



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть a — шаг профессии. Тогда $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3$
и $(x+3)a^2 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$ т.к. $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \geq 0$ и $a^2 \geq 0 \Rightarrow x+3 \geq 0$
 $\Rightarrow x \geq -3$

$\frac{25x-9}{(x-6)^3} \geq 0$ $(x-6)^3$ и $x-6$ одного знака $\Rightarrow \frac{25x-9}{x-6} \geq 0$

$\Rightarrow x \leq \frac{25}{9}$ или $x > 6$ При таких ограничениях $(25x-9)(x-6) \geq 0$

\Rightarrow Наше ОДЗ: $x \in [-3; \frac{25}{9}] \cup (6; +\infty)$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3 \Rightarrow a^2 = \frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)^4}{(\sqrt{(25x-9)(x-6)})^3} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \quad \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$\frac{(x+3)^8}{(25x-9)^3(x-6)^3} = \frac{25x-9}{(x-6)^3} \quad (x-6)^3 \neq 0 \Rightarrow \text{мы можем сократить}$$

$$\Rightarrow (x+3)^8 = (25x-9)^4 \Rightarrow (x+3)^2 = |25x-9| \quad \text{если } x \geq \frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 19x + 18 = (x-18)(x-1) = 0$$

$\Rightarrow x=1$ или $x=18$ оба значения подходят под ОДЗ.

или $x < \frac{25}{9}$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x$$

$$\Rightarrow x^2 + 31x = 0$$

$x=0$ или $x=-31$ $x=-31$ не подходит под ОДЗ

\Rightarrow Возможные значения $x=0; x=1; x=18$

Ответ: $x=0; x=1; x=18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow p \cos 3x + 3(p+4)\cos x = 4p \cos^3 x + 12\cos x$$

$$6\cos 2x + 10 = 12\cos^2 x + 4$$

$$\Rightarrow 4p \cos^3 x - 12\cos^2 x + 12\cos x - 4 = 0 \quad \text{пусть } t = \cos x \text{ где } -1 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow 4p t^3 - 12t^2 + 12t - 4 = 0 \quad \text{на 4 можно сократить}$$

$$p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \quad \text{Заметим что } t \neq 0 \text{ т.к. тогда } p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \quad \text{Посмотрим какие значения будет принимать } p \text{ если } -1 \leq t \leq 1$$

~~Заметим что~~

Заметим что $3t^2 - 3t + 1$ парабола с ветвями вверх у которой нет корней т.к. $D = 9 - 12 = -3 < 0$. \Rightarrow Значение $3t^2 - 3t + 1 > 0$ при любом t . Вершина этой параболы будет в точке $t = 0,5$. Если $t < 0$ то если $t \downarrow$ то $3t^2 - 3t + 1 \uparrow$ а $t^3 \downarrow$

$$\Rightarrow \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \quad \Rightarrow \text{минимальное значение } p \text{ будет } -\infty \text{ т.к. если } t \text{ очень близко стремится к } 0, \text{ то } \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \text{ стремится к } -\infty$$

а максимальное отриц. значение p будет при $t = -1$ $p = -7$

$$\Rightarrow \text{при } -1 \leq t < 0 \quad p \in (-\infty; -7] \quad (\uparrow \text{ возрастает, } \downarrow \text{ убывает})$$

$$\text{Если } t > 0$$

$$\text{при } 0 < t \leq 0,5 \quad 3t^2 - 3t + 1 \downarrow \quad t^3 \uparrow \quad \Rightarrow \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \downarrow$$

$$\text{а при } 0,5 < t \leq 1 \quad 3t^2 - 3t + 1 \uparrow \quad t^3 \uparrow \quad \text{но } 3t^2 - 3t + 1 \text{ будет расти медленнее чем } t^3 \Rightarrow \frac{3t^2 - 3t + 1}{t^3} \downarrow$$

\Rightarrow максимальное значение p $+\infty$ при $t \rightarrow 0$ а миним. полог.

$$p \text{ будет при } t = 1 \quad p = 1$$

$$\Rightarrow \text{при } -1 \leq t \leq 1 \quad t \neq 0 \quad p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Это и будут значения p при которых есть хотя бы одно решение

Решая уравнение $p t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ мы получили значение p в $\cos x = t \Rightarrow x = \arccos t + 2\pi k$. При чем $-1 \leq t \leq 1$ что будет t подходящее под ограничения будет только 1, т.к.

мы доказали что при $t < 0$ $p < 0$ и функция строго возрастает,

а при $p > 0$ $t > 0$ и функция строго убывает \Rightarrow двух подходящих значений t не может быть

$$\text{Ответ: } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

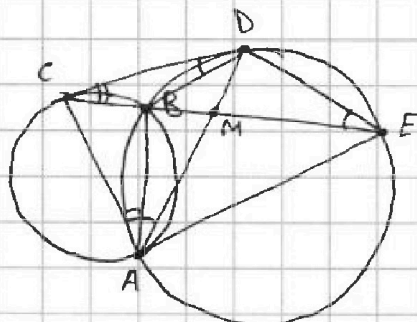


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
/ ИЗ /

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



НЧ.

Пл.к. ABDE - вписанн. $\Rightarrow \angle BAD = \angle BED = \alpha$

CD - касат.

$\Rightarrow \angle CDB = \angle BAD = \alpha \quad \angle CAB = \angle DCB = \beta$

$\Rightarrow \angle CAM = \alpha + \beta$

$\angle DBE$ - вписанн. в $\triangle CBD \Rightarrow \angle DBE = \angle BCD + \angle BDC = \alpha + \beta$

ABDE - вписанн. $\Rightarrow \angle DBE = \angle DAE = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \angle DAE = \angle CAM \Rightarrow AM$ - бисс. в $\triangle CAE$

$$\Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$\angle DEB = \angle BDC$ и $\angle BCD$ - общий

$\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle CDE$ по двум углам $\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$

По теореме синусов для $\triangle CDE$

$$\frac{BM}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin \angle ABM}$$

По т. син. $\triangle ABM$

По т. син. $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$\sin \angle ABM = \sin \angle ABC$ т.к. $\angle ABM + \angle ABC = 180$

$$\Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{AC}{AE} = 0,4 \Rightarrow AC = 0,4AE$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = 2,5 \left(\frac{BC}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right)$$

ABDE - впис. $\Rightarrow \triangle AME \sim \triangle BMD$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{BM}{BD}$$

$$\Rightarrow 2,5 \left(\frac{BC}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = 2,5 \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow 2,5 \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \left(\frac{BD}{BC} \right)^2 = 2,5 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \sqrt{2,5} = \frac{ED}{CD}$$

Ответ: $\sqrt{2,5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS.

В одной четверти кол-во клеток равно $50 \cdot 200 = 10000$

$$\Rightarrow N_4 = C_{10000}^2$$

Заметим что каждый такой способ или посылка по одному разу в каждой кол-во N_1, N_2, N_3 . Т.е. всего 3 раза

\Rightarrow Общее кол-во раскрасок будет равно $N_1 + N_2 + N_3 - 2N_4 =$

$$= 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

если $c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 2 \pmod 3$ $b-c \equiv 1 \pmod 3$ $(a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3$ не подходит
если $c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 1 \pmod 3$ $b-c \equiv 0 \pmod 3$ $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит

\Rightarrow либо $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$ $c \equiv 0 \pmod 3$ либо $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$ $c \equiv 2 \pmod 3$

1) $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$ $c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p=3$
 $p^2=9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c)=9$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3$ единственной случай
когда так может быть если $a-c=-9$ $b-c=-1$

$\Rightarrow b-a=8$ $b=a+8$

$\Rightarrow a^2+a+8=710$ $a^2+a-702=(a+27)(a-26)=0$ $a \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow a=-27$ $b=-19$ $c=-18$

2) $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$ $c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p=3$
 $p^2=9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c)=9$ $a-c \equiv 1 \pmod 3$ $b-c \equiv 0 \pmod 3$ единственной случай
когда так может быть если $a-c=1$ $b-c=9$

$\Rightarrow b-a=8$ $b=a+8$

$\Rightarrow a^2+a+8=710$ $a^2+a-702=(a+27)(a-26)=0$ $a \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a=-27$

$b=-19$ $c=-28$

Или нашли все возможные тройки

Ответ: $(26; 34; 25)$; $(26; 34; 35)$; $(-27; -19; -18)$; $(-27; -19; -28)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



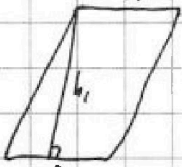
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

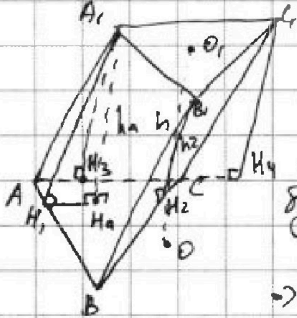
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7.

Боковые стороны будут параллелограмми - площадь параллелограмма будет $h_1 \cdot a$. \Rightarrow Выс. в двух параллелограммах будет равно $3/a$, а в другом $2/a$



Пусть с.о.о. в паралл. ABB_1A_1 и ACC_1A_1 равно $3/a$, а в паралл. BCC_1B_1 высота равна $2/a$. Пусть h_a высота из точки A_1 на осн. ABC , аналогично определяются h_b и h_c . $h_a = h_b = h_c$



Заметим что т.к. $A_1H_1 \perp AB$, то по теореме 3-х перпенд. проекция A_1H_1 на плоскость ABC будет перпендикулярна $AB \Rightarrow H_1H_1 \perp AB$ и $H_1H_1 \perp A_1H_1$ т.к. $A_1H_1 \perp$ плоскости ABC

$\Rightarrow h_a^2 = A_1H_1^2 - H_1H_1^2$ Аналогично получим что

$$h_a^2 = H_3A_1^2 - H_3H_3^2 \quad A_1H_1 = A_1H_3 \Rightarrow H_3H_3 = H_1H_1 = \sqrt{9 - h_a^2}$$

\Rightarrow Пусть H_a лежит на бисс. $\angle BAC \Rightarrow \angle H_aAC = \angle H_aAB = 30$

$$\Rightarrow AH_a = 2H_aH_3 \quad AH_a \perp A_1H_a \Rightarrow AA_1^2 = BB_1^2 = CC_1^2 = 4H_aH_3^2 + h_a^2 = 9 + 3H_aH_3^2$$

Пусть h высота из центра $\triangle ABC$ на основание ABC ($h \perp O_1O_1$)

Тогда $h_a = h_b = h_c = h$ \Leftarrow Тогда $A_1H_a O_1$ - прямоугол. $\Rightarrow A_1O_1 \parallel H_aO$

и $A_1O_1 = H_aO$ $AH_a \parallel A_1O_1 \Rightarrow$ точки A_1, H_a, O лежат на одной прямой

Найдем сторону a .



$$S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow h_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow h_2 = \sqrt{3}$$

Площадь всей поверхности будет равен $h \cdot S_{ABC} = h$

Заметим что $H_aH_3 = H_cH_4$ и $H_aH_3 \parallel H_cH_4$ $H_cH_4 \perp H_3H_4$

$$\Rightarrow H_aH_3H_4H_c \text{ - прямоугол. } \Rightarrow H_aH_c = H_3H_4 = A_1C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



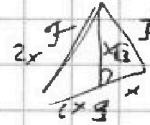
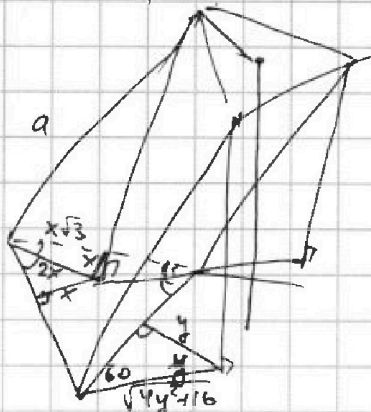
На одной странице можно оформить только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

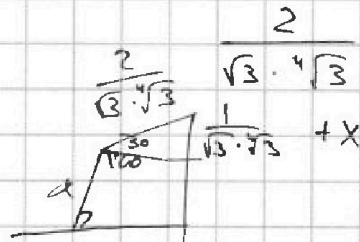
$$\frac{9}{4}$$



$$x^2 \sqrt{3} = 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$$



$$a^2 - 4x^2 = h_a^2 = 9 - x^2 = 5 - y^2$$

$$x^2 = y^2 + 4$$

$$a^2 = 9 + 3x^2 = 4 + 3y^2$$

$$x^2 = 4x^2 + 4$$

$$x^2 = y^2$$

$$y^2 = a^2 - h_a^2 = 4x^2 = 4y^2 + 16$$

$$3y^2 + 16 + 4 = 20 + 3y^2 = 9 + 3x^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} + 2a = x+3 \quad x+3 + 6a = \sqrt{25x-9}$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot a^2 = x+3 \quad (x+3)a^6 = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$a = \sqrt{\frac{x+3}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}} \quad \frac{(x+3)^3}{(25x-9)(x-6)} \cdot \frac{(x+3)}{\sqrt{(25x-9)(x-6)}} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$(x+3) \quad (25x-9)(x-6) \geq 0 \quad \begin{matrix} + & - & - & + \\ \hline & 25/9 & & 6 \end{matrix}$$

$$\frac{(x+3)^3}{(25x-9)^3 \cdot (x-6)^3} = \frac{25x-9}{(x-6)^3} \quad (x+3)^3 = (25x-9)^4$$

$$(x+3)^2 = 25x-9$$

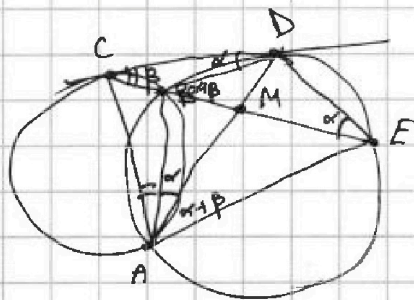
$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0 \quad (x-18)(x-1) = 0$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x=0 \quad x=-31$$

$$\frac{ED}{CD} = ? \quad \frac{CM}{EM} = \frac{2}{5}$$



$$\frac{ED}{CD} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{CB}{AC} \cdot \frac{AM}{BM} = \frac{BD}{CB}$$

$$\frac{AM}{\sin(\alpha)} = \frac{BM}{\sin(\beta)} \quad \frac{AC}{\sin(\alpha)} = \frac{CB}{\sin(\beta)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{CB \cdot \sin(\beta)}{AC} \quad \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{AM \cdot AC}{\sin(\beta) \cdot BM}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{CB \cdot AM}{AC \cdot BM}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB} \quad \frac{CB}{AC} \cdot \frac{EM}{DM} = \frac{BD}{CB} = \frac{1}{2.5}$$

$$\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{CB}{DM} \cdot \frac{EM}{DM} = 2.5 \cdot \frac{CB}{DM} \cdot \frac{BD}{DM}$$

$$2.5 \cdot \frac{CB}{BD} = \frac{BD}{CB} \quad 2.5 CB^2 = BD^2 \quad BD = CB \sqrt{2.5}$$

$$2.5 \left(\frac{CB}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = \frac{BM}{BD} = \frac{2.5 CB}{BD} = \frac{BD}{CB}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = b$$

$$b - a \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a^2 + b = 710$$

$$a^2 \equiv 0 \quad a^2 \equiv 1$$

$$a^2 \equiv 1 \quad b \equiv 1 \quad \times$$

$$a^2 \equiv 0 \quad a \equiv 3 \quad b \equiv 2$$

$$c \equiv 1 \quad a - c \equiv 2 \quad b - c \equiv 1$$

$$c \equiv 2 \quad a - c \equiv 1 \quad b - c \equiv 0$$

$$c \equiv 0 \quad a - c \equiv 0 \quad b - c \equiv 2$$

$$ab - c(a + b) + c^2 = p^2$$

$$ab - c(a + b) = (p - c)(p + c) \quad c : 3$$

$$(a - c)(b - c) = 9$$

$$9 \cdot 78 \quad 27 \cdot 26$$

$$a - c = -9 \quad b - c = -1$$

$$b - a = 8 \quad b = a + 8$$

$$a - c = 1 \quad b - a = 8$$

$$a, 5y = 1$$

$$y = 2$$

$$x = 3$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$(a + 27)(a - 26)$$

$$a = -27 \quad b = -19 \quad c = -18$$

$$a = 26 \quad b = 34 \quad c = 35$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-42} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+2} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-2^2} \end{cases}$$

$$-9 \leq 2 \leq 9$$

$$x \geq -5$$

$$1-x-42 \geq 0$$

$$y-4x-x^2+2 \geq 0$$

$$1-x \leq 6$$

$$y \geq 5$$

$$y+4 + 4y-20 = \sqrt{81-2^2}$$

$$5y-16 = \sqrt{81-2^2}$$

$$256 - 81 = 175$$

$$28 - 42 - 2\sqrt{x+5}\sqrt{1-x-42} + 8\sqrt{x+5} - 8\sqrt{1-x-42} = 4y - 16x - 4x^2 + 42$$

$$4x^2 - 16x \quad h = 2 \quad y \quad h = 16 + 8 + 8 = 32$$

$$3y^2 + 4y + 16 = 0$$

$$9 - x^2 = 4 - y^2 \quad y^2 = x^2 - 5$$

$$y^2 = 1 + 0,25y^2 - y - 5$$

$$C_{100,200}^2 + C_{100,200}^3 + C_{100,200}^2 - C_{100,400}^1$$

$$-\frac{1}{1,5} = -\frac{2}{3}$$

$$x + \frac{1}{2}y = 1$$

$$x = 1 - 0,5y$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 4$$

$$0,25y^2 + y + 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА / ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

Квадрат целого числа даёт либо остаток 0, либо остаток 1 при делении на 3

\Rightarrow либо $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ либо $a^2 \equiv 0 \pmod 3$. Если $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ тогда $b \equiv 1 \pmod 3$ (н.к. $710 \equiv 2 \pmod 3$ и $a^2 + b = 710$). П.к. $a^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$ либо $a \equiv 1 \pmod 3$ либо $a \equiv 2 \pmod 3$ если $a \equiv 1 \pmod 3$ тогда $b - a \equiv 0 \pmod 3$, а такого быть не может $\Rightarrow a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$
если $a^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$ ~~$b \equiv 1 \pmod 3$~~ $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow b - a \not\equiv 0 \pmod 3$ подходит.

\Rightarrow либо $a \equiv 2 \pmod 3$ и $b \equiv 1 \pmod 3$ либо $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 2 \pmod 3$

$(a-c)(b-c) = p^2$ * ~~\Rightarrow~~ \Rightarrow либо $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ либо $(a-c)(b-c) \equiv 1 \pmod 3$

Если $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$. Посмотрим какой остаток при делении на 3 может давать число c . если $c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a-c \equiv 2 \pmod 3$ $b-c \equiv 1 \pmod 3$ тогда $(a-c)(b-c) \equiv 2 \pmod 3$ но такого быть не может
если $c \equiv 1 \pmod 3$ $a-c \equiv 1 \pmod 3$ $b-c \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит
если $c \equiv 2 \pmod 3$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит
 \Rightarrow либо $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$ $c \equiv 1 \pmod 3$ либо $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$ $c \equiv 2 \pmod 3$

1) $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$ $c \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3$ а н.к. p - простое число $\Rightarrow p = 3$ $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9$ $a-c \equiv 1 \pmod 3$ $b-c \equiv 0 \pmod 3$ единственной парой когда так может быть если $a-c = 1$ $b-c = 9$ (н.к. числа целые)

$\Rightarrow b - a = 8 \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 710$

$\Rightarrow a^2 + a - 702 = (a + 27)(a - 26) = 0$ $a \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a = 26$ $b = 34$ $c = 25$

2) $a \equiv 2 \pmod 3$ $b \equiv 1 \pmod 3$ $c \equiv 2 \pmod 3$ $(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p = 3$ $p^2 = 9$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 9$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3$ единственной парой когда так может быть если $a-c = -9$ $b-c = -1 \Rightarrow b - a = 8$ $b = a + 8$

$a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a - 702 = (a + 27)(a - 26) = 0$ $a \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow a = 26$

$b = 34$ $c = 35$

Если $a \equiv 0 \pmod 3$ $b \equiv 2 \pmod 3$. Посмотрим какой остаток при делении на 3 будет давать число c , если $c \equiv 0 \pmod 3$ $a-c \equiv 0 \pmod 3$ $b-c \equiv 2 \pmod 3$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 3$ подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

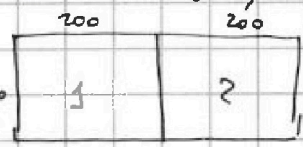
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

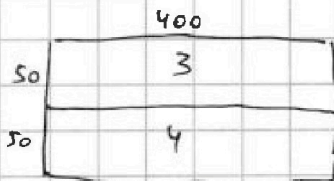
NS.

Найдем кол-во раскрасок симметричных относительно центра.
Заметим что по одной точке однозначно

определяется вторая симметричная ей. и если первая клетка в 1 половине квадрата, то вторая будет лежать во 2 и наоборот. \Rightarrow Кол-во раскрасок симметричных относительно центра будет равно кол-ву способов выбрать 4 клетки в 1 половине. в ней кол-во клеток равно $100 \times 200 = 20000$ кол-во способов $N_1 = C_{20000}^4$



Аналогично кол-во раскрасок симметр. отн. верт. средней линии равно кол-ву способов выбрать 4 клетки в 1 половине и.е. $N_2 = C_{20000}^4$

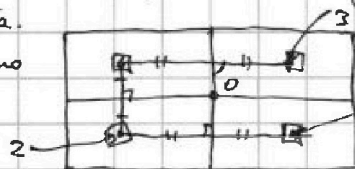


Кол-во раскрасок симметр. отн. гор. средней линии равно кол-ву способов выбрать 4 клетки из 3 половинок. в 3 половинке клеток $50 \cdot 400 = 20000$

$\Rightarrow N_3 = C_{20000}^4$

Заметим что если раскраска симметрична относительно любых 2-х способов, то она будет симметрична и относительно 3-его способа.

Докажем это



Пусть например раскраска симметрична относительно срединной и осей есть клетка 1.

Тогда по ней однозначно выстраиваются клетки 2, 3 и т.д. А по клетке 2 однозначно выстраивается клетка 4 и т.д. Заметим что в этом случае точки 1 2 3 4 образуют прямоугольник с ср. линией исходного прямоугольника. будут ср. линией в нем. Тогда точка 3 симм. 4 отн. ср. линии и точки 1 и 4, и 2 и 3 симм. относительно 0. \Rightarrow Эти 4 точки симм. отн. центра

Аналогично другие 4 точки будут симм. отн. центру. Для 2-х других вариантов. доказываем аналогично, что тогда будет симм. отн. центру. Тогда кол-во раскрасок симм. относительно 3-х, будет равно кол-ву способов выбрать 2 клетки в одной четверти прямоугольника.