



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть b_1 - первое член этого прогрессии, а q - её знаменатель. Тогда:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \quad b_{10} = x+9, \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^3} = b_1 \cdot q^{11}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{(15x+6)(x-3)^3} \cancel{x-3} \cancel{x-3} \cancel{x-3} \cancel{x-3} \cancel{x-3} \\ & (15x+6)(x-3) \geq 0 \end{aligned}$$

$\begin{array}{c} + \\ - \\ \hline -2 \\ \cancel{3} \end{array}$

$$x \geq 3 : \quad \frac{b_{12}}{b_1} = q^8 = \sqrt{(x-3)^8} \quad q = \sqrt[4]{x-3}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(x-3)^3} = \sqrt{15x+6} \quad x+9 = \sqrt{15x+6}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 15x + 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 8^2 \quad x = \frac{7 \pm 8}{2} = 2,5,$$

но $x = 2$ не подходит, т.к. $x > 3$. Значит, $x = 5$.

$$x \leq -\frac{2}{5} : \quad \frac{b_{12}}{b_1} = q^8 = \sqrt{(15x+6)(x-3)} \cdot \sqrt{\frac{(x-3)^8}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} \quad q = \sqrt[4]{3-x}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(3-x)^3} = \sqrt{-(15x+6)^3} \quad x+9 = \sqrt{-(15x+6)}$$

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 23x + 22 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1; -22 \\ x \geq -4 \end{cases} \quad x = -1$$

Ответ: $x = -1; 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-1 + a\sqrt{2} \geq -1 \quad -1 + 4\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к. } 4\sqrt{2}-1 > 4 > \frac{5}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}.$$

Получается, $x = -1 + a\sqrt{2}$ не подходит.

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \geq -1 - \frac{7}{2} > -5 > -7, \quad -1 - \frac{3\sqrt{5}}{2} = -\frac{3\sqrt{5}-2}{2} < -\frac{3\sqrt{3}-1}{2}.$$

Получается, $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$ подходит.

$$-1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \geq -1 \quad \frac{3\sqrt{5}-2}{2} = \frac{3\sqrt{5}-2}{2} \quad \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \quad 3\sqrt{5} \vee 3\sqrt{3}+1$$

$$45 \vee 27 + 6\sqrt{3} - 1 \quad 18\sqrt{6}\sqrt{3} \quad 3 > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}-2}{2} > \frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \text{ а}$$

значит $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}$ не подходит.

Со всеми подходящими корнями вернется система и подует:

$$\begin{cases} x = -1 - a\sqrt{2}; \quad -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5} \\ y = 35 \\ z = 0 \end{cases}$$

~~Проверка~~

$$\text{Ответ: } x = -1 - 4\sqrt{2}; \quad -1 - \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad y = 35, \quad z = 0.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+z} - \sqrt{5-x-z} + 6 = 2\sqrt{35-2x-z^2} \\ y = 20 \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

$$|y-20| \in [20-35] = \sqrt{225-z^2} \quad (\text{II})$$

Задача II: Прямая имеет собственную формулу $y = z$,
принадлежит множеству $[0; 15]$ и $[-15; 15]$. На $[-15, 0]$
возрастает, в -15 минимум, нач. знач. равно 0 , в 0 максим.,
нач. знач. равно 15 . На $[0; 15]$ убывает, в 15 минимум, нач.

Зад. равна 0 . Желтая прямая имеет формулу $y = g$, минимумы на W :



В точках 20 и 35 значение минимума, один из которых является конечным, при этом второй -

здесь выражение наим. знач. $g = 20$: $2(20-35) = 30$, $y=35$.

$(25-20) = 15 \Rightarrow$ при $g = 35$ наим. знач., и это 95 . Значит,

что ~~желтая~~ линия имеет минимальное значение,
достигаемое в одной точке, первое минимальное значение -
это прямой линии, достигаемое в другой точке, а значит
чтобы уравнение это только единственное решение:

$y = 35, z = 0$. Вернемся в систему.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+z} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-z^2} \\ y = 35, z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+4)} \\ y = 35, z = 0 \end{array} \right.$$

Пусть $a = \sqrt{x+4}$, $b = \sqrt{5-x}$, $a \geq 0, b \geq 0$. Тогда система

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Баллы из списка, чтобы решить 1-ю задачу.

$$\sqrt{x+4} \rightarrow \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+4)} \quad \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{5-x} = 2(\sqrt{(5-x)(x+4)} - 3) \quad x \in [-4; 5] \text{ если в этом диапазоне}$$

$$\sqrt{x+4} \geq \sqrt{5-x} \quad x+4 > 5-x \quad 2x \geq -2 \quad x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+4} < \sqrt{5-x} \text{ при } x < -1$$

$$\sqrt{(5-x)(x+4)} \geq 3 \quad -x^2 - 2x + 35 \geq 9 \quad x^2 + 2x - 26 \leq 0 \quad \frac{D}{4} = 1 + 26 = 27$$

$$\frac{-8\sqrt{3}-1}{2} \quad \frac{8\sqrt{3}-1}{2} \quad x \in \left[\frac{-8\sqrt{3}-1}{2}; \frac{8\sqrt{3}-1}{2} \right]. \quad x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

Получаем, что число $x \in [-4; \frac{-8\sqrt{3}-1}{2}]$, ибо $x \in [-1; \frac{8\sqrt{3}-1}{2}]$

$$\text{При } x \in [-4; \frac{-8\sqrt{3}-1}{2}] \cup [-1; \frac{8\sqrt{3}-1}{2}]: \quad 12 - 2\sqrt{(x+4)(5-x)} = 4(5-x)(x+4) + 36 -$$

$$-8 \cdot 3 \cdot \sqrt{(x+4)(5-x)}. \quad \text{Пусть } t = \sqrt{(x+4)(5-x)}, t \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0 \quad D_{t,0} = 121 - 96 = 5^2 \quad t = \frac{11 \pm 5}{4} = 4; \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+4)(5-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+4)(5-x)} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ x^2 + 2x = \frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 31 = 0 \\ 4x^2 + 8x - 13 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 1 + 31 \cdot 4 \\ D = 16 + 13 \cdot 4 \end{cases}$$

$$= 32 = (4\sqrt{2})^2$$

$$= 4 \cdot 8 = (6\sqrt{2})^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 4\sqrt{2} \\ x = \frac{-9 \pm 6\sqrt{5}}{4} = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{cases}$$

Получившиеся корни должны лежать в $[-4; \frac{-8\sqrt{3}-1}{2}] \cup [-1; \frac{8\sqrt{3}-1}{2}]$.

$$-1 - 4\sqrt{2} \leq -2 - 4\sqrt{2} \leq -6 - 6\sqrt{2} > -\sqrt{36} \quad -1 - 4\sqrt{2} < -3 \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{ т.к.}$$

$$-1 - 4\sqrt{2} < -6 < -\frac{6-1}{2} < -\frac{3\sqrt{3}-1}{2}. \quad \text{Получаем, } x = -1 - 4\sqrt{2} \text{ корректно.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 - p = 0 \quad p = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3$$

$$\text{Пусть } f(x) = 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 6 \cos^2 x + 3 - p$$

$$f'(x) = 12 \cos^2 x \cdot (-\sin x) - 12 \cos x \cdot (-\sin x) - 3 \sin x = -3 \sin x (2 \cos x - 1)^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = 0 & x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & + & - & - & + & + & - \\ \hline f(x) > 0 & \Rightarrow & \frac{\pi}{3} & \rightarrow & \pi & \nearrow & \frac{4\pi}{3} \rightarrow x \end{array}$$

Поэтому, $f(x)$, когда x возрастает, убывает на

$[2\pi n; 2\pi n + \pi]$ и возрастает на $[2\pi(n+1); 2\pi(n+1)]$, а $2\pi n$ и

$\pi + 2\pi n$ — это точки максимума и минимума. $n \in \mathbb{Z}$. И так

как $p = f(x)$, то чтобы данное значение для x было решением, $f(\pi) \leq p \leq f(0)$

$$-4 - 6 - 3 + 3 \leq p \leq 4 + 3 - 6 + 3 \quad -10 \leq p \leq 4.$$

Значит, есть

все значения параметра p , при которых уравнение имеет хотя бы одно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Значит, что если в предыдущем случае из двух „средних точек“, то в ней есть и симметрия по центру.
~~точек~~. Это верно, потому что если в предыдущем случае симметрия по одному „среднему центру“, то предыдущий разделил мы и предыдущий центрально симметрии центра, и тогда точка из двух предыдущих будет соответствовать по точке из соседних, как в свою очередь тоже, а это означает что эта же точка на прямой с центром и перво-второй точкой. Так-бы таких случаев будет 2 раза в строке выбрать 2 точки в строке ~~которые~~ центральную, и это будет $\frac{C^2_{1500}}{2} = \frac{A_{500} \cdot A_{1000}}{2} = 3750 \cdot 7499$.

Осталось только вычесть из каждого среднего центра это:

$$C^2_{1500} - C^2_{500}. А значит всего получится: 2C^2_{1500} - C^2_{500}.$$

Две любые любые ненесимметричные можно тоже разделить на прямую, на которой они лежат, т.к. точка из двух и любых двух симметричных относительно центра, то есть симметрии относительно центра - это когда одна из которых точек находится ~~на~~ за точку с другой же расстояние до центра, но так же



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чтобы, где лежат данный точки с центром, но не другая
луче. Всегда центральная симметрия случаев всего будет:

$$C_{15000}^4. \text{ Всего случаев будет: } (2C_{15000}^4 - C_{2500}^2) + C_{15000}^4 - C_{2500}^2 = \\ = 3 C_{15000}^4 - 2 C_{2500}^2 =$$

$$\text{Ответ: } 3 C_{15000}^4 - 2 C_{2500}^2 =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓6

Пусть p — простое число, находящее под задаче задача:

$$\begin{cases} a > b \\ (a-b) \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > b \\ a \neq b \\ a-c = p^2 \\ b-c = 1 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > b \\ a \neq b \\ a \neq b \Rightarrow c \neq p^2 \neq c-1 \Rightarrow p^2 \neq 1 \\ a = p^2 c \\ b = 1 + c \\ a = c-1 \\ b = c-p^2 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > b \\ a \neq b \\ a = p^2 c \\ b = 1 + c \\ a = c-1 \\ b = c-p^2 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$p = ?$

$p = 3$, т.к.
одноточ

$$\begin{cases} a > b \\ a = 9+c \\ b = 1+c \\ a = c-1 \\ b = c-9 \\ a+b^2 = 820 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \\ 9+c + c^2 + 1 + c - 9 = 820 \\ a = c-1 \\ b = c-9 \\ c-1 + c^2 - 11c + 91 = 820 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \\ c^2 + 3c - 810 = 0 \\ a = c-1 \\ b = c-9 \\ c^2 - 12c - 742 = 0 \end{cases}$$

$$Z = 9 + 820 = 57^2$$

$$Z = 213 + 2960 = 54^2$$

$$\begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \\ c = -\frac{3 \pm \sqrt{7}}{2} = -30; 27 \\ a = c-1 \\ b = c-9 \\ c = \frac{17 \pm 57}{2} = -20; 37 \end{cases}$$

Ответ: $(-21; -29; -30), (36; 28; 27), (-21; -29; -20), (36; 28; 24)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) ^{№6} ~~Найдите наименьшее~~ ~~натуральное~~ ~~число~~: $(a-c)(b-c) = p^2$

$$\text{Т.к. } a > b, \ a, b \in \mathbb{Z}, \ p - \text{простое}: \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1+c \end{cases} \quad \text{Уз уравн} \quad (a-b)/3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \neq b \Rightarrow p^2 + c \neq 1 + c \Rightarrow p^2 \neq 1 \Rightarrow p \neq 1, \ a \text{ т.к. } p - \text{простое}$$

$$\text{значо, } \text{т.о. } p=3, \ a \text{ зна-чит.} \quad \begin{cases} a = 9+c \\ b = 1+c \end{cases} \quad a^2 + b^2 = 820 \text{ а учи.}$$

$$9+c^2 + c^2 + 2c + 1 = 820 \quad c^2 + 3c - 810 = 0 \quad D = 9 + 3240 = 3249 =$$

$$= 57^2 \quad c = \frac{-3 \pm 57}{2} = -30; 27. \quad \begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases}$$

$$a = 36, \ b = 28, \ c = 27.$$

$$\begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -30 \end{cases} \quad \text{не подходит, т.к. } a > b \geq 0$$

2) ~~Найдите~~ $0 > a > b$: ~~натуральное~~ $p - \text{простое число, такое что}$ ≈ 20 :

$$(a-c)(b-c) = p^2. \quad \text{т.к. } a > b, \ a, b \in \mathbb{Z}, \ p - \text{простое}: \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases} \quad a \neq b \Rightarrow c-1 \neq c-p^2 \Rightarrow p^2 \neq 1 \Rightarrow p \neq 1 \Rightarrow p = 3, \ a \text{ т.к. } p - \text{простое}$$

$$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases} \quad a^2 + b^2 = 820 \quad c-1 + c^2 - 18c + 81 = 820$$

$$c^2 - 17c - 740 = 0 \quad D = 289 + 2960 = 3249 = 57^2 \quad c = \frac{17 \pm 57}{2} =$$

$$= -22; 37. \quad \begin{cases} a = -21 \\ b = -79 \\ c = -20 \end{cases} \quad a = -21, \ b = -79, \ c = -20$$

$$\begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 37 \end{cases} \quad \text{не подходит, т.к. } 0 > a > b$$