



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



\mathcal{R}

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Члены a - 1-й член геом прогрессии a b - множитель, тогда.

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = a b^6 \quad \text{①} \quad 5-x = a b^4 \quad \text{②} \quad \sqrt{(13x-35)(x+1)} = a b^{14} \quad \text{③}$$

$\text{①} \neq 0$ м.к. если $\text{②} = 0 \Rightarrow 13x-35=0 \Rightarrow 5-x=0 \Rightarrow$ противор.

Уч $\frac{\text{③}}{\text{①}} \quad b^8 = (x+1)^2 \Rightarrow b = \pm \sqrt[8]{(x+1)^2}$

$$a = \sqrt[6]{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \frac{1}{b^6} = \sqrt[6]{\frac{13x-35}{(x+1)^3 \sqrt[8]{(x+1)^{12}}}}$$

⇔ тогда $\text{②} \quad 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \sqrt[8]{(x+1)^2}^6 = \sqrt{(13x-35) \frac{(x+1)^6}{(x+1)^3}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5-x)^2 = 13x-35 \\ x > -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 23x + 60 = 0 \\ x > -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5-x)^2 = 35-13x \\ x < -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3x - 10 = 0 \\ x < -1 \end{array} \right.$$

$x \leq 5$ $x \leq 5$

\Downarrow

$$\begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=3 \\ -1 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-5 \\ x < -1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим полученные значения т.к. если и
подходят, но только они, но нужна проверка.

~~Вот~~

$$x = 3$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4} = ab^c$$

$$5-x = 2 = ab^c$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 4 = ab^{14}$$

$$\text{Итого: } a = \frac{1}{32} \quad b = \sqrt{2}$$

$$x = -5$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{5(13+1)}{4^3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 20}{4^3}} = ab^c = \frac{5}{4}$$

$$5-x = 10 = ab^{12}$$

$$\sqrt{(13x+15)(x+1)} = \sqrt{5 \cdot 20 \cdot 4} = ab^{14} = 5 \cdot 4$$

$$b = \sqrt{2} \quad a = \frac{5}{32}$$

Ответ: $x \in \{-5, 3\}$

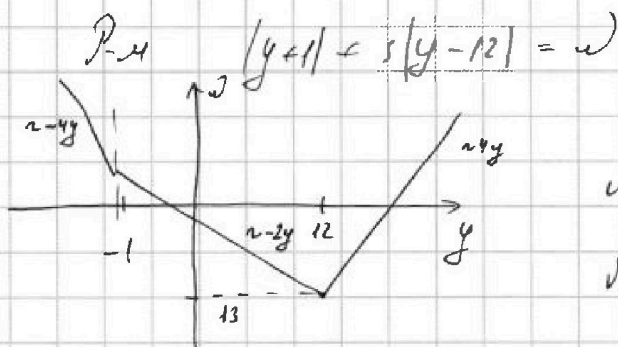


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\omega_{\min} = 13$$

$$\sqrt{163 - 2^2}^{\max} = 13$$

$$\omega = 13 = \sqrt{163 - 2^2}$$

⇐

$$\begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

⇐

$$\sqrt{x+5} \rightarrow \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+5)}$$

$$2\sqrt{(4-x)(x+5)} + \sqrt{4-x} - \sqrt{x+5} - 5 = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(4-x)(x+5)})^2$$

$$x+5 - 2\sqrt{(4-x)\sqrt{x+5}} + 4-x = 4(4-x)(x+5)$$

$$4(4-x)(x+5) + 2\sqrt{(4-x)(x+5)} - 7 = 0$$

$$2\sqrt{(4-x)(x+5)} = \frac{7 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$(4-x)(x+5) = \frac{30 \pm 2\sqrt{29}}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4-x - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} + 3+x + \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} & \textcircled{1} \\ t = -2 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{У} \textcircled{1} \quad \sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$x - x^2 + 12 = 9$$

$$x^2 - x + 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\text{У} \textcircled{2} \quad 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$4x - 4x^2 + 48 = 9$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 39}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

~~$$\text{Ans: } \begin{cases} x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} \right\} & \textcircled{12} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$~~

$$4 - \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{2} > 0$$

$$3 + \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{2} > 0$$

$$4 - \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$3 + \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$\sqrt{x+3} \text{ и } \sqrt{4-x} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ans: } \begin{cases} x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} \right\} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (\cos^2 x - 2\sin^2 x)$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos x (4\cos^2 x - 3) + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$|\cos x = t|$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$4\left(t^3 + 3t^2 \cdot \frac{1}{2} + 3t \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - 3 - \frac{1}{2} = p$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = p + 3,5$$

$$t + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \in [-1; 1]$$

$$\frac{2p+7}{8} \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{27}{8}\right]$$

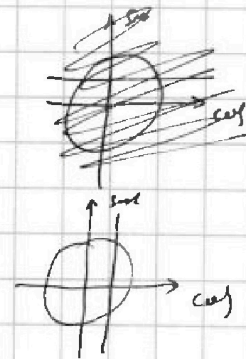
$$2p+7 \in [-1; 27]$$

$$2p \in [-8; 20]$$

$$p \in [-4; 10] \text{ - при таких } p \text{ } \exists \text{ решения}$$

и эти решения

$$x = \pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





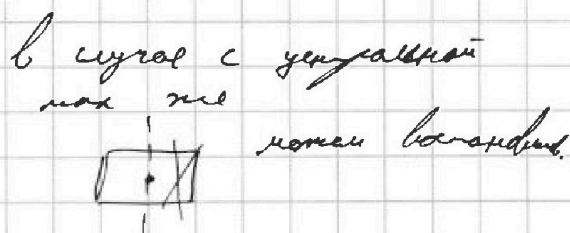
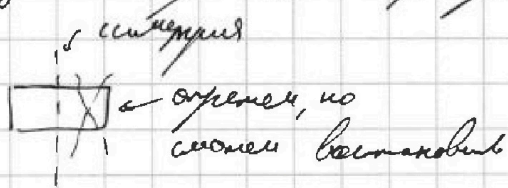
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получается если взять и "угуарь" поворачивать по узкой линии, но в зависимости от ширины мы можем выставлять одновременно один вариант размещения.

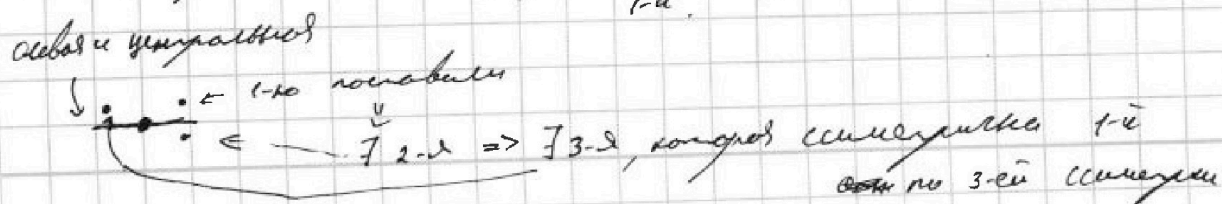
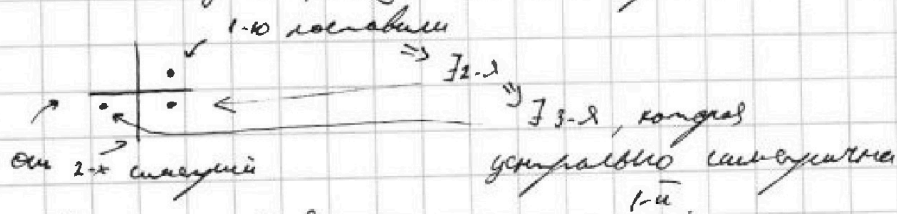


Получим формулы для каждой симметрии

$$\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 250 = 25000$$

C_{25000}^4 случаев, ~~каждый~~ как на половине можно разместить 4 клетки и еще 4 для восстановления. Но если случаи когда раскладка обладает 2 или 3 симметрией.

В случае, когда 2 симметрии \Rightarrow здесь все 3.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. пазлы готовы, это может быть только
1 или 3, но не 2 симметрично.

И м.к. ~~тоже~~ клетки не лежат на
средних линиях и центре

↓
Любой расклад симметричной
тригубы ~~задачи~~ можно
восстановить по таблице пазл.
и закрашенными пазл 2-й клетки.

П.е. пазах рекурсива C_{11500}^2 .

↓
Ответ: $C_{25000}^4 - 2 C_{11500}^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$|a-c|$ и $|b-c|$ - 1 и p^2 при том $a < b < c$

$$\Rightarrow a-c - (b-c) = a-b = p^2 - 1$$

$$a-b + 1 = p^2$$

$$a+b^2 = 560$$

$$a+b^2+p^2 = 560 + a-b + 1$$

$$p^2 = 561 - b - b^2 \Rightarrow p^2 \in [4; 9; 25; 49; 121; 169; 289]$$

$$b \in [-24; 23]$$

$$b \neq 1$$

$$b^2+b \in [32; 200; 272; 392; 490; 512; 536; 552; 557]$$

$$\text{и } b \neq 1$$

$$b \in [16; -17; 23; -24]$$

$$b \in [23; -24]$$

$$b(b+1) : 2 \text{ кратно}$$

$$\text{кратно } (1) : 2$$

далее перебор и отбрасываем

$$\begin{cases} b = 23 & p^2 = 9 \\ a = 560 - 23^2 = 31 \\ b = -24 & p^2 = 9 \\ a = 31 - 48 = -16 \end{cases}$$

$$p^2 = 9 = (a-c)(b-c)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ c = 32 \end{cases}$$

\Leftarrow

$$\begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \\ c = 15 \end{cases}$$

Ответ: $(31; 23; 22)$
 $(31; 23; 32)$
 $(-16; -24; -25)$
 $(-16; -24; 15)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$560 = a + b^2 > b^2 + b$$

$$b^2 + b - 560 < 0$$

↑
коробочка вверх вверх вершина $(-\frac{1}{2} = b)$

$$\text{Т.к. } b = 23 \quad b^2 + b - 560 = 529 + 23 - 560 = -8 < 0$$

$$b = 24 \quad b^2 + b - 560 = 529 + 23 + 24 + 23 + 1 - 560 = -8 + 48 > 0$$

$$b = -23 \quad b^2 + b - 560 = 529 - 23 - 560 = -54 < 0$$

$$b = -24 \quad b^2 + b - 560 = -54 + 24 + 23 - 1 = -8 < 0$$

$$b = -25 \quad b^2 + b - 560 = -8 + 25 - 24 - 1 > 0$$

$$b \in [-24; 23]$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ р-простое число}$$

↑
а, b, c, p ∈ Z

$$a-c = b-c, \text{ но не может быть}$$

$$\text{а если } (a-c) \text{ и } (b-c) \text{ это } 1 \text{ и } p^2$$

↑
возможн

$$560 \equiv 2$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv 1 \\ b^2 \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow b \not\equiv 1$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv 0 \\ a \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 2 \\ b \equiv 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{cases}$$

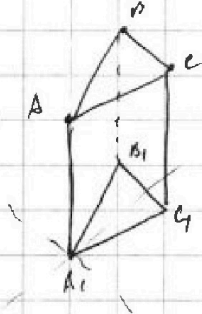


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По усл. задачи $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$

$AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $A_1C_1 \parallel AC$.

Тогда $S_{KBA_1B_1} = S_{KCA_1C_1} = 4$

$S_{KBA_1C_1} = 3$

т.к. основ.

равны

А равно удалено от

A_1B_1 и A_1C_1 .

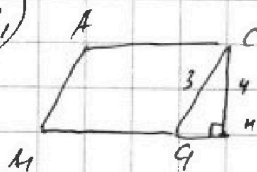
Треугольн A на $(A_1B_1C_1)$ тоне \Rightarrow
 \Rightarrow линия на бисс угла $B_1A_1C_1$ или
~~линия~~ медиана с ним.

В случае бисс угла $B_1A_1C_1$ у нас очевидно
 возникает симметрия от плоскости

AA_1 и бисс \Rightarrow т.к. $B_1C_1 = BC$ ~~то~~ бисс

симметрии ~~то~~ $BC \perp B_1C_1$ - прямоугол. и $CC_1 = 3$

д.л. (ACC_1A_1)



$CH \perp A_1C_1$

$CH = 4 \leq CC_1 = 3$, то

невозможно

~~А~~ ~~линия~~ ~~на~~ ~~бисс~~ ~~угла~~ ~~с~~ ~~$B_1A_1C_1$~~ ~~линия~~
 " ~~заменим~~ т.к. в ABC ось \parallel
 B_1C_1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\vec{A_1A} = \vec{h} + k \vec{B_1C_1}$
↑ ↑
вектор высоты коэффициент

$$|\vec{A_1A} \times \vec{B_1C_1}| = s = \left| (\vec{h} \times \vec{B_1C_1}) \right| = h \cdot B_1C_1 = h$$

$h = s$

$$y = |\vec{A_1A} \times \vec{A_1B_1}| = \left| \left[\vec{h} \times \vec{A_1B_1} \right] + k \left[\vec{B_1C_1} \times \vec{A_1B_1} \right] \right|$$

Для $k=0$ это равенство $s \Rightarrow \exists k$, что это ч.

$$\boxed{\text{Ответ: } h = s}$$

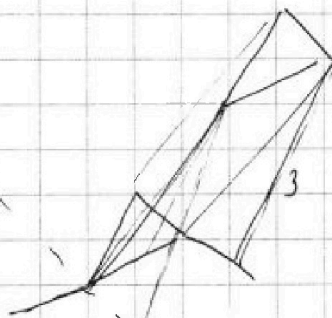
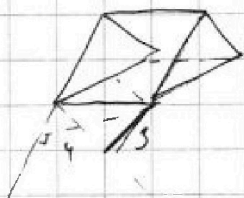
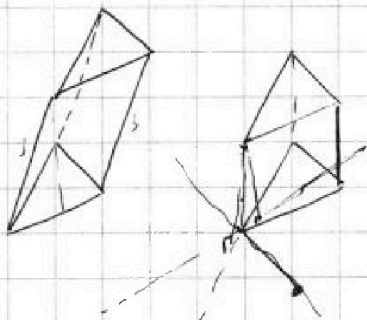


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

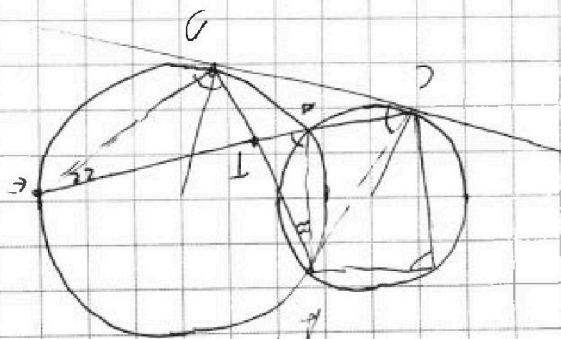
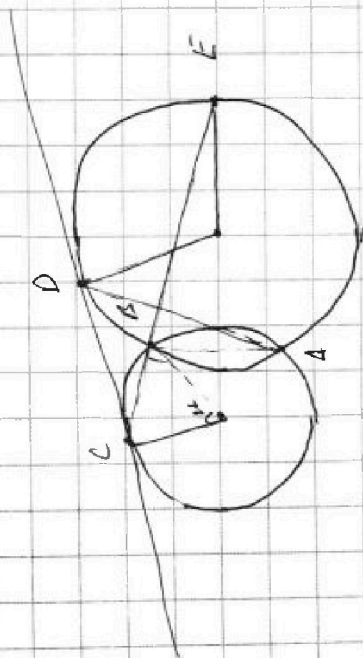
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h \times a = s$$

$$\left| \left(\frac{h}{k} + a \right) \times a \right| = s$$

$$\left| \left(\frac{h}{k} + a \right) \times b \right| = 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = a \cdot b^6$$

$$5-x = \sqrt[6]{a \cdot b^{12}}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = a \cdot b^{14}$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = a \cdot b^{10}$$

$$b^9 = 4 \sqrt{x+1}$$

$$16 = b^2$$

$$b^2 = 2$$

$$a = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^5 b^{10}}} = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^6}}$$

$$5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \sqrt{x+1}^3 = \sqrt{13x-35}$$

$$b^8 = 4^2$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 4\sqrt{4x-x^2+2}$$

$$x \geq -1$$

$$4 \geq x+2$$

$$x+2 \geq x^2$$

$$16 \geq z^2$$

$$\sqrt{5+x+3} \geq \sqrt{4-x-2}$$

$$5-x \geq 0$$

$$x \leq 5$$

$$x \in (-1; \frac{25}{13}]$$

$$25-x+3 + 10\sqrt{x+1} \geq 4-x-2$$

$$x^2 - 10x + 25$$

$$(x-5)^2$$

$$(x+5)(x-2)$$

$$25 = 5^2$$

892	2
98	2
186	2
592	2

561	163
992	2

561	272
223	2

900	25.8
172	2
196	2
42	2
68	2
14	2
2	2

5.4	71
4.8	2
8.8	2

