



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  - это геометрическая прогрессия  
 $q$ -тая часть этой геометрической прогрессии.

Из условия геометрической прогрессии  $a_1, a_2, \dots \neq 0$

По условию задачи:

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} ; a_{12} = 2-x ; a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

~~По св-ву геометрической прогр.~~

$$1) \begin{cases} (25x+34)(3x+2) > 0 \\ \frac{25x+34}{(3x+2)^3} > 0 \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty)$$

$$\text{Но } a_{12} = a_{10} \cdot q^2 > 0, \text{ тк. } q^2 > 0, a_{10} > 0$$

$$\Rightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Значит } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2)$$

2) По св-ву геометрической прогрессии:

$$a_{14} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{18}} = \sqrt{\frac{(25x+34)^2}{(3x+2)^2}} = \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}}$$

$$a_{12} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{14}} = \sqrt{\frac{(25x+34)(3x+2) \cdot (25x+34)}{3x+2}} = \sqrt{(25x+34)^2}$$

$$2-x = \sqrt{(25x+34)^2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2-x)^4 = (25x+34)^2$$

$$(x^2-4x+4)^2 - (25x+34)^2 = 0$$

$$(x^2-29x-30)(x^2+21x+38) = 0$$

$$(x-30)(x+1)(x+2)(x+19) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \{-19; -2; -1; 30\}$$

$$3) \begin{cases} x \in \{-19; -2; -1; 30\} \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2) \end{cases} \Rightarrow x \in \{-19; -2\}$$

Ответ:  $x \in \{-19; -2\}$

$$4) x = -19 \Rightarrow a_{12} = 2+19 = 31, a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-19) + 34)(3 \cdot (-19) + 2)} = \\ = \sqrt{(34 - 475) \cdot (2 - 57)} = \sqrt{441 \cdot 55} = 21\sqrt{55} \neq a_{12} - \text{не подходит}$$

$$5) x = -2 \Rightarrow a_{12} = 2+2 = 4, a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-2) + 34)(3 \cdot (-2) + 2)} = \\ = \sqrt{16 \cdot 4} = 4 \cdot 2 = 8 \neq a_{12} - \text{не подходит}$$

Ответ:  $x \in \{-19; -2\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА  
3 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$p \cdot (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 6 \cdot (2 \cos^2 x - 1) + (3p+12) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \quad | :4$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1) = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

1)  $p \cos x = 0$  ;  $(p-1) \cdot 0^3 + (0+1)^3 = 1 \neq 0$   
 $\Rightarrow$  не решение при любом  $p$ .

2)  $\cos x \neq 0$  :

$$p-1 = -\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right)^3 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \Leftrightarrow p = 1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

~~2)  $\cos x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$~~   $\cos x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$$

$$\Rightarrow -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$$

$$1 - \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

Значит  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty) :$$

$$p - 1 = -\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3$$

$$\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)^3 = 1 - p$$

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1 - p}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt[3]{1 - p} - 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1}$$

$$\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{1 - p} - 1} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Для } \forall p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



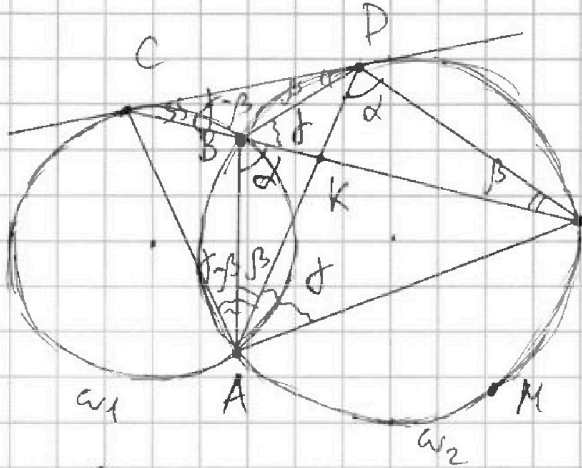
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.



1) Пусть  $\angle ADE = \alpha$ ,

тогда  $\angle ABE = \angle ADE = \alpha$

E как вписанное, опирающееся на дугу  $\cup AME$ .

~~как вписанное~~ ~~опирающееся на дугу~~

$\angle BAD = \beta$ . Значит

$\angle BED = \beta = \angle BAD = \frac{\cup BD}{2}$

(как вписанное, опирающееся на дугу  $\cup BD$ ),  $\angle BDC = \beta = \frac{\cup BD}{2}$   
(как угол между касательной и хордой)

Пусть также  $\angle DBE = \gamma$ . Аналогично

$\angle DAE = \angle DRE = \gamma$  (как вписанное, опирающееся на  $\cup DE$ )

2)  $\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle BDC = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - \beta = \gamma - \beta$   
(из  $\triangle CBD$ )

Но DC - касательная к  $\omega_1 \Rightarrow \angle CDB = 2\angle DCB = 2(\gamma - \beta)$

$\Rightarrow \angle CAB = \frac{\angle CDB}{2} = \gamma - \beta$  как вписанный

$CE \cap AD = K$

$\angle CAK = \angle CAB + \angle BAK = \gamma - \beta + \beta = \gamma = \angle KAE$

$\Rightarrow AK$  - биссектриса  $\angle CAE$  в  $\triangle CAE$

$\Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{AC}{AE} = \frac{7}{20}$  по св-ву биссектрисы

3)  $\angle ACB = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (\gamma - \beta) = \alpha - \gamma + \beta$  (из  $\triangle ABC$ )

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \alpha - \gamma + \beta + \gamma - \beta = \alpha$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle ADE = \alpha \\ \angle CAD = \angle DAE = \beta \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ADE \quad (\text{по 2 углам})$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \quad \rightarrow AE \cdot AC = AD^2$$

$$\begin{cases} \frac{AE}{AC} = \frac{20}{7} \\ AE \cdot AC = AD^2 \end{cases} \Rightarrow AE^2 = \frac{20}{7} AD^2 \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{20}{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \sqrt{\frac{20}{7}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ED}{CD} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
10 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

1)  $(a-c)(b-c) = p^2$ ,  $p$  - простое

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p+c \\ b = p+c \end{cases} \begin{array}{l} \text{не подходит, т.к. отсюда} \\ \text{следует, что } a=b, \\ \text{но } a < b. \end{array}$$

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2+c \\ b = 1+c \end{cases} \begin{array}{l} \text{не подходит, т.к.} \\ \text{отсюда следует, что} \\ b < a, \text{ т.к. } p^2 > 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+c \\ b = p^2+c \end{cases} \begin{array}{l} \text{т.к. } p \text{ - простое} \end{array}$$

2)  ~~$a = p^2 + c$~~   ~~$b = 1 + c$~~   ~~$a = 1 + c$~~   ~~$b = p^2 + c$~~

$$b-a = p^2 + c - c - 1 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \div 3$$

~~$p \equiv 1 \pmod 3$~~   ~~$p \equiv 2 \pmod 3$~~   $\Rightarrow p-1 \div 3$  и  $p+1 \div 3$

~~$p \equiv 0 \pmod 3$~~

~~$p-1 \equiv a-1 \pmod 3$  и  $p+1 \equiv a+1 \pmod 3$~~

~~$2p \equiv p+1$~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} p \not\equiv 1 \pmod 3 \\ p \not\equiv 2 \pmod 3 \end{cases} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod 3$

т.к. ~~у нас~~ ~~все~~ ~~на~~ ~~модуле~~ ~~3~~ ~~три~~ ~~остатка~~ ~~и~~

$\Rightarrow p \div 3$  ~~или~~  $p$  - простое, значит  $p=3$

$\Rightarrow a = 1+c, b = p^2+c = 3^2+c = 9+c$

3)  $a^2 + b = 1000$

~~$(1+c)^2 + 9+c = 1000$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
11 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 1000$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0 \quad D = 9 + 4 \cdot 990 = 9 \cdot (440 + 1) =$$

$$= 9 \cdot 441 = 3^2 \cdot 21^2 = (63)^2$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{-3 + 63}{2} = 30, \quad c_2 = \frac{-3 - 63}{2} = -33$$

Значит  $a_1 = 1 + c_1 = 30 + 1 = 31, \quad b_1 = 9 + c_1 = 9 + 30 = 39$

$$a_2 = 1 + c_2 = 1 - 33 = -32, \quad b_2 = 9 + c_2 = 9 - 33 = -24$$

Ответ:  $(31, 39; 30), (-32, -24; -33)$





1  2  3  4  5  6  7

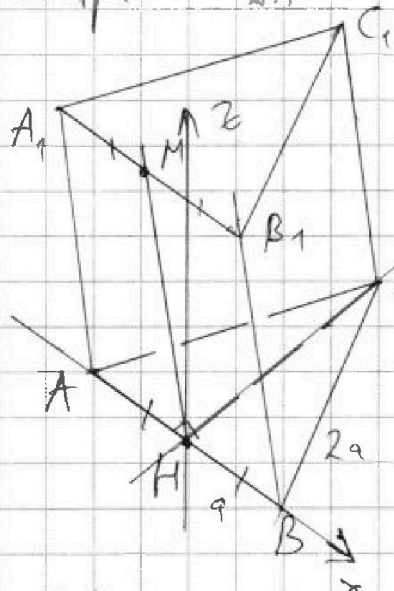
СТРАНИЦА  
7 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7.

1) Пусть основанием ~~параллелепипеда~~ <sup>призмы</sup>  $ABC A_1 B_1 C_1$  является  $\triangle ABC$ . По условию  $\triangle ABC$  - равносторонний.

Пусть  $H$  - середина  $AB \Rightarrow CH$  - высота, медиана, биссектриса  $\triangle ABC$  (т.к.  $\triangle ABC$  - равносторонний).



Аналогично  $C_1 M$  - высота  $\triangle A_1 B_1 C_1$ ,  
 $M$  - середина  $A_1 B_1$

Пусть  $AH = HB = a \Rightarrow AC = BC =$   
 $= A_1 B_1 = A_1 C_1 = B_1 C_1 = 2a$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4 \Rightarrow 2a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow CH = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

2) Введём прямоугольную декартову систему координат в базе с центром в точке  $H(0; 0; 0)$

$$A(-a; 0; 0), B(a; 0; 0), M(x, y, z), A_1(x-a, y, z)$$

$$B_1(x+a, y, z), C(0; a\sqrt{3}; 0), C_1(x, y+a\sqrt{3}; z)$$

$$\vec{AB} \{2a; 0; 0\} \quad \vec{AA}_1 \{x, y, z\}; \vec{BB}_1 \{x, y, z\}$$

$$\vec{AC} \{a; a\sqrt{3}; 0\} \quad \vec{BC} \{-a; a\sqrt{3}; 0\}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AA}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 2az\vec{j} + 2ay\vec{k}$$

$$\Rightarrow S_{AA_1B_1B} = |\vec{n}_1| = \sqrt{4a^2z^2 + 4a^2y^2} = 5 \text{ - параллелограмма}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
8 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow z^2 + y^2 = \frac{25}{4a^2} = \frac{25}{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{25\sqrt{3}}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} - z^2$$

$$3) \vec{n}_2 = \vec{AA}_1 \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot a z \sqrt{3} + \vec{j} \cdot a z + \vec{k} \cdot a(x\sqrt{3} - y)$$

$$S_{AA_1C_1C} = |\vec{n}_2| = \sqrt{a^2 z^2 \cdot 3 + a^2 z^2 + a^2 \cdot (3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2)} = 6 - \text{параллелограмм}$$

$$\Rightarrow 4z^2 + 3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2 = \frac{36}{a^2} = \frac{36}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 9\sqrt{3}$$

~~$$3) \vec{n}_2 = \vec{BB}_1 \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot (a z \sqrt{3}) + \vec{j} \cdot a z + \vec{k} \cdot (a x \sqrt{3} + a y)$$~~

$$4) \vec{n}_3 = \vec{BB}_1 \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} \cdot (a z \sqrt{3}) + \vec{j} \cdot a z + \vec{k} \cdot (a x \sqrt{3} + a y)$$

$$S_{BB_1C_1C} = |\vec{n}_3| = a \sqrt{3z^2 + z^2 + 3x^2 + 2xy\sqrt{3} + y^2} = 6 - \text{параллелограмм}$$

$$\Rightarrow 4z^2 + 3x^2 + 2xy\sqrt{3} + y^2 = \frac{36}{a^2} = 9\sqrt{3}$$

$$5) \begin{cases} 4z^2 + 3x^2 + 2xy\sqrt{3} + y^2 = 9\sqrt{3} \\ 4z^2 + 3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2 = 9\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z^2 + 3x^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \\ 2xy\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z^2 + 3x^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \\ x=0 \\ 4z^2 + 3x^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4z^2 + y^2 = 9\sqrt{3} \quad (a) \\ y=0 \\ 4z^2 + 3x^2 = 9\sqrt{3} \quad (b) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
9 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 \text{д) } y=0 &\Rightarrow z^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} - y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{16} \Rightarrow 3x^2 = 9\sqrt{3} - 4z^2 = \\
 &= 9\sqrt{3} - \frac{100\sqrt{3}}{16} = \frac{44\sqrt{3}}{16} = \frac{22\sqrt{3}}{8} = \frac{11\sqrt{3}}{4} > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot h = S_{\Delta ABC} \cdot z = \sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{16}} \cdot 4 = \frac{25\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } x=0 &\Rightarrow 4z^2 + y^2 = 4z^2 + \frac{25\sqrt{3}}{16} - z^2 = 3z^2 + \frac{25\sqrt{3}}{16} \\
 &= 9\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{108\sqrt{3} - 25\sqrt{3}}{16 \cdot 3} = \frac{119\sqrt{3}}{48}$$

$$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot h = 4 \cdot z = 4 \cdot \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3 \cdot 16}} = \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} V_{ABCA_1B_1C_1} = \sqrt{\frac{119\sqrt{3}}{3}} \\ V_{ABCA_1B_1C_1} = 5\sqrt{3} \end{cases}$$



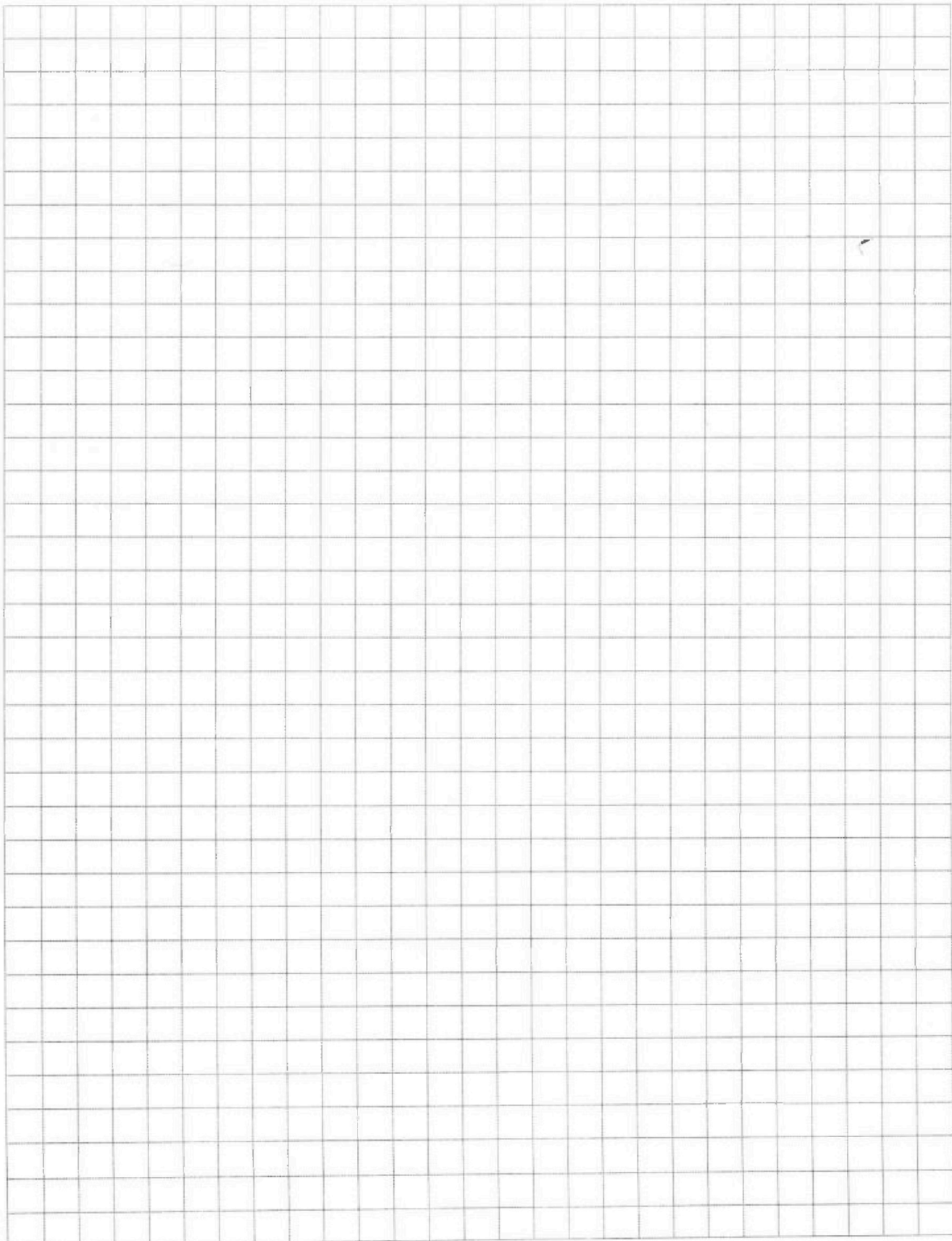


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\vec{AC} \left\{ x; \frac{4}{x}; 0 \right\} \quad \vec{AA_1} \left\{ m; y; z \right\}$$

$$\vec{AC} \times \vec{AA_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & \frac{4}{x} & 0 \\ m & y & z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \frac{4z}{x} - \vec{j} \cdot xz + \vec{k} \cdot \left( xy - \frac{4m}{x} \right)$$

$$\left\{ \frac{4z}{x}; -xz; xy - \frac{4m}{x} \right\}$$

$$\frac{4z^2}{x^2} + x^2 z^2 + x^2 y^2 - \frac{8my}{x} + \frac{16m^2}{x^2} = 36$$

$$\frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}$$

$$16(z^2 + m^2) = \left( 29 \frac{4}{5} + 8my \right) x^2$$

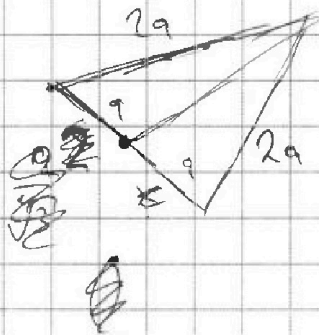
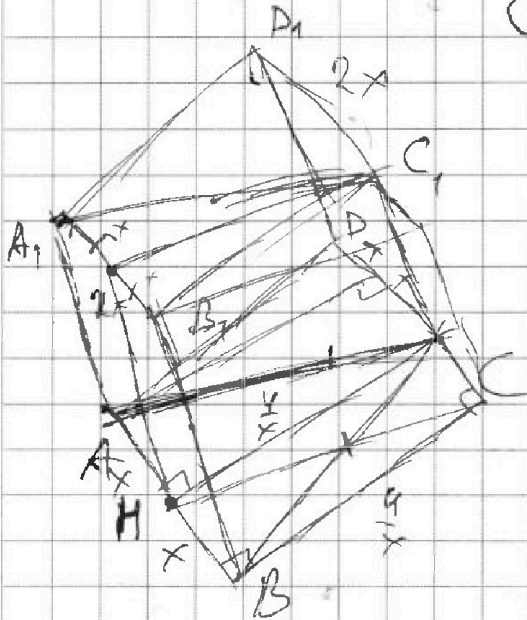
$$z^2 = \frac{29 \frac{4}{5} + 8my}{16} x^2 - m^2 \quad \frac{16(z^2 + m^2)}{x^2} + \frac{25}{4} - 8my = 36 \quad | \cdot 4x^2$$

$$64(z^2 + m^2) + 25x^2 - 32myx^2 = 144x^2$$

$$64(z^2 + m^2) = 32myx^2 + 119x^2$$

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4$$

$$a = \sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



$$a - c = p$$

$$b - c = p$$

$$\begin{array}{r} 1300 \quad 4 \\ -16 \quad 475 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 200 \end{array}$$

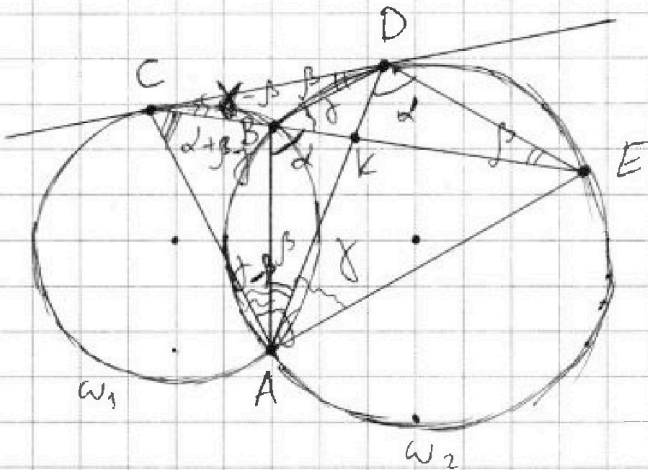


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - \alpha - \beta - \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = \alpha$$

$$\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$

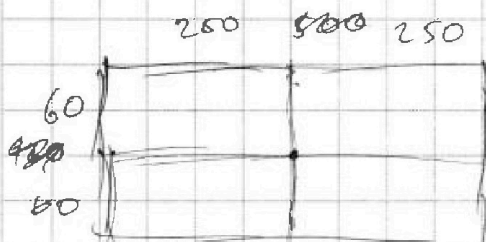
$$\frac{5}{\frac{16}{9}} = \frac{45}{16}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{20}{7}$$

$$AE \cdot AC = AD^2$$

$$AE^2 = \frac{20}{7} AD^2$$

$$AC^2 = \frac{7}{20} AD^2$$



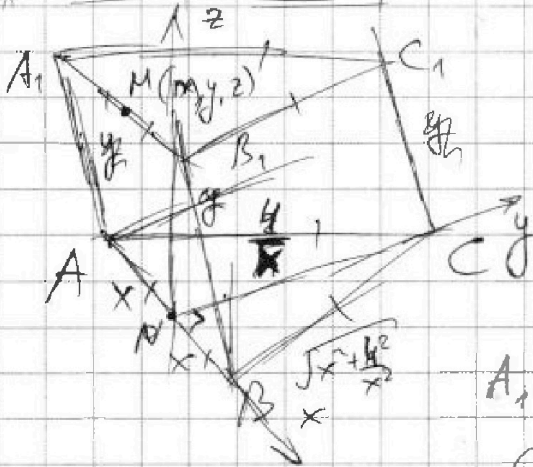
$$\frac{1}{2} x h = 4 \Rightarrow 2h = 8$$

$$h = \frac{4}{x}$$

$$4 \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} (z^2 + y^2) = 25$$

$$\Rightarrow z^2 + y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{64}$$

$$y^2 = \frac{25\sqrt{3}}{64} - z^2$$



$$A(0-x; 0; 0); M(0; 0; 0)$$

$$B(x; 4/x; 0), C(0; 4/x; 0)$$

$$A_1(m-x; y; z), B_1(m+x; y; z)$$

$$C_1(m, y + \frac{4}{x}; z)$$

$$\vec{AA_1} \{m; y; z\}$$

$$\vec{AB} \{2x; 0; 0\}$$

$$\vec{AA_1} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & y & z \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + \vec{j} \cdot 2x \cdot z - 2xy \cdot \vec{k} = \{0; 2xz; -2xy\}$$

$$\sqrt{4x^2z^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{4x^2(z^2 + y^2)} = 5$$

$$4x^2(z^2 + y^2) = 25$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y+2) + 2(y-18) = \sqrt{400-z^2} \quad 104 = 64$$

$$y^2 + 4y + 4 + 4y^2 - 144y + 1296 + 2|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$

$$5y^2 - 140y + 1300 + 4|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$

$$\begin{array}{r} 204 \overline{) 6} \\ -18 \\ \hline -24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \times 34 \\ \hline 34 \\ +136 \\ \hline 170 \\ +156 \\ \hline 326 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in (-\infty; -2] \cup [18; +\infty) \\ 5y^2 - 140y + 1300 + 4y^2 - 64y + 144 = 400 - z^2 \end{array} \right.$$

$$9y^2 - 204y + 1444 = 400 - z^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \in [-2; 18] \\ 5y^2 - 140y + 1300 - 4y^2 + 64y + 144 = 400 - z^2 \end{array} \right.$$

$$y^2 - 76y + 1444 = 400 - z^2$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -140 \\ \hline 64 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\Rightarrow y \in (-\infty; -2] \cup [18; +\infty)$$

$$(3y^2 - 204y + 1156) + z^2 = 20^2$$

$$(x+6)(3-x-2z) = 3x - x^2 - 2xz + 18 - 6x - 12z =$$

$$= -3x - x^2 - 2xz - 12z + 18$$

$$(3y - 34)^2 + z^2 = 20^2$$

$$(40 - z)^2 = 1600 - 160z + z^2 =$$

$$= 1440 + z^2 = 1444$$

$$\left(\frac{y - \frac{34}{3}}{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{z^2}{1} = 20^2$$

$$\left(\frac{y - \frac{34}{3}}{60}\right)^2 + \frac{z^2}{20^2} = 1 \quad \text{— эллипс}$$

$$(y^2 - 76y + 1444) + z^2 = 20^2$$

$$(y - 34)^2 + z^2 = 20^2 \quad \text{— окружность}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{12} = 2-x$$

$$a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{10} : a_{18} = \frac{\sqrt{(25x+34)^2}}{\sqrt{(3x+2)^2}} = \frac{25x+34}{3x+2} = a_{14}^2$$



$$\begin{cases} (25x+34)(3x+2) > 0 \\ \frac{25x+34}{3x+2} > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; +\infty) \\ x \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \cup (-\frac{2}{3}; 2]$$

$$a_{12}^2 = a_{10} \cdot a_{14}$$

$$2-x = \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \sqrt{\frac{25x+34}{3x+2}}$$

$$\begin{array}{r} 25x+34 \\ \times 3x+2 \\ \hline 75x^2 + 78x + 68 \\ \phantom{75x^2} + 50x + 68 \\ \hline 75x^2 + 128x + 1296 \end{array}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + z = 2\sqrt{y-3x-x^2+2} & (2) \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} & (1) \end{cases}$$

$$(1): |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2} \quad z \in [-20; 20]$$

$$\begin{cases} y \in (-\infty; -2] \\ -y+2 - 2y+36 = \sqrt{400-z^2} \\ y \in [-2; 18] \\ y+2 - 2y+36 = \sqrt{400-z^2} \\ y \in [18; +\infty) \\ y+2 + 2y+36 = \sqrt{400-z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in (-\infty; -2] \\ 34-3y = \sqrt{400-z^2} \end{cases}$$

$$y^2 + 4y + 4 + 4y^2 - 144y + 1296 + 4|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$

$$5y^2 - 140y + 1300 + 4|(y-18)(y+2)| = 400 - z^2$$



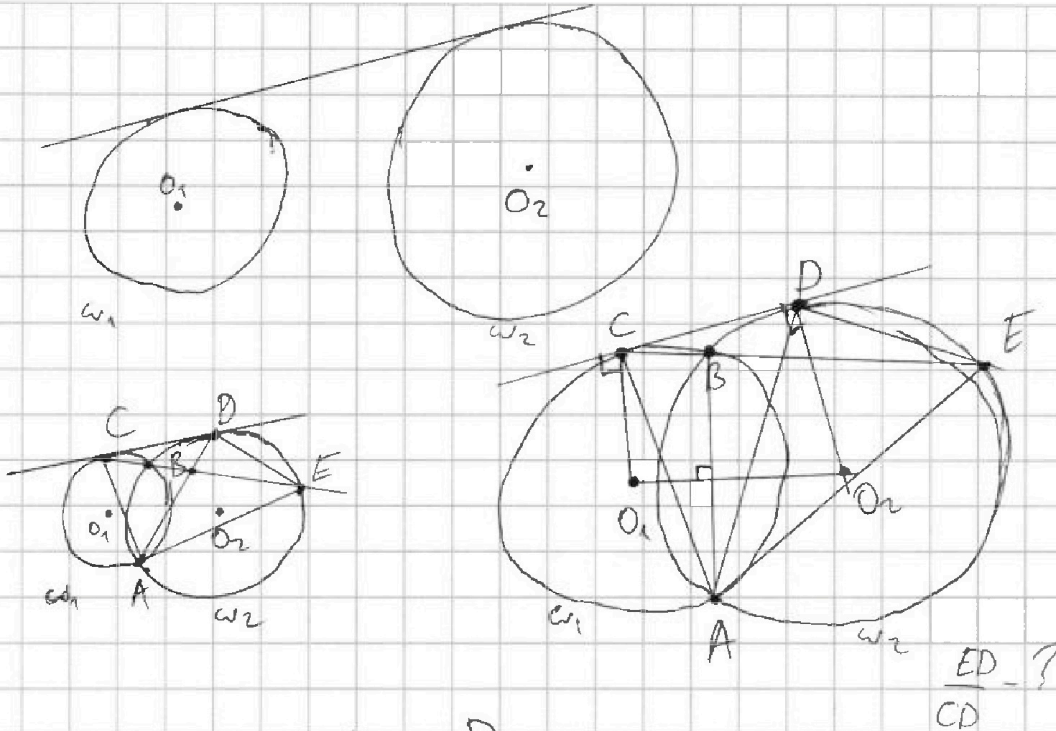


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1     2     3     4     5     6     7

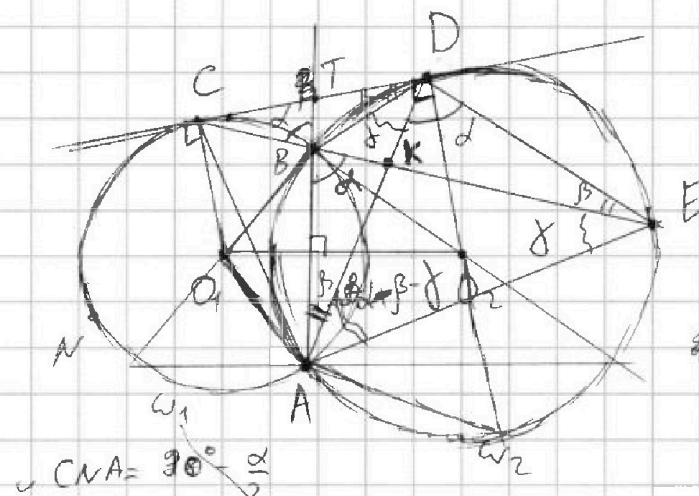
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{7}{20}$$



$$180^\circ - \gamma - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta - \gamma$$

$$x + \beta + \alpha + \beta - \gamma = 90^\circ$$

$$x + 3\beta = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - 3\beta$$

$$\angle CNA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle CO_1A = 270^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle DBE = \alpha + \beta - \gamma$$

$$\angle TBD = 180^\circ - (\alpha) - (\alpha + \beta - \gamma) = 180^\circ - 2\alpha - \beta + \gamma$$

$$\angle BTD = 2\alpha + \beta - \gamma - \beta = 2\alpha - \gamma$$

$$\angle DCE = 180^\circ - \alpha - 2\beta - \gamma$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~5000000~~

$$x+6 + 3\sqrt{x-2z} + 2\sqrt{3x-x^2-2xz-12z+18} = 4y - 12x - 4x^2 + 4z$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ 3-x-2z \geq 0 \\ 2z \leq 3-x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ z \leq 3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 \geq -x \\ z \leq 4,5 \end{cases}$$

$$y - 3x - x^2 + z \geq 0$$

$$y \geq x^2 + 3x - z \geq$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \quad \geq 1 \text{ решение}$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \sin 3x &= (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - \\ &- 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - (6p + 3(p+4) \cos x + 10) = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + (3p - 6p - 12) \cos x + 10 - 6p = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + (3p - 6p - 12) \cos x + 10 - 6p = 0 \quad | :4$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + (3p - 6p - 12) \cos x + 10 - 6p = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$1) \cos x = 0: (p-1) \cdot 0 + (0+1)^3 = 1 \neq 0 \quad \text{no solution } \forall p$$

$$2) \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow p-1 = - \left( \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right)^3 \Leftrightarrow p = 1 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3$$

$$1^3 - \left( 1 + \frac{1}{\cos x} \right)^3 = \left( -\frac{1}{\cos x} \right) \cdot \left( 1 + 2 + \frac{1}{\cos x} + 1 + \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos x \in [-1, 0) \cup (0, 1] &\Rightarrow \frac{1}{\cos x} \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos x} &\in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \end{aligned}$$