МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-\sqrt{5-x-3z}+6=2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20|+2|y-35|=\sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x+6\cos x=3\cos 2x+p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9:25$, считая от вершины C.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a;b;c)$ такие, что:
   - $a>b$,
   - число $a-b$ не кратно 3,
   - число $(a-c)(b-c)$ является квадратом некоторого простого числа,
   - выполняется равенство $a+b^2=820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x-3z}+6=2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (1)\\ |y-20|+2|y-35|=\sqrt{225-z^2} & (2)\end{cases}$$

Рассмотрим левую часть ур-ния (2). При $y\le 20$ она равна $90-3y$, то есть убывает при $y<20$. При $20\le y\le 35$ она равна $50-y$, то есть убывает при $20<y<35$. При $35\le y$ она равна $3y-90$, то есть возрастает при $y>35$, причём непрерывна при $y\in\mathbb{R}$ (т.к. модуль непрерывен). Значит, поскольку она кусочно-линейная и непрерывная, то её минимум достигается на смене ~~возр~~ убывания на возрастание, т.е. в $y=35$, и равен $|35-20|+2\cdot 0=15$. Поскольку $225-z^2\le 225$, то $\sqrt{225-z^2}\le 15$, причём равенство — в $z=0$. Итак, $|y-20|+2\cdot|y-35|\ge 15\ge\sqrt{225-z^2}$, значит, (равенство) $\Leftrightarrow$ $(y=35,\ z=0)$. Перепишем (1), подставив это в y, z.

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}+6=2\sqrt{35-2x-x^2}=2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$\Leftrightarrow a-b+6=2ab$, где $a=\sqrt{x+7}$, $b=\sqrt{5-x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2ab-a+b-6=0\\ a^2+b^2=12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2u-v=6\\ v^2+2u=12\end{cases}, \text{ где } \begin{cases}u=ab\\ v=a-b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u=\frac{v+6}{2}\\ v+6=2u=12-v^2\end{cases} \Leftrightarrow v^2+v-6=0 \Leftrightarrow v\in\{2,-3\} \Leftrightarrow u\in\{4, \tfrac{3}{2}\}$$

Иными словами, $v = ab = \sqrt{35-2x-x^2} \in \left\{4, \frac{3}{2}\right\}$, причём $-7 \leq x \leq 5$.

$$\left[\begin{array}{l} 35-2x-x^2 = 16 \\ 35-2x-x^2 = \frac{9}{4} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} (x+1)^2 = x^2+2x+1 = 20 \\ (x+1)^2 = x^2+2x+1 = 36 - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\cdot 15. \end{array}\right.$$

$\iff x \in \left\{\sqrt{20}-1,\ -1-\sqrt{20},\ -1-\frac{3}{2}\sqrt{15},\ \frac{3}{2}\sqrt{15}-1\right\}$, причём все эти решения подходят, т.к. $\sqrt{20} < 6$ и $\frac{3}{2}\sqrt{15} < 6$.

Ответ: $\begin{cases} z=0 \\ y=35 \end{cases}$, $x \in \left\{\begin{array}{ll} -1 \pm \sqrt{20}, & -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{15} \\ -1-\sqrt{20}, & -1-\frac{3}{2}\sqrt{15} \end{array}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2(1-\cos^2 x)\cos x =$$

$$= c(2c^2-1) - 2(1-c^2)c = 4c^3 - 3c, \text{ где } c = \cos x \in [-1,1].$$

$$p = \cos 3x + 6\cos x - 3\cos 2x = 4c^3 - 3c + 6c - 6c^2 + 3$$

$$= 4c^3 - 6c^2 + 3c + 3.$$

$$= 4\left(c^3 - 3\cdot\tfrac{1}{2}c^2 + 3\cdot\tfrac{1}{4}c - \tfrac{1}{8}\right) + \tfrac{1}{2} + 3.$$

$$= 4\cdot\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{7}{2}.$$

~~Вдругих,~~ Поскольку $f(c) = 4\cdot\left(c-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{2}$ строго возрастает (как композиция строго возрастающих функций), причём непрерывна, то на $[-1,1]$ $f(c)$ принимает все значения от $f(-1) = -10$ до $f(1) = 4$, и только их.

Следовательно, у исходного уравнения есть решение тогда и только тогда, когда $p \in [-10, 4]$, причём в таком случае $\cos x = c = \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{p-7/2}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt[3]{2p-7}\right)$, то есть $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{2p-7}\right)\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $p \in [-10, 4]$, $x = \pm\arccos\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{2p-7}\right)\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

т. к. p – простое.

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \not\vdots 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$$ где p – простое. (причём $p^2 \vdots d \Leftrightarrow d \in \{\pm 1, \pm p, \pm p^2\}$)

$a > b \Rightarrow a - c > b - c$ (в частности, $a - c \neq b - c$, т.е. не $\begin{cases} a-c = \pm p \\ b - c = \pm p \end{cases}$)

Значит, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2. \end{cases} \end{array}\right.$ В ~~первом~~ ~~первом~~ обоих случаях $a - b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Если $p \neq 3$, то $p \not\vdots 3$ (иначе p не простое), значит, $\left[\begin{array}{l} p \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow p-1 \vdots 3 \\ p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p+1 \vdots 3. \end{array}\right.$

В обоих случаях $a - b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \vdots 3$, что противоречит условию.

Значит, $p = 3$, и $a - b = p^2 - 1 = 8. \Rightarrow a = b + 8.$

Тогда $a + b^2 = 820 \Leftrightarrow 0 = b^2 + b + 8 - 820 = b^2 + b - 812 = (b-28)(b+29)$.

$\Rightarrow b \in \{28, -29\} \Rightarrow a = b + 8 \in \{36, -21\}$. Значит, тогда

$36 - c = 9 \Rightarrow c = 27$ и

$-21 - c = 9 \Rightarrow c = -30$

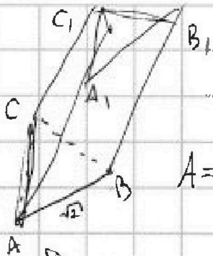
Ответ: $(a, b, c) \in \{(36, 28, 27), (-21, -29, -30)\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



„Сожмём" все метрические величины в $\sqrt{2}$ раз и введём декартовы координаты:

$A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$. Пусть $\overline{AA_1}=\overline{v}=(x,y,z)$.

Дано:
$ABCA_1B_1C_1$ – призма;
$AB=2$; $\triangle ABC$ – р/с;
$S(CC_1B_1B)=5$;
$S(AA_1C_1C)=5$;
$S(AA_1B_1B)=4$.
Найти $h=d(ABC, A_1B_1C_1)$.

Тогда условие на площади означает, что

$$\begin{cases}\frac{5}{2}=|\overline{v}\times\overline{a}|=|\overline{CC_1}\times\overline{CB}|, \quad \cancel{\text{где } |\overline{v}\times\overline{a}|}\\ \frac{5}{2}=|\overline{v}\times\overline{b}|=|\overline{AA_1}\times\overline{AC}|\\ \frac{4}{2}=|\overline{v}\times\overline{c}|=|\overline{BB_1}\times\overline{AB}|,\end{cases}$$ где „$\times$" – векторное произведение.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x & y & z\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}^2=(y+z)^2+x^2+x^2\\ \left(\frac{5}{2}\right)^2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x & y & z\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}^2=y^2+(x+z)^2+y^2\\ \left(\frac{4}{2}\right)^2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x & y & z\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}^2=z^2+z^2+(x+y)^2.\end{cases}$$

Но $(y+z)^2+x^2+x^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=y^2+(x+z)^2+y^2 \Rightarrow 2yz+x^2=2xz+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2z)=0.$

Либо $x=y$, тогда $\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^2=(x+z)^2+2x^2\\ 4=2z^2+4x^2 \Leftrightarrow z^2=2-2x^2\end{cases}$ $\cancel{\Leftrightarrow\begin{cases}25/4=3x^2+z^2+2xz=x^2+2xz+2\\ z^2=2-2x^2\end{cases}}$, т.е. $x^2+y^2+z^2=z^2+2x^2=2$.

Но это невозможно, т.к. тогда призма прямая (~~высота параллельна высоте гр-ка AA_1B_1B~~).

Либо $z=\frac{x+y}{2}$, тогда $\begin{cases}4=2z^2+(x+y)^2=\frac{3}{2}(x+y)^2\\ 25/4=(y+z)^2+2x^2\\ 25/4=(x+z)^2+2y^2\end{cases}\Leftrightarrow \frac{25}{2}=3(x^2+y^2)+\frac{3}{2}(x+y)^2$

Значит $3(x^2+y^2)=\frac{25}{2}-4=\frac{17}{2}$. Тогда $x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=$

$=\frac{17}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}=\frac{7}{2}$

„Растянем" обратно и получим, что $h=d(ABC, A_1B_1C_1)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{7}$.

Ответ: $h=\sqrt{7}$

Пусть эта геом. прогрессия — $(a\cdot q^{n-1})_{n\geq 1}$. Перепишем условие:

$$\begin{cases} a q^3 = \sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ a\cdot q^9 = x+4 \\ a\cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{cases}$$

$(\Rightarrow x\neq 3)$. (Если $a=0 \vee q=0$, то $x=-4$, но $aq^3\neq 0$ $\Rightarrow aq\neq 0$)

Тогда $q^8 = \dfrac{a\cdot q^{11}}{a\cdot q^3} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2 \Rightarrow q^4 = |x-3|$

Значит, $\sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}}\sqrt{(15x+6)(x-3)}\,|x-3| = (aq^3)(aq^{11})q^4 = a^2q^{18} = (x+4)^2$.

$\Leftrightarrow |15x+6| = (x+4)^2$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq -6/15 = -2/5 \\ x^2+23x+22=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq -2/5 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\{-1,-22\} \\ x\in\{2,5\}. \end{array}\right.$$

~~Нетрудно видеть, что при всех таких x существуют a и q, удовлетворяющие системе выше. Следующий вопрос — терминологический. Если считать Г.П. любую последовательность $(a\cdot q^{n-1})_{n\geq 1}$, $a,q\in\mathbb{R}$, то все эти x подходят. Если~~ ограничить их до $q>0$, то $x\in\{-1,2,5\}$. Но $\operatorname{sgn}(aq^3) = \operatorname{sgn}(a\cdot q^9) \Rightarrow x\geq -4$. Для $x=-1$ подходят $a=\dfrac{3}{\sqrt{2}^9}$, $q=\sqrt{2}$.

~~Для~~ При $x=2$ — не определён aq^3, так что $x\neq 2$. При $x=5$ подходит $a=\dfrac{9}{\sqrt[4]{2}^9}$, $q=\sqrt[4]{2}$. Значит, $x\in\{-1,5\}$.

Ответ: $x\in\{-1,5\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Разделим этот прямоугольник средними линиями на 4 прямоугольника X, Y, Z, T. Очевидно, для каждого закрашенного мн-ва с одной из указанных симметрий в каждом из 4 меньших прямоугольников по 2 закрашенные клетки.~~

Пусть A — все закрашенные мн-ва симметричные отн. большей средней линии, B — отн. меньшей средней линии, C — отн. центра.

$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$ по формуле включения-исключения. Заметим, что $A\cap B = B\cap C = C\cap A = A\cap B\cap C$, т.к. композиция любых 2 различных из указанных симметрий порождает третью (достаточно убедиться в этом для одной закрашенной клетки), причём тогда в каждом из 4 меньших прямоугольников будет по 2 закрашенные клетки (тогда всё мн-во однозначно восстанавливается по одному из меньших пр-ков(значит, $|A\cap B\cap C| = \binom{200\cdot 150/4}{2}$), т.к. все случаи возможны)

Закрашенное множество из A однозначно восстанавливается по любому мн-ву из 4 клеток ниже средней линии, B — по любому мн-ву 4 клеток левее ср. линии, C — по любому мн-ву 4 клеток ниже средней линии. Значит, $|A| = |B| = |C| = \binom{200\cdot 150/2}{4}$

Ответ: $3\cdot\binom{15000}{4} - 2\cdot\binom{7500}{2}$. ~~$3\cdot\binom{15000}{4} - 7500\cdot 7499$~~.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

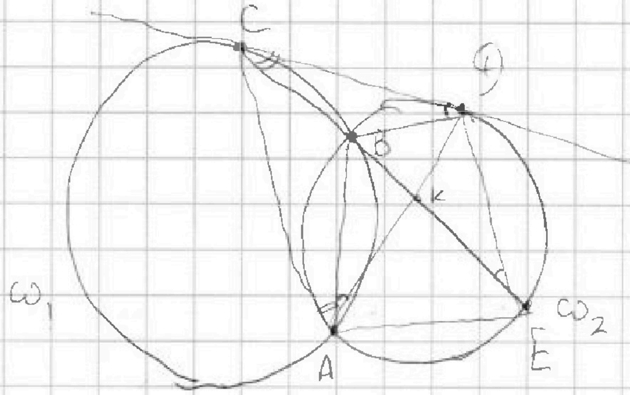
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$

$\frac{E(4)}{C(4)}$

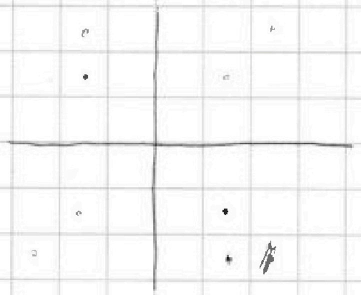
$\begin{cases} x^2+y^2 = \frac{17}{6} \\ (x+y)^2 = \frac{8}{3} \end{cases}$

$\frac{17}{6} - \frac{16}{6} = 2xy = \frac{1}{6}$

$C(4)^2 = CB \cdot CE$

$xy = \frac{1}{12}$

$x + y = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$



A, B, C

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x+y)^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x^2+y^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

$= \frac{3}{4}(x^2+y^2) + xy/2$

$\left(y + \frac{x+y}{2}\right)^2 + 2x^2$

$2x^2 + x(x+y) + \frac{(x+y)^2}{4} + y^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4. 5. ~~6~~ 7.

$x^2+8x+16$

$c^3 - 3\cdot\frac{1}{2}c^2 + 3\cdot\frac{1}{4}c$

$$\begin{cases} aq^3 = \sqrt{\dfrac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ aq^3 = x+4 \\ aq^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \end{cases}$$

$\cos 3x + 6\cos x - 3\cos 2x$

$x^2+8x+16 = 15x+6$

$\left(c-\frac{1}{2}\right)^3 = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{4}c - \frac{1}{8}$

$\sqrt{15} < 4$

$x^2+23x+22$

$c\cdot(4c^3-3)$

$x^2-7x+10$

$q^8 = \frac{aq^{11}}{aq^3} = (x-3)^2$

$c\cdot(2c^2-1) - 2c(1-c^2)$

$2x^2+y^2+z^2-2yz = a$

q

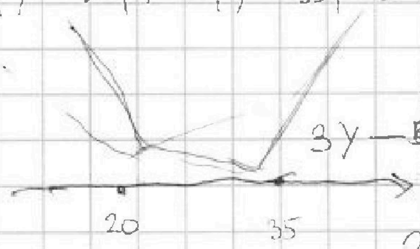
$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$

$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x$

$$\begin{cases} 25/4 = 3x^2+z^2+2xz \\ 2 = z^2+2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

$-15 < z < 15$



$9/$ $z=0$, $y=35$

$3y - 90$

9

$9\sqrt{2}$

$v+6 = 12 - v^2$

$\sqrt{\frac{9}{4^3}}$ $\frac{3}{8}$

$2yz + x^2 = 2xz + y^2$

$v^2+v=6$

$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{35-2x-x^2}$

3 3 a b

$(x+7)(5-x)$

a b

$\sqrt{9\cdot 4}$

$$\begin{cases} u-v=6 \\ v^2+2u=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab - a + b = 6 \\ a^2+b^2 = 12 = 4ab - 2(a+b) \end{cases}$$

$4c^3 - 3c + 6c - 6c^2 + 3 = p$

$4c^3 - 6c^2 + 3c + 3 = p$, $c \in [-1, 1]$