



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$+ 3(2\cos^2 x - 1) + 6 \cos x = \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x + 6\cos^2 x + 6\cos x$$

$$- 3 = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3. \text{ Пусть } u = \cos x, \text{ тогда } u$$

$$f(u) = 4u^3 + 6u^2 + 3u - 3. \text{ Нам нужно решить уравнение } f(u) = p,$$

$$u \in [-1, 1]. \text{ Заметим, что } f'(u) = 12u^2 + 12u + 3. \Delta = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 3 = 0,$$

значит так $f'(u)$ — парабола с ветвями вверх, то $f(u)$,

строго имеет ровно одно решение, т.е. $f(u)$ строго возрастает.

Тогда $f(u)$ для $\forall u \in [-1, 1]$ больше $f(-1)$ и меньше $f(1)$

Тогда решение существует для $p \in [f(-1), f(1)]$, т.е. $p \in [-4, 10]$

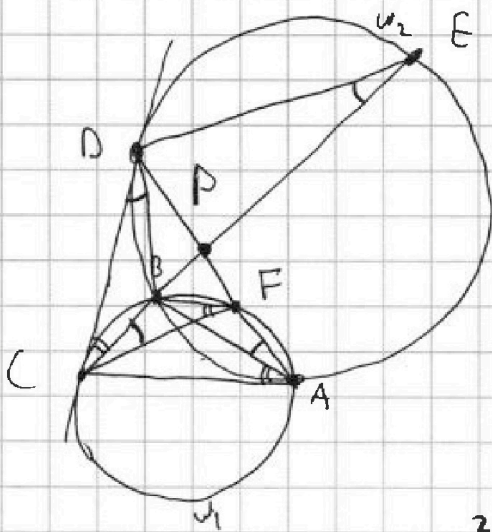


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $p = CE \cap AD$, а F -
второе пересечение AD и w_1 .
Пусть $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle BAC$.

1) По вписанности $AFBC$, $\angle BAF = \angle BAD$
 $= \alpha$ равен $\angle BCF$, а так же $\angle BFC$
 $= \angle DAC = \beta$.

2) По вписанности $ABDE$, $\angle DEB = \angle DAB = \alpha$.

3) По св-ву касательной, $\angle DCB = \angle BAC = \beta$, $\angle BDC = \angle BED = \alpha$.

4) Так $\angle FCE = \angle CEP$, то $CF \parallel ED$, откуда $\triangle PFC \sim \triangle PDE$

$$\Rightarrow \frac{PF}{PD} = \frac{PC}{PE} = \frac{3}{10} \text{ (по условию } PC:PE = 3:10)$$

но $\angle FCP = \angle DEP$ и $\angle FPC = \angle DPC$ как вертикальные

5) $\angle BCF = \angle CDB$ и $\angle BFC = \angle BCD \Rightarrow \triangle CBF \sim \triangle DCB$.

Тогда $\frac{BC}{BF} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow$ их площади относятся как квадрат коэф. подобия, то т.е. $\frac{CF^2}{CD^2} = \frac{S_{BCF}}{S_{DCB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot CF \cdot CB}{\frac{1}{2} \cdot \sin \beta \cdot CD \cdot CB} =$
 $= \frac{\sin \alpha \cdot CF}{\sin \beta \cdot CD} \Leftrightarrow \frac{CF^2}{CD^2} = \frac{\sin \alpha \cdot CF}{\sin \beta \cdot CD} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CF}{CD}$.

6) $\frac{PF}{CF} = \frac{\sin \angle FPC}{\sin \angle FCP}$ из т. синусов для $\triangle CFP$. из т.

синусов для $\triangle CPD$ $\frac{PD}{CD} = \frac{\sin \beta}{\sin \angle DPC} \Rightarrow \frac{PF}{CF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \angle FPC}$

$\Rightarrow \frac{PF \cdot CD}{PD \cdot CF} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \angle DPC}{\sin \beta \cdot \sin \angle FPC}$ т.к. $\angle DPC$ и $\angle FPC$ дополняют



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

дуга дуга до 180° , то их хорды равны $\Rightarrow \frac{PF \cdot CD}{PD \cdot CF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

= (по н. 5) $\frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{PF}{PD} = \frac{CF^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{CF^2}{CD^2} = \frac{3}{10}$ (т.к. $\frac{PF}{PD} = \frac{3}{10}$)

$\frac{CF}{CD} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

7) $\frac{ED}{CD} = \frac{CF}{CD} \cdot \frac{ER}{CF} = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{10}{3} = \sqrt{\frac{10}{3}}$, т.к. по

н. 6 $\frac{CF}{CD} = \sqrt{\frac{3}{10}}$, а по н. 4 $\frac{RF}{DE} = \frac{CF}{ED} = \frac{3}{10} \Rightarrow$

$\frac{ED}{CF} = \frac{1}{\frac{CF}{ED}} = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3}$

Ответ: $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

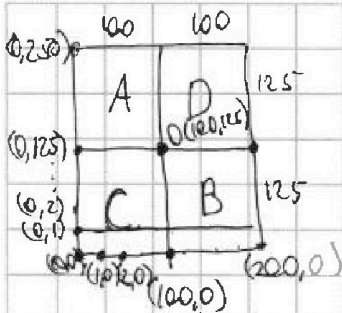


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что если ~~мы~~ закрашенное мн-во обладает двумя симметриями из трёх, то третьей оно тоже обладает. Действительно, пусть мн-во в верхней левой четверти имеет вид A, в нижней правой B, в нижней левой C, в верхней правой D. Тогда ~~мы~~ ~~пронумеруем~~ ~~мы~~ введём декартову систему координат с началом в левом нижнем углу так, чтобы правый нижний угол имел координату (200, 0), а левый верхний - (0, 250). Тогда центр O прямоугольника имеет координаты (100, 125). Тогда пусть мн-во удовлетворяет условию симметричности относительно обеих ср. линий ^{горизонтальной} При симметрии относительно ~~горизонтальной~~ первой линии точка (x, y) перейдёт в точку (x, 250 - y), а при симметрии относительно вертикальной - в точку (200 - x, y). Тогда при обеих симметриях она перейдёт в точку (200 - x, 250 - y). Но ровно в такую же точку она перейдёт при симметрии относительно O. Значит, если в множестве есть клетка с центром (x₀, y₀), то есть и клетка с центром (200 - x₀, 250 - y₀), значит мн-во симметрично относительно O. Если же в мн-ве есть ~~только~~ клетка с центром (x₀, y₀) и есть условие симметричности относительно вертикальной ср. линии и центра, то у нас есть и клетка



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

с центром $(200 - x_0, 250 - y_0)$, как симметричная (x_0, y_0) относ. O .

А значит если и клетка $(x_0, 250 - y_0)$, как симметричная клетке с центром $(200 - x_0, 250 - y_0)$ относительно вертикальной ср. линии. А эта точка симметрична $(x_0, 250 - y_0)$ симметрична точке (x_0, y_0) относительно горизонтальной средней линии, значит у каждой точки есть симметричная относительно горизонтальной ср. линии, значит все мн-во симметрично относительно гориз. ср. линии. Ну и если есть симметрия относительно центра и гориз. ср. линии, то наличие симметрии относительно верт. ср. линии доказывается аналогично

Тогда посчитаем кол-во способов поставить клетки так, чтобы мн-во было центрально симметричным. Заметим, что при такой симметрии

клетки из А меняются местами с клетками из В, а из С - с D. Тогда мн-ва В и D по мн-вам А и С восстанавливаются однозначно

Тогда способов выбрать такое мн-во = кол-во способов выбрать $\frac{3}{2} = 4$ клетки в А и С, т.е. $C_{125 \cdot 100}^4 + C_{125 \cdot 100}^4$, т.к. в А и С

по $125 \cdot 100$ клеток. Способов выбрать мн-во, симметричное вертикальной линии тоже $C_{125 \cdot 100}^4 + C_{125 \cdot 100}^4$, т.к. мн-ва D и B однозначно восстанавливаются по А и С. Ну и аналогично, способов выбрать мн-во, симметричное отн. гориз. ср. линии тоже $C_{125 \cdot 100}^4 + C_{125 \cdot 100}^4$

Но в каждом из этих случаев мы по разу посчитали каждое мн-во, обладающее всеми тремя симметриями, значит нам нужно

вычесть удвоенное их кол-во, а их $C_{125 \cdot 100}^2$, т.к. если мы выбрали 2 клетки в А, то мн-ва в В, С, D восстанавливаются однозначно из-за симметрий. Значит, итого ответ $3C_{125 \cdot 100}^4 - 2C_{125 \cdot 100}^2$

$$3C_{125 \cdot 100}^4 - 2C_{125 \cdot 100}^2 = 3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$$

Ответ: $3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$= +\frac{1}{2}$, значит, нам достаточно найти только значения в точках от 0 до 23.

$$f(0) = 560 \quad f(1) = 558 \quad f(2) = 554 \quad f(3) = 548 \quad f(4) = 540$$

$$f(5) = 530 \quad f(6) = 518 \quad f(7) = 504 \quad f(8) = 488 \quad f(9) = 470$$

$$f(10) = 450 \quad f(11) = 428 \quad f(12) = 404 \quad f(13) = 378 \quad f(14) = 350$$

$$f(15) = 320 \quad f(16) = 288 \quad f(17) = 254 \quad f(18) = 218 \quad f(19) = 180$$

$$f(20) = 140 \quad f(21) = 98 \quad f(22) = 54 \quad f(23) = 8.$$

~~Итак~~ Из них $p^2 - 1$ для какого-то p равны $f(23) = 8 = 3^2 - 1$ и $f(16) = 288 = 17^2 - 1$. Тогда (с учетом симметрии)

у нас есть 4 возможных b : 23, -24, 16, -17.

а) при $b = 23$ $a = 560 - 23^2 = 31$, $f(b) = 8$, значит $p = 3$. Тогда с $любыми$ 22 $любыми$ 32. Под условие $a - b \div 3$ обе тройки подходят.

б) $b = -24$ $a = 560 - (-24)^2 = -16$. $a - b = 8 \div 3$. $f(b) = 8 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow c = \text{любая}$ -25 $любая$ -15 . обе тройки подходят.

в) ~~$b = 16 \Rightarrow a = 560 - 16^2 = 304$ $304 + 16 \not\div 3$. $c = -17$~~
 $b = 16 \Rightarrow a = 560 - 16^2 = 304$ $304 - 16 = 288 \not\div 3 \Rightarrow$
 тройка не подходит.

г) $b = -17 \Rightarrow a = 560 - (-17)^2 = 271$. $271 - (-17) = 288 \div 3$
 тройка не подходит.

Итого ответ: $(31, 23, 22)$, $(31, 23, 32)$, $(-16, -24, -25)$
 $(-16, -24, -15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Перепишем последнее условие как $a = 560 - b^2$.

Так как $a-c$ и $b-c$ целые, то второе условие равносильно

системе $\begin{cases} b-c = 1 & (p\text{-простое}) \\ a-c = p^2 \\ b-c = -p^2 \\ a-c = -1 \end{cases}$, так как $a-c \neq b-c$ и они одного знака. Подставим $a = 560 - b^2$:

Тогда система превращается в такую: $\begin{cases} b-c = 1 \\ 560 - b^2 - c = p^2 \\ b-c = -p^2 \\ 560 - b^2 - c = -1 \end{cases}$

Заметим, что в обоих случаях получим вычитая в обоих системах верхнее из нижнего, получим $560 - b^2 - b = p^2 - 1$.

Условие $a > b$ равносильно $560 - b^2 > b \Leftrightarrow 560 - b^2 - b > 0$.

Пусть $f(x) = 560 - x^2 - x$.

Тогда нам нужно найти все такие целые b , что $f(b) > 0$,

и $f(b) = p^2 - 1$ для какого-то простого p , потому что тогда

за счёт изменения c мы сможем найти ровно одно

решение для каждой системы. Заметим, что $f(x)$ — парабола

с ветвями вниз, значит ~~существует~~ мн-во x таких, что

$f(x) > 0$ — интервал с концами в его корнях. Заметим,

что $f(23) = 560 - 23^2 - 23 = 8 > 0$, а $f(24) = 560 - 24^2 - 24 = -40 < 0$

$f(-24) = 560 - (-24)^2 - (-24) = 8 > 0$, $f(-25) = 560 - (-25)^2 - (-25) = -40 < 0$

значит, в целых числах условие $f(x) > 0$ удовлетворяют

числа из отрезка $[-24, 23]$. Заметим, что значения

$f(x)$ равны 8 в точках, симметричных относительно $-\frac{b}{2a}$



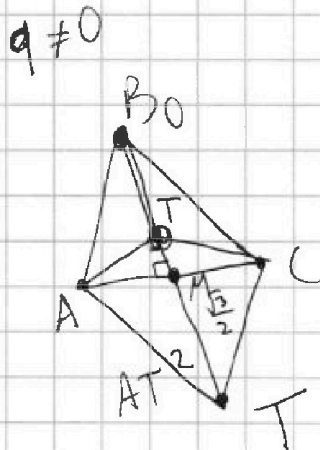
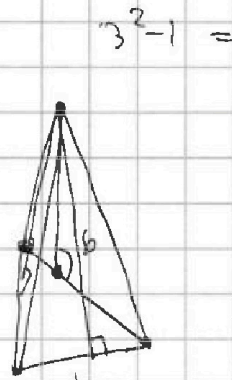
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- $f(0) = 560$
- $f(1) = 558$
- $f(2) = 554$
- $f(3) = 588$
- $f(4) = 540$
- $f(5) = 530$
- $f(6) = 518$
- $f(7) = 504$
- $f(8) = 488$
- $f(9) = 490$
- $f(10) = 450$
- $f(11) = 428$
- $f(12) = 404$
- $f(13) = 378$
- $f(14) = 350$
- $f(15) = 320$
- $f(16) = 288 \checkmark$
- $f(17) = 254$
- $f(18) = 218$
- $f(19) = 180$
- $f(20) = 140$
- $f(21) = 98$
- $f(22) = 54$
- $f(23) = 8 \checkmark$



B

BT^2

$- AT^2$

$AT^2 - BT^2 = 8^2 - 6^2 = 28$

$a = 31$

$2^2 - 1 = 1$

$3^2 - 1 = 8 \checkmark$

~~$4^2 - 1 = 15$~~

~~$5^2 - 1 = 24$~~

~~$6^2 - 1 = 35$~~

$7^2 - 1 = 48$

~~$8^2 - 1 = 63$~~

$11^2 - 1 = 120$

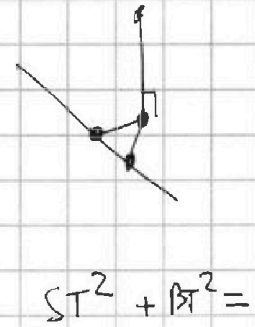
$13^2 - 1 = 168$

$17^2 - 1 = 288 \checkmark$

$19^2 - 1 = 360$

$23^2 - 1 = 528$

$29^2 - 1 > 560 \frac{1}{4}$



$23,$

$b = 23$

$b = 16$

$b = -24$

$b = -17$

$AM^2 + MT^2 - BT^2 =$

$\frac{1}{4} + (x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - x^2 = 28$

$\frac{1}{4} + x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}x^2 = 28$

$b = 23 \quad a = 31 \quad c = 22 = 28$

$b = 23 \quad a = 31 \quad c = 32$

$b = -24 \quad a = -16 \quad c = -25$

$b = -24 \quad a = -16 \quad c = -15$

$f(24) = 8 < 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \cancel{560} \quad 560 - b^2 \quad b^2 - 560 - b > 0$$

$$20^2 = 20^2 + 6 \cdot 20 + 9$$

$$= 529$$

$$24^2 = 400 + 8 \cdot 20 + 16 = 576 \quad \frac{1}{2}$$

$$0 \dots 23$$

$$-1 \dots -24$$

$$f(0) = 560$$

$$f(1) = 560 - 1 - 1 = 558 \quad [0, 23] \quad [-24, 23]$$

$$25^2 = 625$$

$$F(x) = 560 - x^2 - x$$

$$a = 560 - b^2$$

$$560 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$560 - b^2 > b$$

$$\Rightarrow b \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow b^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 560 - b^2 - b > 0$$

$$\Rightarrow a - b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$560 - b^2 - b > 0$$

$$\Rightarrow x$$

\Rightarrow

$$a = b + k$$

$$D = (-1)^2 + 4 \cdot 560 = 2241$$

$$560 - b^2 - b = p^2 - 1$$

$$(b-c) \cdot (b-c+k) = p^2$$

$$b-c+k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-c = -p^2 \\ b-c+k = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-c = 1 \\ b-c+k = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-c = 1 \\ 560 - b^2 - c = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-c = 1 \\ b^2 - c = p^2 \end{cases} \quad b$$

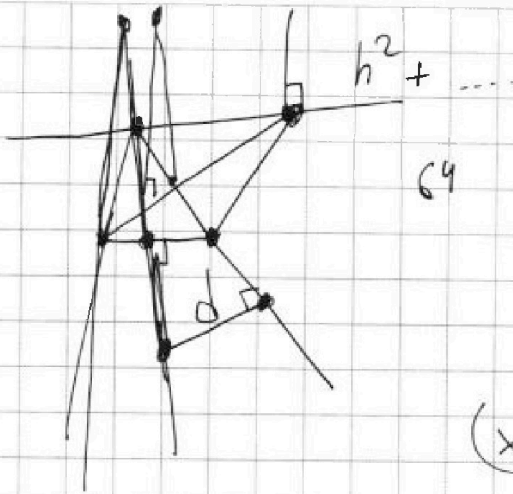


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h^2 + d^2$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = 6^2$$

$$d \sin 30 = \frac{1}{2} \times$$

$$d^2$$

$$h^2 + \frac{1}{4}x^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow h \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 = -28$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = -28$$

$$\frac{3}{4}x^2 - \sqrt{3}x - 27\frac{1}{4} = 0$$

$$D = 3 + \frac{3}{4} \cdot 27\frac{1}{4}$$

$$= \frac{48}{16} + \frac{58\frac{3}{4}}{16} = \frac{575}{16}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{575}{16}}}{2 \cdot \frac{3}{4}}$$

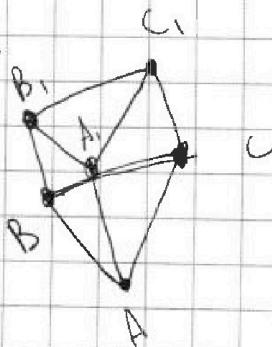
$$\sqrt{575} \approx 23$$

$$\frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{575}}{6}$$

$$\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{575}}{6}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$-4\left(\frac{1}{4}x^2 + h^2\right) = 6^2 - 4 \cdot 8^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ

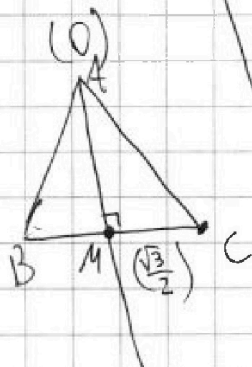
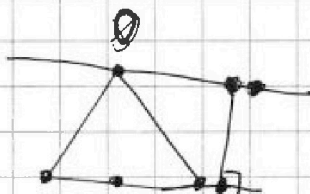
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть геомтр. прогрессия - b_n , и её знаменатель - q . Тогда $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$

$$\text{Тогда } \frac{b_{15}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^{15-1}}{b_1 \cdot q^{7-1}} = \frac{q^{14}}{q^6} = q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^3}} = \sqrt{(x+1)^4}$$

$$-(x+1)^2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[8]{(x+1)^2}. \text{ Тогда } \frac{b_{13}}{b_{15}} = \frac{b_1 \cdot q^{12}}{b_1 \cdot q^{14}} = \frac{1}{q^2} = \frac{5-x}{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{(x+1)^2} = \frac{5-x}{\sqrt{(13x-35)(x+1)}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{(x+1)^2} \cdot (5-x) = \sqrt{\quad}$$



$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow h^2 = \sqrt{36 - \frac{3}{4}}$$

$$\left(\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = 6^2$$

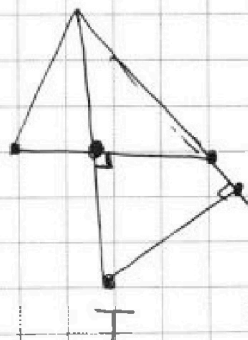
$$\frac{1}{4}t^2 + h^2 = 8^2$$

$$t^2 - \sqrt{3}t + \frac{3}{4} + h^2 = 6^2$$

$$\frac{1}{4}t^2 + h^2 = 8^2$$

$$\frac{3}{4}t^2 - \sqrt{3}t + \frac{3}{4} = 6^2 - 8^2$$

$$\frac{3}{4}t^2 - \sqrt{3}t + 28\frac{3}{4} = 0$$



$$\frac{1}{4}AT^2 + h^2 = 8^2$$

$$MT^2 + h^2 = 6^2$$

$$D) = 3 - \frac{3}{4} \cdot 28\frac{3}{4} \cdot 40$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad q = \pm \sqrt[4]{x+1} \quad \Rightarrow \quad x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \Rightarrow \quad x > -1$$

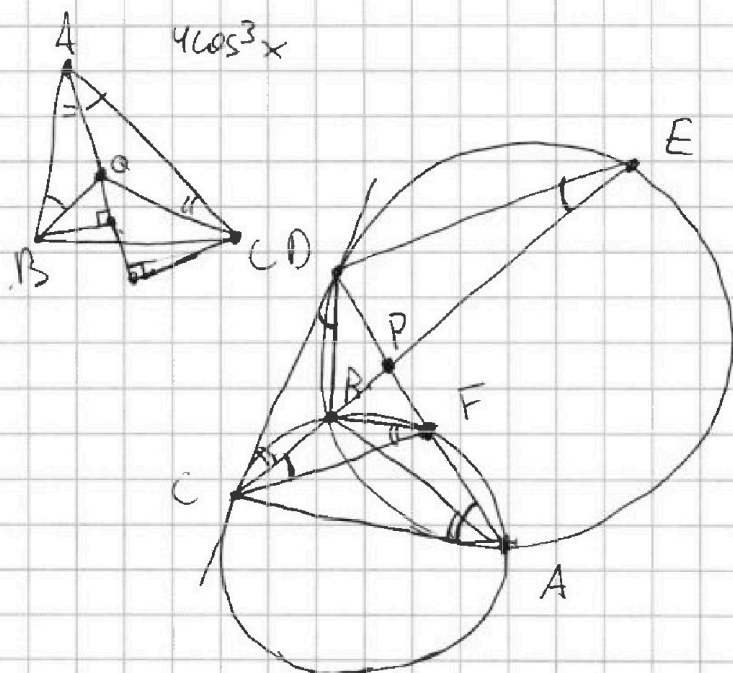
$$\Leftrightarrow \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 6\cos x = p$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$(2\cos x - 1)^2 (\cos x - 1) = p$$



$$\frac{PC}{PE} = \frac{3}{10} = \frac{FC}{DE}$$

$$\frac{10}{3} = \frac{DE}{FC} = \frac{ED}{CF}$$

CF

$$\frac{\sqrt{(\quad)}q^4}{\sqrt{5-x}} = q^2$$

$$q^2 \cdot \frac{\sqrt{(\quad)}}{5-x} = q^2$$

$$\Leftrightarrow q \frac{\sqrt{(\quad)}}{5-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\quad)} = 5-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ (\quad) = (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{PF}{PD} = \frac{CF^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \quad \frac{CF}{CD} \cdot \frac{ED}{CF} = \frac{ED}{CD}$$

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

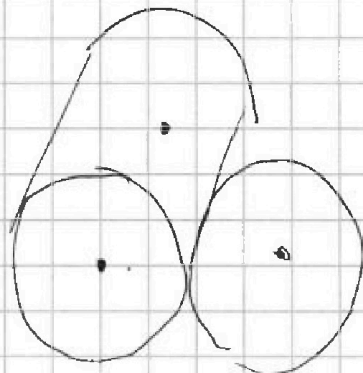
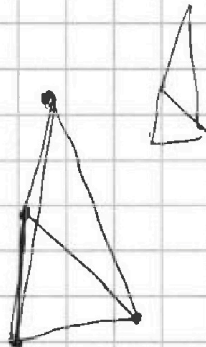
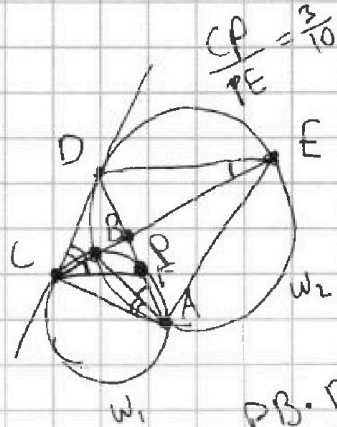
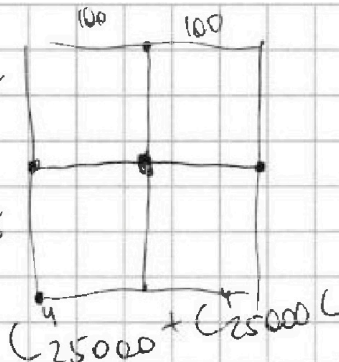
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^3 x - (3 + 3\cos^2 x)\cos x + 3\cos^2 x$$

$$2C_{250}^4 - C_{125}^2$$



$$a = b + k \quad k \in \mathbb{N} \quad \frac{PB \cdot PC}{PB \cdot PE} = \frac{3}{10}$$

$$(b-c)(b-c+k) = n^2$$

$$(b-c)^2 + k(b-c) = n^2$$

b_1, b_2, b_3

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^{15-1}}{b_1 \cdot q^{7-1}} = \frac{b_1 \cdot q^{14}}{b_1 \cdot q^6} = q^8$$



$$\frac{CF}{DE} = \frac{CP}{PE} = \frac{3}{10} \Rightarrow q^8 = \frac{\sqrt{\frac{C_1}{(a+1)^3}}}{\sqrt{C_1} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{(a+1)^3}}} = \frac{\sqrt{C_1} \cdot \sqrt{a+1}}{\sqrt{C_1} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{(a+1)^3}}} = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{\frac{C_1}{(a+1)^3}}} = \frac{\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{(a+1)^3}}{\sqrt{C_1}} = \frac{(a+1)^2}{\sqrt{C_1}}$$

$$\Rightarrow q^8 = (a+1)^2$$

$$\Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{a+1}$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x \quad PB \cdot PC = \frac{3}{10}$$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \sin x \cos^2 x \quad PB \cdot PE$$

$$+ 3i^2 \sin^2 x \cos x + i^3 \sin^3 x \quad PD \cdot PA = PB \cdot PE$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 6 \cos x = P$$

$$= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x + 3\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) + 6 \cos x = P$$

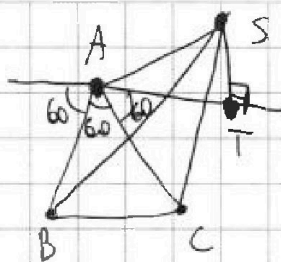
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\alpha = \cos x$

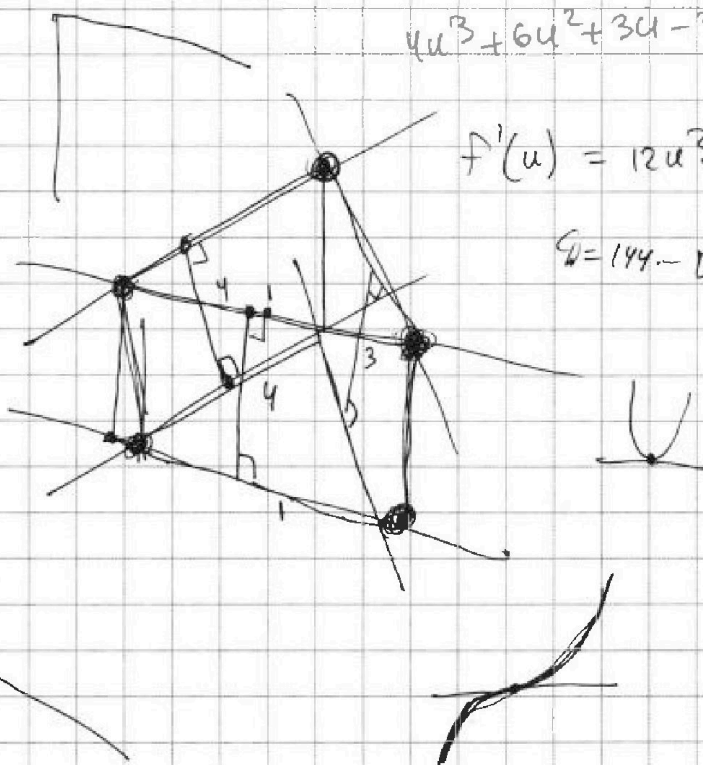
$$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = p$$

$$u = \cos x$$

$$4u^3 + 6u^2 + 3u - 3 = p$$

$$f'(u) = 12u^2 + 12u + 3$$

$$\Delta = 144 - 36 \geq 0$$



\cos

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$f(u)$

$$f(1) = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4, 10]$$