



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21.

Пусть геом. прогрессия будет вида: $b_n = q^{n-1} \cdot b_1$, тогда
из условия

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} & (1) \\ b_1 \cdot q^{12} = 5-x & (2) \\ b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} & (3) \end{cases} \quad (b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8)$$

$$b_1 \cdot q^{12} = 5-x \quad (2)$$

$$b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \quad (3)$$

$$(b_1 \cdot q^{14} = b_1 \cdot q^6 \cdot q^8)$$

ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$

При $x < -1$: Подставим (1) в (3) $\frac{\sqrt{13x-35} \cdot q^8}{\sqrt{(x+1)^3} \cdot (-x+1)} = \sqrt{13x-35} \cdot \sqrt{-x-1}$

$$\begin{cases} x = \frac{35}{13} & \text{т.к. } x < -1, \text{ то такое невозможно} \\ q^8 = (-x-1)^2 \end{cases}$$

$$x < -1 \Rightarrow q^4 = -x-1 \Rightarrow q^{12} = (-x-1)^3$$

$$b_1^2 \cdot q^{12} = \frac{13x-35}{(-x-1)^3} = b_1^2 \cdot (-x-1)^3$$

(т.к. $b_1 \geq 0$, то $b_1 = 0$) $b_1^2 = \frac{\sqrt{13x-35}}{(-x-1)^3}$ подставим все в (2)

$$\Rightarrow \sqrt{13x-35} = 5-x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3+7}{2} = 2 & \text{т.к. } x < -1, \text{ то такое невозможно} \\ x = \frac{-3-7}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x = \frac{-3-7}{2} = -5$$

При $x \geq \frac{35}{13}$: Подставим (1) в (3): $\begin{cases} x = \frac{35}{13} \Rightarrow b_7 = 0 \text{ и } b_{15} = 0 \\ q^8 = (x+1)^2 \end{cases}$

$$x > \frac{35}{13}: q^4 = x+1 \Rightarrow q^{12} = (x+1)^3 \Rightarrow b_1^2 = \frac{13x-35}{(x+1)^3} \Rightarrow b_1 = \frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)^{3/2}}$$

Подставим в (2): $\sqrt{13x-35} = 5-x$

$$x^2 - 23x + 60 = 0 \quad D = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{23+17}{2} = 20 \\ x = \frac{23-17}{2} = 3 \end{cases}$$

$$x = \frac{23-17}{2} = 3$$

$$3 > \frac{35}{13}; 20 > \frac{35}{13}$$

Ответ: -5; 3; 20

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

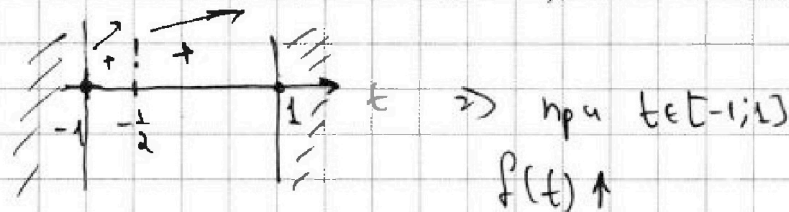
$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Пусть $t = \cos x$, ($t \in [-1; 1]$) тогда введём функцию

$$f(t) = 4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 12\left(t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right) = 12\left(t + \frac{1}{2}\right)^2$$



Значит, максимум $f(t)$ будет либо при $t = -1$, либо при $t = -\frac{1}{2}$, либо при $t = 1$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$$

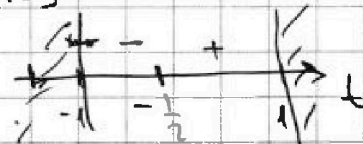
$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow f(t) \in [-4; 10]$$

(При том, что $f(t) = -4$ и $f(t) = 10$ достигается при $t \in [-1; 1]$)

Значит, $p \in [-4; 10]$ (т.к. по условию уравн. имеет хотя бы 1 корень)
Ответ: $p \in [-4; 10]$

$$f''(t) = 24t + 12 = 24\left(t + \frac{1}{2}\right)$$



при $t \in [-1; -\frac{1}{2}]$: $f(t)$ выпукла вверх

при $t \in [-\frac{1}{2}; 1]$: $f(t)$ выпукла вниз

Значит, график функции $f(t)$ примерно будет выглядеть следующим образом:



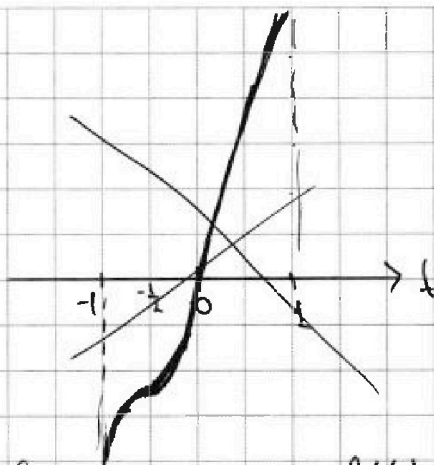
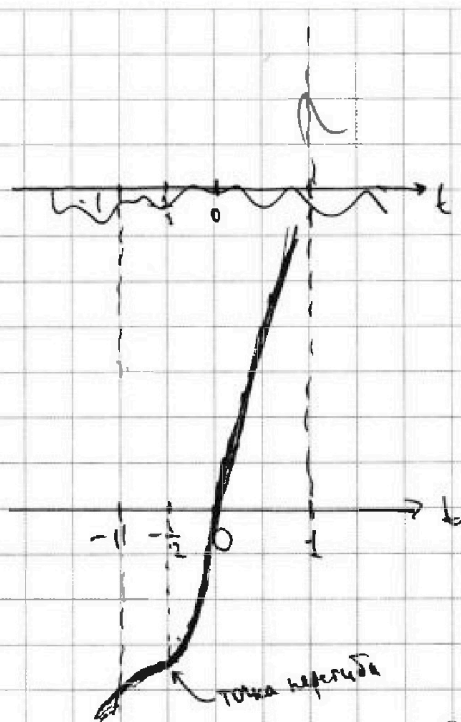
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Получается, что $f(t)$ монотонно
возрастает.
Значит, $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

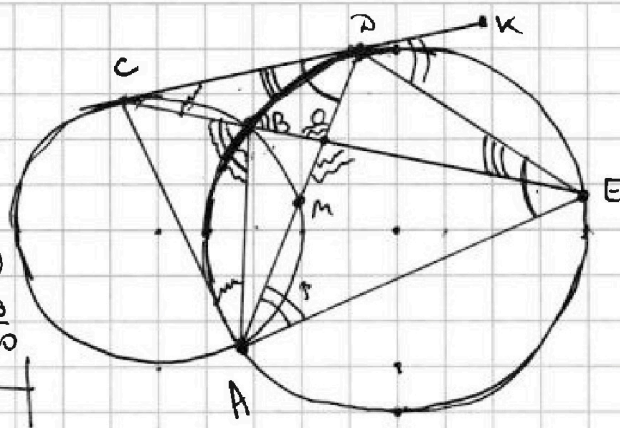


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

МЧ.
Дано:
 $\omega_1, \omega_2 = \alpha, \beta$
 ω_1, ω_2
 $CO \perp \omega_2 = E$
 $AO \perp CE = O$
 $\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$
 $\frac{ED}{CD} = ?$



Решение: 1) По свойству угла между хордой и касательной:

$$\begin{aligned} \angle CDA &= \angle AED \\ \angle DAE &= \angle EDK \quad (\text{т.к. } E \in CO) \\ \angle DEB &= \angle CDB \\ \angle CAB &= \angle CDB \end{aligned}$$

$$2) \quad \angle BOA = \angle ADE \quad (\text{вертик.}); \quad \begin{cases} \angle COB = \angle BOE \\ \angle CDO = \angle DEO \end{cases} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BDO = \angle CDO - \angle CDB = \angle DEO - \angle BOE = \angle AEO \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle OBD \quad (\text{по 2 углам}) \Rightarrow \angle OBD = \angle DAE$$

$$3) \text{ Пусть } \angle DAE = \angle EDK = \beta; \quad \angle AEO = \angle CDA = \alpha$$

$$4) \text{ Пусть } AD \cap \omega_1 = M$$

$$5) \quad \angle CDA = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup CM) = \alpha \quad (\text{как угол между кас. и сев.})$$

$$\frac{1}{2} \cup AC = \angle ABC = 180^\circ - \angle ABE \quad (\text{впис. и опир. на } \cup AC)$$

$$\angle ABE = \angle ADE = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \frac{1}{2} \cup AC = \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta - \frac{1}{2} \cup CM = \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \cup CM = \beta$$

$$\angle CAM = \frac{1}{2} \cup CM = \beta \quad (\text{впис. и опир. на } \cup CM) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AO - \text{бисс. } \angle CAB \Rightarrow \text{по св-ву бисс.: } \frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{10} \Rightarrow AC = \frac{2}{10} AE$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) Рассмотрим $\triangle ACD$ и $\triangle ADE$:

$$1) \angle CAD = \beta = \angle DAE$$

$$2) \angle CDA = \alpha = \angle DEA$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \text{ (по 2 углам)} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\Rightarrow AD^2 = AC \cdot AE = \frac{3}{10} AE^2$$

$$AD = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot AE$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AE}{\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot AE} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{10}{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Рассмотрим, сколькими способами можно закрасить 8 клеток, так чтобы закрашенное множество было симметрично относительно горизонтальной „средней линии“

Т.к. выполняется симметрия, то нам достаточно выбрать 4 клетки в одной половине, а вторая будет определена ~~как~~ единственным образом.

Значит, всего способов в таком случае $C_{100 \cdot 250}^4 = C_{25000}^4$

Теперь рассмотрим закрашенное множество, которое симметрично относ. вертикальной „ср. линии“. Вследствии симметрии

нам нужно просто выбрать из половины ~~или~~ 4 клетки, т.е. всего способов $= C_{200 \cdot 125}^4 = C_{25000}^4$

Получится способов с симм. $= C_{12500}^4$

Но мы посчитали два раза случаи, когда клетки одновременно симм. относительно двух ~~или~~ \Rightarrow нужно вычесть кол-во способов с симметрией относительно центра

Тогда нам нужно выбрать 2 клетки из $\frac{1}{4}$ всего \star клеток прямоугольника (из-за центральной симметрии), т.е.

кол-во способов выбрать эти 2 клетки $= C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2$

Значит, способов получить закрашенное мн., удовл. условию задачи $= 2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$

Ответ: $2 \cdot C_{25000}^4 - C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \not\equiv 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}, \text{ где } p - \text{простое число}$$

Т.к. p - простое число и $(a-c)(b-c) = p^2$, то

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a-c = p \\ b-c = p \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a = p^2 + b - 1 \\ c = b - 1 \end{array} \right. \quad (1) \\ \left\{ \begin{array}{l} c = a - 1 \\ b = p^2 + a - 1 \end{array} \right. \quad (2) \\ \left\{ \begin{array}{l} a - c = b - c \\ a - c = p \end{array} \right. \Rightarrow a = b - \text{противоречие} \\ \text{условию } (a > b)$$

$$(1): \begin{cases} a = p^2 + b - 1 \\ c = b - 1 \\ p^2 + b - 1 + b^2 = 560 \end{cases} \wedge$$

$$\begin{cases} (p^2 - 1) \not\equiv 3 \\ (p+1) \not\equiv 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1) \not\equiv 3 \\ p \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Т.к. p - простое и $p \equiv 0 \pmod{3}$, то $p = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$$

По т. Виета \Rightarrow $\begin{cases} a = -16 \\ c = -25 \\ b = -24 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 31 \\ c = 22 \\ b = 23 \end{cases}$

(2): $b = p^2 + a - 1$; Т.к. p - простое, то $p \geq 1 \Rightarrow p^2 \geq 1 \Rightarrow p^2 > 0 \Rightarrow b > a$
противоречие условию.

Ответ: $(-16; -24; -25); (31; 23; 22)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

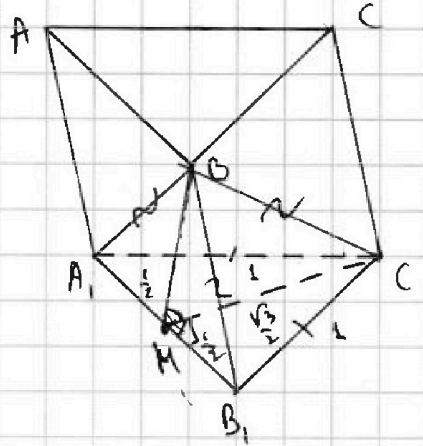
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

Дано:
 $ABCAB_1C_1$ - правильная призма
 $\triangle ABC$ - р/с
 $AB=1$
 $S_{\text{бок}} = S_{\text{осн}} = 4$
 $S_{\text{бок}} = S_{AA_1B_1B}$
 $S_{\text{осн}} = S_{AA_1C_1C} = 3$

$h = ?$



Рассмотрим тетраэдр $A_1B_1C_1B$:

Т.к. $\triangle ABC$ - р/с и высота упадет

в т.О (где т.О - точка перес. медиан, высот и бисес.),

то $A_1B_1C_1B$ - правильный тетраэдр \Rightarrow

$$\Rightarrow A_1B = B_1B = B_1C_1$$

Проведем $BH \perp A_1B_1$ \Rightarrow т.Н - сер. A_1B_1 \Rightarrow

$\bar{C}_1H \perp A_1B_1$ (т.к. $\triangle A_1B_1C_1$ - р/с) $\Rightarrow BH \perp (A_1B_1C_1)$

$$BH = 4, C_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot h = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{A_1B_1C_1}$$

$$h = 4 + 3 = 7$$

Ответ: 7.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

p1.

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b_{15} = 5-x$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b_n = q^{n-1} \cdot b_1$$

$$b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad (1)$$

$$b_1 \cdot q^{12} = 5-x \quad (2)$$

$$b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \quad (3)$$

$16+24 = 24-16 = 8$
 $-16+25 = 9$
 $-24+35 = 11$

$(13x-35)(x+1) \geq 0$
 $x \in (-\infty; -1) \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$

$q^8 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$
 $q^8 \cdot \sqrt{13x-35}$
 $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$
 $\sqrt{13x-35} = \sqrt{(13x-35)^2}$

$np \cdot x \geq \frac{35}{13}$
 $q^8 \cdot \sqrt{13x-35}$
 $(x-23)(x+24)(x+1)\sqrt{x+1}$
 $x = \frac{35}{13}$
 $q^8 = (x+1)^2$

$529+23 = 552$
 $x = \frac{35}{13}$
 $q^4 = x+1$ (2)

$b_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

$a > b$
 $(a-b)/3$
 $(a-c)(b-c) = p^2$
 $a+b^2 = 560$
 $a = 560 - b^2$
 $(560 - b^2 - c)(b-c) = p^2$
 $560b - 560c - b^2c + b^2c^2 = p^2$
 $ab - bc - ac + c^2 = p^2$
 $c^2 - c(a+b) + ab - p^2 = 0$
 $D = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab + 4p^2 = (a-b)^2 + 4p^2$
 $169x^3 - 91x^2 + 35x + 169x^2 - 91x + 35 = x^4 + 2x^2(25-5x) + 625 - 225x$
 $169x^3 - 91x^2 + 78x^2 - 56x + 35 = x^4 + 169x^2 - 10x^3 + 75x^2 - 250x + 625$
 $x^4 - 179x^2 - 3x^3 - 194x + 520 = 0$

$a+c=1$
 $b-c=p^2$
 $a-c=p^2$
 $b-c=1$
 $a-c=p \Rightarrow a=b$
 $b-c=p$
 $c = a-1$
 $b-a+1 = p^2$

552	2
26	2
276	2
138	2
69	3
23	23
27	1
1	45=0

$13x-35$
 $x+1$
 $13x-35$
 $x+1$
 $13x-35$
 $x+1$
 $13x-35$
 $x+1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



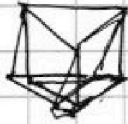
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

п2. (2):

$$\begin{cases} y+1 = -1 + 12 = 12 \\ y-12 = -1 - 1 = -12 \end{cases}$$

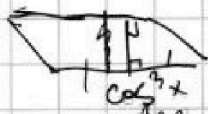


$$\begin{cases} y \leq -1 \\ -4y + 35 = \sqrt{169 - z^2} \\ -1 \leq y \leq 12 \\ -2y + 37 = \sqrt{169 - z^2} \\ y \geq 12 \\ 4y - 35 = \sqrt{169 - z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ 16y^2 - 280y + 169 = 169 - z^2 \\ -1 \leq y \leq 12 \\ 4y^2 - 146y + 37 = 169 - z^2 \\ y = 12 \\ 16y^2 - 280y + 35 = 169 - z^2 \end{cases}$$

п3.

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = P$$



$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ \cos(x+2x) &= \cos(x) \cdot (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -3\cos x (1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ P &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 \end{aligned}$$

$$2\cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) = P$$

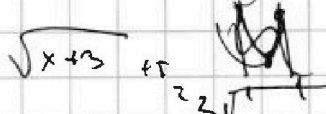
$$\begin{aligned} -4 \leq 4\cos^2 x \leq 4 \\ 0 \leq 6\cos x \leq 6 \end{aligned}$$

$$\rightarrow -3 \leq \cos x \leq 3 \quad -7 \leq P \leq 13$$

$$(13-7)(13+7)$$

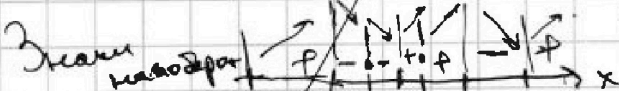
$$\begin{aligned} \cos x = 1 &\Rightarrow P = 13 \\ \cos x = -1 &\Rightarrow P = -1 \end{aligned}$$

$$f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x$$



$$f'(x) = 12\cos^2 x \cdot \sin x + 12\cos x \cdot \sin x - 3\sin x = \sin x (12\cos^2 x + 12\cos x + 3)$$

$$= -\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 = -12\sin x \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$$



Макс:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) &= 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{18}{2} + \frac{9}{2} = 13 \\ f(\pi + 2\pi k) &= -4 + 6 - 3 = -1 \end{aligned}$$

Max = 13.

$$\begin{aligned} P &\in [-1, 13] \\ \cos x (4\cos^2 x + 6\cos x + 3) &\in [-1, 13] \\ x &\in \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

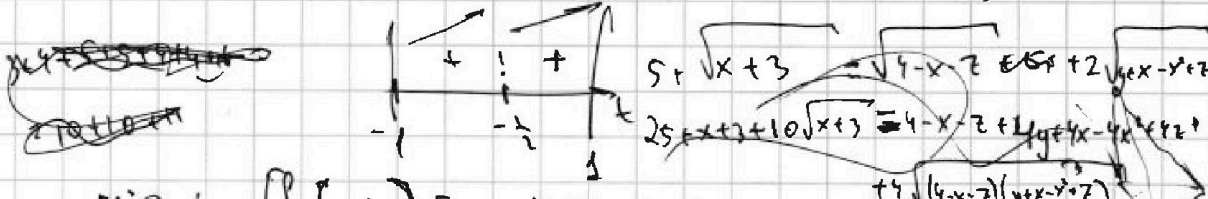
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \left(t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \right)^2$$



min / max:

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -3$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

max: 10; min: -4 $\Rightarrow p \in [-4; 10]$

$$f''(t) = 24t + 12$$

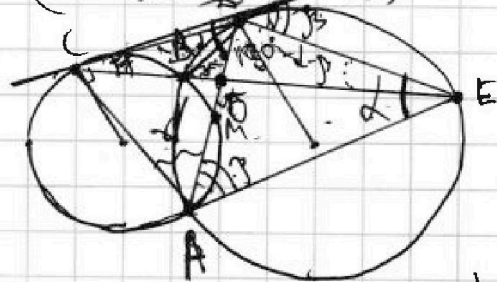
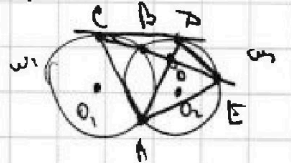
Handwritten notes and diagrams related to the problem.

Выпуклая вогнута

Handwritten notes and diagrams showing a 3D pyramid and a circle.

Handwritten notes and diagrams showing a circle and a point.

Handwritten notes.



$$CO^2 = BC \cdot EC = BC(BC + BE)$$

$$\Delta AOE \sim \Delta AOC$$

$$AC = 2\alpha + 2\beta$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$



$$CO \cdot CB = \frac{1}{2} (CDE - CDB) = \beta - \frac{1}{2} CDB$$