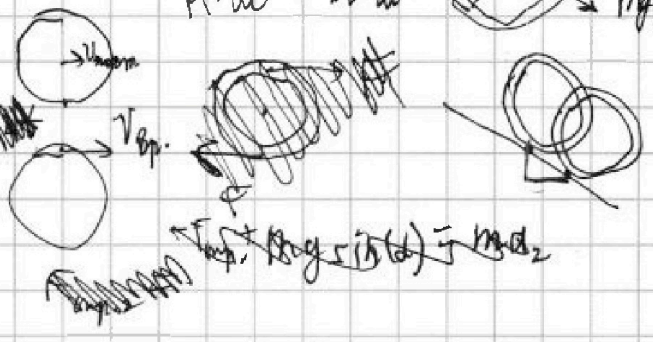
M

$M\cdot\omega$

$M\cdot\omega$



$mg\sin(\alpha_1)$



$F_{тр.2} + mg\sin(\alpha) = ma_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

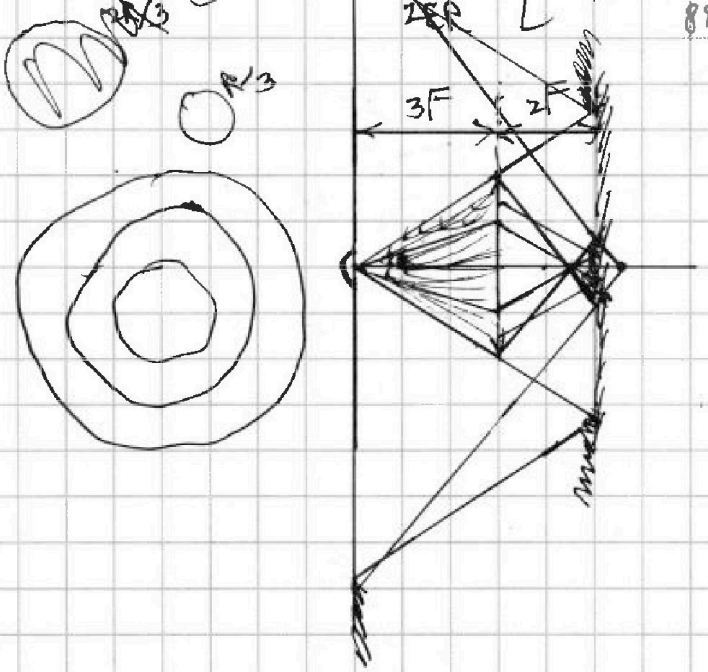
$\varphi_0 \le \frac{kQ}{R}$

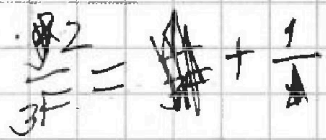
$\varphi_0 = \frac{3kQ}{R}$ $\quad \varphi_0 = \frac{3kQ}{5R}$

$5\varphi_0 = \frac{3kQ}{R}$ $\quad \varphi_0 = \frac{3kQ}{5\varepsilon R}$

$4\varphi_0 = \frac{3kQ}{2R}$ $\quad \varphi_0 = \frac{3kQ}{8R}$

$4\varphi_0 = \frac{3kQ}{2\varepsilon R}$ $\quad \varphi_0 = \frac{3kQ}{8\varepsilon R}$





$\frac{3F}{2}$