



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$ , десятый член равен  $x+4$ , а двенадцатый член равен  $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:
- $a > b$ ,
  - число  $a - b$  не кратно 3,
  - число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
  - выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

Пусть  $b_1$  - первый член этой прогрессии, а  $q$  - её знаменатель.  $b_n, q \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+4, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^4} = b_1 \cdot q^{11}$$

~~$(15x+6)(x-3) \geq 0$   $x > \frac{2}{3}$   $x < -4$   $x > 3$   $x < -\frac{2}{3}$   $x > 3$~~

$$(15x+6)(x-3) \geq 0 \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -\frac{2}{3} \quad 3 \end{array} \rightarrow x$$

$$x > 3: \quad \frac{b_{12}}{b_n} = q^8 = \sqrt{(x-3)^8} \quad q = \sqrt[4]{x-3}$$

$$b_{10} = b_n \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6} \quad x+4 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9^2 \quad x = \frac{7 \pm 3}{2} = 2, 5$$

но  $x=2$  не подходит. Так.  $x > 3$  подходит,  $x=5$ .

$$x < -\frac{2}{3}: \quad \frac{b_{12}}{b_n} = q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)^4} \cdot \sqrt{\frac{(x-3)^3}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} \quad q = \sqrt[4]{3-x}$$

$$b_{10} = b_n \cdot q^6 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(15x+6)} \quad x+4 = \sqrt{-(15x+6)}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 23x + 22 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1; -22 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x = -1$$

Ответ:  $x = -1; 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 + 4\sqrt{2} > -1 \quad -1 + 4\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к. } 4\sqrt{2}-1 > 4 > \frac{5}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается,  $x = -1 + 4\sqrt{2}$  не подходит.

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 - \frac{7}{2} > -5 > -7, \quad -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{-3\sqrt{5}-2}{2} < \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}$$

Получается,  $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$  подходит.

$$-1 + \frac{3}{2}\sqrt{5} > -1 \quad \frac{3\sqrt{5}-2}{2} = \frac{3\sqrt{5}-2}{2} \vee \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \quad 3\sqrt{5} \vee 3\sqrt{3}+1$$

$$45 \vee 27 + 6\sqrt{3} - 1 \quad 18 \vee 6\sqrt{3} \quad 3 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}-2}{2} > \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

значит  $x = -1 + \frac{3}{2}\sqrt{5}$  не подходит.

Со всеми подходящими корнями вернёмся в систему и найдём  $y$ :

$$\begin{cases} x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

~~Ответ:  $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$~~

Ответ:  $x = -1 - 4\sqrt{2}; -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = 35, z = 0.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} & (I) \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} & (II) \end{cases}$$

Рассмотрим II: Правая часть имеет обычный график корня по  $z$ , принимает значения на  $[0; 15]$  на  $[-15; 15]$ . При  $[-15; 0]$  возрастает, в  $-15$  минимум, мин. значение равно 0, в 0 максимум, макс. значение равно 15. При  $[0; 15]$  убывает, в 15 минимум, мин. значение равно 0.

Левая часть гр-я имеет график по  $y$ , минимумы в  $20$  и  $35$ .



В точках  $20$  и  $35$  достигается максимум, если  $y$  не является минимальным, при нем график.

График принимает миним. значение.  $y=20$ :  $2|20-35| = 30$ ,  $y=35$ :

$|25-20| = 15$ .  $\Rightarrow$  при  $y=35$  макс. значение, и это 15. Заметим,

что ~~левая~~ левая часть гр-я имеет максимальное значение,

достигаемое в одной точке, равное максимуму значения

правой части, достигаемому в одной точке, а значения

$y$  уравнения есть только единственное решение:

$y=35, z=0$ . Вернемся в систему.

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \\ y=35, z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)} \\ y=35, z=0 \end{cases}$$

~~Пусть  $a = \sqrt{x+7}, b = \sqrt{5-x}$ .  $a, b \in \mathbb{R}$   $a \geq 0, b \geq 0$ . Вернемся к уравнению~~







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

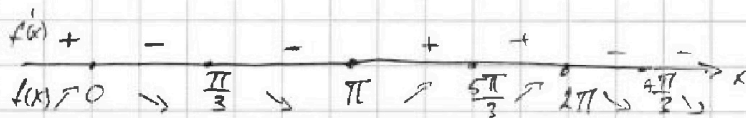
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 - p = 0 \quad p = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$$

Пусть  $f(x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$

$$f'(x) = 12 \cos^2 \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) - 12 \cos x = -12 \sin x (\cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Получается,  $f(x)$ , хотя и не строго, но монотонно, убывает на

$[2\pi k; 2\pi k + \pi]$  и возрастает на  $[2\pi k + \pi; 2\pi(k+1)]$ , а  $2\pi k$  и

$\pi + 2\pi k$  — это точки максимума и минимума,  $k \in \mathbb{Z}$ , и так

как  $p = f(x)$ , то чтобы было хотя бы одно решение,  $f(\pi) \leq p \leq f(0)$

$$-4 - 6 - 3 + 3 \leq p \leq 4 + 3 - 6 + 3 \quad -10 \leq p \leq 4. \quad \text{Значит, всегда}$$

для все заданных значений  $p$ , при которых уже имеет хотя бы одно ре-

шение, и это:  $p \in [-10; 4]$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

Знаем, что если в прямоугольнике симметрия по одной «средней линии», то в нём есть и симметрия по центру. Это верно, потому что если в прямоугольнике симметрия по одной «средней линии», то треугольник можно разрезать на 4 прямоугольника попарно симметричными средними линиями, и тогда точка из одной крайней половины будет соответствовать точке из соседней, и в свою очередь тоже, а это означает точки на краях с центром и первой взятой точкой. Как-то таких случаев соответств к каждой стороне выбрать 2 точки в центре ~~каждой~~ крайней стороны, и это даёт  $C_{7500}^2 = \frac{7500 \cdot 7499}{2} = 3750 \cdot 7499$ .

Остальные как-то случаев для каждой средней линии это:

$$C_{15000}^4 - C_{7500}^2, \text{ а значит всего случаев даёт: } 2C_{15000}^4 - C_{7500}^2.$$

Для выбора случаев несчетных можно тоже разрезать прямоугольник на 4 части для удобства, т.к. точки из одной половины проектируются в одну, все симметрично относительно центра — это концы для каждой точки кончается ~~тогда~~ в точке с такой же расстоянием до центра, но той же





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рядом, где лежат другие точки с центром, но не другие  
лучи. Для центральной симметрии лучей всего будет

$$C_{15000}^4. \text{ Всего лучей будет: } (2C_{15000}^4 - C_{7500}^2) + C_{15000}^6 - C_{7500}^2 =$$

$$= 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - \frac{7500 \cdot 7499}{4}$$

$$\text{Ответ: } 3C_{15000}^4 - 2C_{7500}^2 = \frac{15000 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997}{8} - 7500 \cdot 7499 \text{ лучей.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть  $p$  - простое число, тогда имеем следующие варианты:

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} u > b \\ u \neq b \\ \text{или} \\ \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a > b \\ u \neq b \Rightarrow c + p^2 \neq c - 1 \Rightarrow p^2 \neq 1 \\ \begin{cases} a = p^2 c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - p^2 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \end{cases}$$

$p = 3$   
 $p = 3$ , т.к.  
простое

$$\begin{cases} a > b \\ a = y + c \\ b = 1 + c \\ u = c - 1 \\ b = c - 9 \\ u + b^2 = 820 \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ y + c + c^2 + 1 = 820 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c^2 + 3c - 110 = 0 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c^2 - 12c - 740 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$D = 9 + 440 = 57^2$$

$$D = 144 + 2960 = 57^2$$

$$\begin{cases} a = y + c \\ b = 1 + c \\ c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27 \\ \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20; 37 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $(-21; -29; -30)$ ,  $(36; 28; 27)$ ,  $(-21; -29; -20)$ ,  $(36; 28; 37)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

	4	-6	3	3
1	a	-2	1	4
2	a	2	2	4
→ 1	a	-10	13	-10
-3	a	-18		
$\frac{3}{2}$	a	-9	$\frac{3}{2}$	-
$-\frac{3}{2}$	a	-9		
$\frac{1}{2}$	a	-4	1	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	a	-8	2	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	a	-5	$\frac{1}{2}$	-
$-\frac{1}{2}$	a	-7	$\frac{1}{2}$	-

$$k_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + \dots + k_0 = 0 \quad (1, 1)^n$$

$$a^n k_n + \dots + k_0 \cdot b^n = 0 \quad \Rightarrow k_0 = a$$

$L_n 1.5$

$$a \neq b$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$\exists p > a > 0$

$$\begin{cases} b-c = p^2 \\ a-c = 1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = p^2 + c \\ a = c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = p^2 + 1 \\ a = p^2 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2299 \mid 9 \\ -22 \\ \hline 34 \\ -34 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3299 = 57^2$$

$\exists a > b > 0$ :

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = p^2 + c \\ b = p + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times 4 \\ \hline 524 \\ + 16 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\frac{5}{4} - 35$$

$$\frac{9-110}{1}$$

$$p^2 \neq 1$$

$$p: 3$$

$$p = 3$$

$$a = c + 1$$

$$a = c + 9$$

$$a - b = 1$$

$$a + b = 820$$

$$c + 9 = c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$a - c > b - c$$

$$b > c + 1$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 810 \cdot 4 = 3299 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27$$

$$(-24; -29; -30), (36; 28; 27)$$

$$\sqrt{225 - 22} \in [0; 10] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 220 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -220 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$\exists 0 > a > b$ :

$$\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$$

$$p^2 \neq 1 \quad p = 3$$

$$a = c - 1$$

$$b = c - 9$$

$$a(1-b) + b(1-a)$$

$$x + 2$$

$$(5-x)(x+1) = 5x + 35 - x^2 - x = 35 - x^2 + 4x = 35 \Rightarrow 35 - 55 = \sqrt{225 - 22}$$

$$5 - x - 35$$

$$y - 2x - x^2 = 2$$

$$\sqrt{a - b} + 6 = 20$$



$$-x^2 + 4x + 35 = 0$$

$$(y-20) \times 2(9-55) = 15$$

$$y > 35: 3y - 95 = 15$$

$$3y = 110$$

$$y = \frac{110}{3} \approx 36$$

$$\begin{cases} y = 35 \\ z = 15 \end{cases}$$

$$\frac{36}{5} \mid 4$$

$$30 < y < 20: y - 20 - 2y + 40 = 90 - 3y = 15$$

$$y = 35$$

$$y < 20: 20 - y - 2y + 40 = 90 - 3y = 15$$

$$a + b = b(2a + 1) \mid \cdot 2$$

$$2a + 2 = 2b(2a + 1)$$

$$(2b - 1)(2a + 1) = 11$$

11

$$30 - 9 = 5$$

$$4a + b - 2a - 2b = 5 = 25$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_n = b_1 \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = q^8 = \sqrt{(x-3)^4} \quad (q = \sqrt{x-3})$$

$$b_{10} > b_1 \cdot q^9 = x+9 \quad x+9 = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3} \cdot (15x+6)(x-3)} = q^2 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \quad b_9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}} \quad q = (x-3) \quad q = \sqrt[4]{\frac{15x+6}{x-3}}$$

$$b_{10} = x+9 = \sqrt{\frac{15x+6}{x-3}}$$

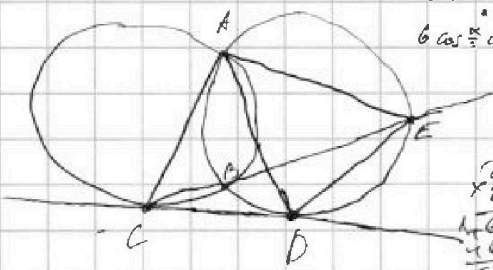
$$x^2 - 2x - 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9$$

$$x = \frac{2 \pm 3}{2} = 2.5$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos 2x \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos x (\cos 2x + 1) + 3 \cos x = 3 \cos 2x + p$$



$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x + \cos 2x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x$$

$$- \cos x \cos 2x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x (1 - \sin^2 x)$$

$$= 4 \cos 3x - 3 \cos x \quad p = \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$D = 23^2 - 81 = 320$$

$$\frac{-23 \pm 21}{2} = -2, -1$$

$$4 \cos 3x + 3 \cos x = 3 \cos 2x + p \quad 4 \cos^3 x + 3 \cos x = 8 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 6 \cos x + 3) + 3 - p = 0$$

$$\frac{3}{4} \left( \frac{4}{4} - \frac{4}{4} + 3 \right) + 3 - p = 0 \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + 3 - p = 0 \quad p = \frac{3}{16} + 3 = \frac{25}{16}$$

$$f(x) = 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x$$

$$f'(x) = 4 \cos x \cdot (-2 \cos x \sin x) - 12 \cos x (-\sin x) = -8 \cos x \sin x + 12 \cos x \sin x = 4 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = 2 \sin 2x$$

$$f(x) = -1(4+6+3) + 3 - p = 0 \quad p = -10$$

$$f(x) = 1(4-6+3) + 3 - p = 4 - p \quad p = 4$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{4} + 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{8}$$

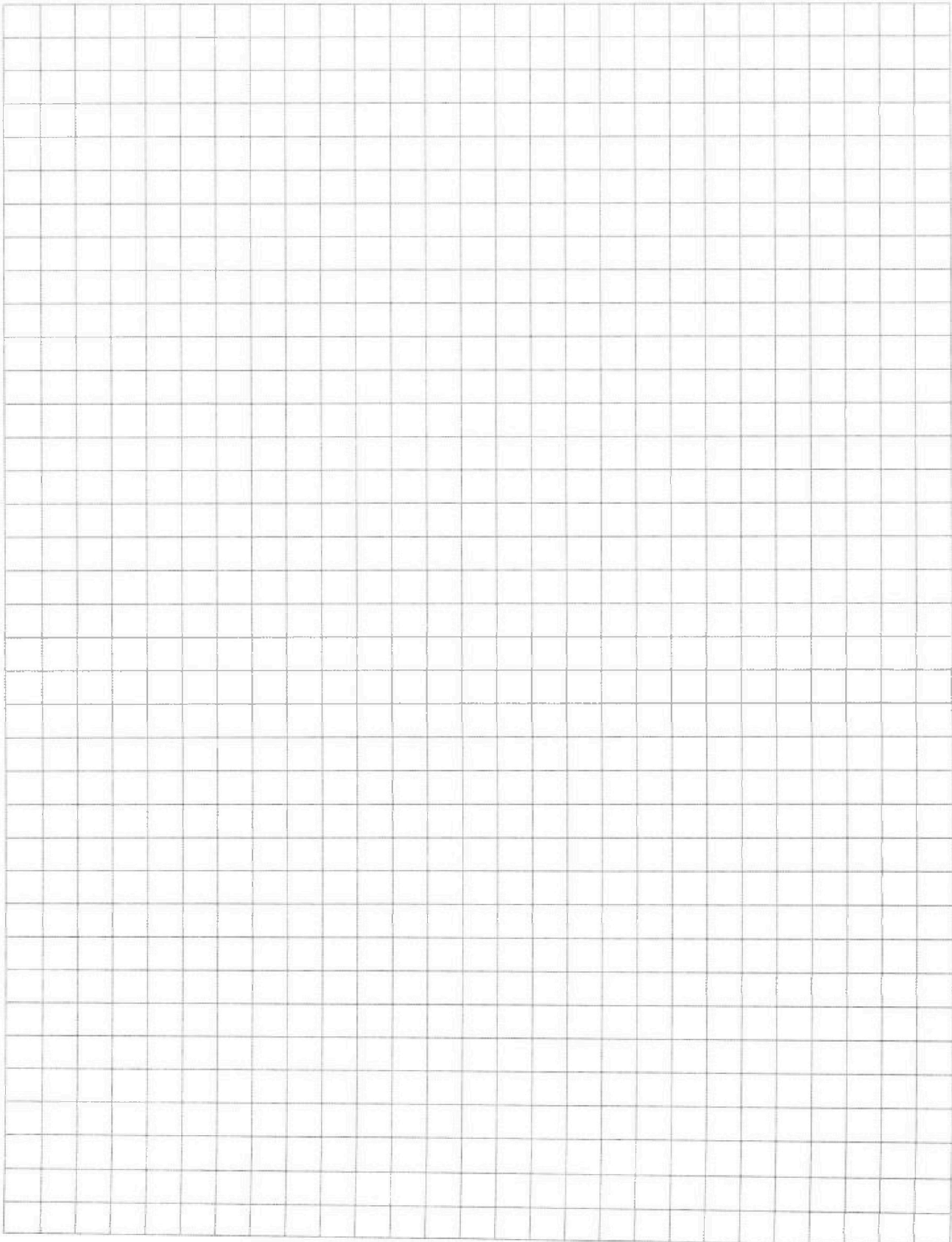


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа,  $p$  — простое число:  $(a-c)(b-c) = p^2$

Т.к.  $a > b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  — простое:  $\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$  Из условия  $(a-b) \div 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \not\equiv b \Rightarrow p^2 + c \not\equiv 1 + c \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \div 3$ , и т.к.  $p$  — простое

число, то  $p = 3$ , а значит:  $\begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$   $a + b^2 = 820$  а значит.

$$9 + c + c^2 + 2c + 1 = 820 \quad c^2 + 3c - 810 = 0 \quad D = 9 + 3240 = 3249 = 57^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27.$$

$a = 36, b = 28, c = 27.$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -30 \end{cases} \text{ — не подходит, т.к. } a > b \geq 0$$

2) Пусть  $0 > a > b$ : Пусть  $p$  — простое число, тогда  $a < 0$ :

$(a-c)(b-c) = p^2$ . Т.к.  $a > b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  — простое:  $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases}$   $a \not\equiv b \Rightarrow c - 1 \not\equiv c - p^2 \Rightarrow p^2 \not\equiv 1 \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p = 3$ , т.к. простое

$$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases} \quad a + b^2 = 820 \quad c - 1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0 \quad D = 289 + 2960 = 3249 = 57^2 \quad c = \frac{17 \pm 57}{2} =$$

$$= -20; 37. \quad \begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -20 \end{cases}$$

$a = -21, b = -29, c = -20$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases} \text{ — не подходит, т.к. } 0 > a > b$$