



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- ☒ [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}$, тринадцатый член равен $5 - x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x - 35)(x + 1)}$.

- ☒ [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ③ [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

- ⑤ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколько способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ☒ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть b_1 - первый член данной прогрессии, q - знаменатель прогрессии, \Rightarrow из условия $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, $b_{13} =$

$$= b_1 \cdot q^{12} = 5-x; b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)^7}.$$

Заметим, что $b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \geq 0$, т.к. $q^6 \geq 0$, $\Rightarrow b_1 \geq 0$

Также $b_1, q \neq 0$, т.к.: при $b_1 = 0$, $b_7 = b_{13} = b_{15} = 0$

$$\text{т.е. } \begin{cases} 5-x=0 \\ 13x-35=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{35}{13} \end{cases} \quad x \in \emptyset, \text{ а иначе при } q=0$$

$b_7 = b_{13} = b_{15} = 0$, это невозможно. $\Rightarrow b_1 > 0$. $\Rightarrow b_{13} = 5-x > 0$

Заметим, что $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{x+1}} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{13x-35}$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} \Rightarrow b_1 \cdot q^6 = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \cdot b_1 \cdot q^{12}, \Rightarrow q^8 = (x+1)^2.$$

$$\Rightarrow q^4 = |x+1|, \Rightarrow b_{13} q^{12} = (|x+1|)^3, \Rightarrow b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5-x,$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{5-x}{(|x+1|)^3}. \text{ Заметим, что } b_{15} \cdot b_7 = b_1^2 \cdot q^{20}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(5-x)^2}{(|x+1|)^6} \cdot (|x+1|)^5 = \frac{|13x-35|}{|x+1|}, \quad \text{т.к. } x \neq -1, (\text{б.член не может быть отрицательным})$$

$$\text{т.о. } (5-x)^2 = |13x-35|, \quad \text{При } x \geq \frac{35}{13}. \quad x^2 - 10x + 25 = 13x - 35,$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0, \Rightarrow \text{Реш. Внешт. } x_{1,2} = 20; 3, x=20 - \text{ не подходит, т.к. } x < 5.$$

Подходит, т.к. $x < 5$. \Rightarrow единственный подподчинный: $x = 3$

(Продолжение на след. странице.)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№2. } \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z^2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2) Пусть $f(y) = |y+1| + 3|y-12|$, рассмотрим, какие значения данной функции может принимать, для этого раскроем модули: I. $y \leq -1$:

$$-y-1 - 3y+36 = 35-4y, \Rightarrow \text{при } y \leq -1$$

$$f(y) = 35-4y \geq 39. \quad \text{II. } y \in (-1; 12):$$

$$f(y) = y+1 - 3y+36 = 37-2y, \Rightarrow \text{при } y \in (-1; 12),$$

$$f(y) \in (f(12); f(-1)), \quad f(12) = 37-2-12 = 13; \quad f(-1) = 39,$$

$$\Rightarrow f(y) \in (13; 39). \quad \text{III. } y \geq 12:$$

$$f(y) = y+1 + 3y-36 = 4y-35. \quad \text{при } y \geq 12 \quad f(y) \geq 13.$$

\Rightarrow Исходя из того, что можно считать, что $f(y) \geq 13$.

Рассмотрим выражение $\sqrt{169-z^2}$, т.к. $z^2 \geq 0$, то

$$\text{так } 169-z^2 \leq 169, \text{ т.е. } \sqrt{169-z^2} \leq 13, \text{ т.к. } f(y) = \sqrt{169-z^2}, \text{ а } f(y) \geq 13, \sqrt{169-z^2} \geq 13, \text{ то } f(y) = \sqrt{169-z^2} = 13,$$

$\Rightarrow y=12; z=0$, подставив данные значения

в выражение (1): Продолжение на след. страничке!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} (\text{Продолжение}) (1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = \sqrt{12+x-x^2+5}, \cdot 2$$
$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3} \cdot \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \Rightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$\text{Пусть } t = \cos x \geq 0 \Rightarrow (4t^3 - 3t) + 3(2t^2 - 1) + 6t = p,$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p = f(t), \text{ рассмотрим } f(t) \text{ и ее}$$

$$\text{пределы: } f'(t) = 3 \cdot 4 \cdot t^2 + 6 \cdot 2 \cdot t + 3 = 12(t+1)^2 \geq 0,$$

\Rightarrow функция может быть возрас~~та~~тает, только в точке

$$t = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = 0, \Rightarrow \text{эта точка } f(t) \text{ является точкой минимума}$$

функции. \Rightarrow если $t \in [-1; 1]$, то $f(t) \in [f(-1); f(1)]$.

$$(и \text{возрастает}) \quad f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \Rightarrow \text{если } p \in [-4; 10] \text{ то нормально}$$

если, иначе $p \notin (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$ $|t| > 1, \Rightarrow \text{т.к.}$

$$\cos x = t, \text{ то } x \in \emptyset. \text{ Однако: } p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Пусть A - количество клеток, симметричных относительно центра, B и C - «средние линии», \Rightarrow по формуле вида $\text{линия}/\text{направления} (AB, BC, CA) = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C)$, где $A \cap B$ - симметрия клеток относительно центра и одной «средней линии» (относительно)

Найдем значение каждого из выражений:

$A = C_{25000}^4$ - т.к. всего есть клеток в квадрате: $250 \cdot 200 = 50000$, замечу, что каждой клетке есть ровно одна симметрия относительно центра клетки, всего пар будет $\frac{50000}{2} = 25000$, т.к. всего имеем заменяем $\frac{50000}{2}$ на C_{25000}^4 , это эквивалентно выбору 4 пар, способов выбрать 4 пары из 25000: C_{25000}^4 .

Аналогичное рассуждение можно провести относительно линий B и C , т.к. конкретной тоже будет соединять ровно одна точка \Rightarrow пар будет столько же:

$$\frac{250 \cdot 200}{2} = 25000 \Rightarrow B = C = C_{25000}^4$$

Найдем $A \cap B$: Нашеднее будем рассматривать на примере одной клетки на рисунке: Продолжение на след. стран.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5. (Продолжение). Пусть В - "средняя линия" делиющая большую сторону, \Rightarrow рисунок:

$(x_0; h_0)$ \rightarrow координаты точки В в I-й четверти (может так сделать наложив координатную плоскость III)

Так как ситуация будет симметрична относительно оси шейда,
 \Rightarrow данной точке будет соответствовать 1 точка во II-й четверти, т.к. мы рассматриваем множество $(A \setminus B)$, то
точка во второй четверти будет $\in (A \setminus B)$ в качестве симметрии.
Также в III-й четверти будет лежать точка, симметричная относительно оси шейда - её координаты будут $(-x_0; -h_0)$, она же будет \in зеркальном множестве $(A \setminus B)$.

Но т.к. эта присадка есть, то точка, симметричная ей
относительно оси шейда ординал тоже присадка
(средней линии В)

множеству координаты ч-й точки в IV-й четверти:

$(-(x_0); -h_0)$ \rightarrow $(x_0; -h_0)$, заметим, что данная
точка симметрична относительно оси абсцисс:
точки $(x_0; h_0)$ - начальная; $(-x_0; h_0)$ - II-я четверть;
 $(-x_0; -h_0)$ - относительная чешма; и $(x_0; -h_0)$ - 6 IV-й четверти
I симметрия IV-й и II-я - III-я, т.к. точка данная
четвертей имеет равную абсолютную и противоположные ординаты), \Rightarrow если эта точка $\in (A \setminus B)$, то она присадка
и $\in (A \setminus B \setminus C)$, ~~ABA~~ но BAC $\Rightarrow (A \setminus B) = (A \setminus B \setminus C)$.

Аналогичные рассуждения с $(A \setminus C)$ - получится пересечение
картины $\Rightarrow (A \setminus C) = (A \setminus B \setminus C)$, Продолжение на след. стр.



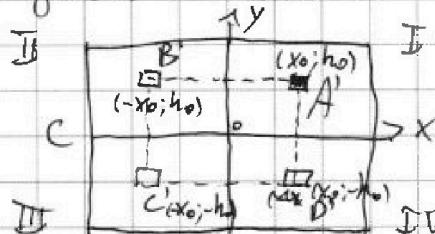
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5. (Продолжение) Рассмотрим точки $\in (BAC)$, все примеры другой формы I-й четверти с координатами $(x_0; h_0)$:



Точка B' симметрия точки A'
 $B' \in (BAC)$, ~~координаты~~
(относительно прямой средней линии) B'
 \Rightarrow координаты $B'(-x_0; h_0)$

Б) Ребя D' симметрия A' относительно
линии C , \Rightarrow её координаты $(x_0; -h_0)$. $\Rightarrow D' \in (BAC)$

Замету, что точка D' должна быть точкой симметрии
какой-то точки, только относительно прямой B , т.к.

$D' \in (BAC)$. Пусть это будет точка C' с координатами
 $(-x_0; -h_0)$

\Rightarrow четвертое заметит, что C' симметрия B' относительно
линии C , также четвертое заметит, что A' и C' ; B' и D'

попарно симметрии относительно четвертого, \Rightarrow данные
точки также принадлежат прямой A , $\Rightarrow (BAC) = (A1B1C)$

$\Rightarrow A1B = B1C = A1C = A1B1C$, Из предыдущего рисунка четвертое
запомнил. что каждой точке в одной четверти будет

всегдаовать три точки в каждой из других четвертей

\Rightarrow таких четвертей у нас будут четверти - по четыре
в каждой четверти, \Rightarrow если у нас 8 четвертей захвачиваются,
то будет по 2 четверти в каждой четверти в одной четверти
будут соотвествует слово "четверти", то такие четверти
будут: $G_{12500}^2 = A1B = B1C = A1C = A1B1C$, \Rightarrow Далее: $A1B1C =$

$$= 3C_2^4 - 2C_2^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. Из условия: 1) p простое число

$$\begin{cases} a > b \quad (1) \\ a - b \not\equiv 0 \pmod{3} \quad (2) \\ (a - c)(b - c) = p^2 \quad (3) \\ a + b^2 = 560 \quad (4) \end{cases}$$

Т.к. a, b, c - кратные, $\Rightarrow a - c, b - c$ - четные,
 \Rightarrow т.к. $(a - c)(b - c) = p^2 \cdot 1 = p \cdot p = (-p^2) \cdot (-1) = (-p) \cdot (-p)$.

\Rightarrow Т.к. $a > b$, то $a - c > b - c$, такие
 т.к. $a \neq b$, то $a - c \neq b - c \neq 0$, \Rightarrow
 разное члене $p \cdot p$ или $(-p) \cdot (-p)$
 невозможно.

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = p^2 \quad (I) \\ b - c = 1 \end{cases}$$

Второе выражение в системе (I):
 $(a - c) - (b - c) = p^2 - 1, \quad a - b = p^2 - 1$

$$\begin{cases} a - c = -1 \quad (II) \\ b - c = -p^2 \end{cases}$$

Второе выражение в системе (II):
 $(a - c) - (b - c) = -1 + p^2,$
 $a - b = p^2 - 1, \Rightarrow b$ общий множитель

 $a - b = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$

Т.к. из (2) $a - b \not\equiv 0 \pmod{3}$, \Rightarrow т.к. $(p - 1)(p + 1) \not\equiv 0 \pmod{3}$

Замечу, что при $p \neq 3$ такое возможно, т.к. если $p \neq 3$,
 то $p \nmid 3$ (т.к. число простое), \Rightarrow если $p \nmid 3$, то это
 имеет остаток 1 или 2 при делении на 3, $\Rightarrow p - 1$ или

$p + 1$ однозначно будет кратно трём (при $p \equiv 2 \pmod{3}$)

$(p + 1) \nmid 3$, при $p \equiv 1 \pmod{3} - (p - 1) \nmid 3$, \Rightarrow единственное подходит

$$p = 3. \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + c \quad (I) \\ b = 1 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = c - 1 \quad (II) \\ b = c - 3 \end{cases}$$

Продолжение
на след. странице.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (Продолжение). Поставим полученные значения из системы (I) в выражение (4):

$$(9+c) + (c+1)^2 = 560, \quad c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 560,$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0, \quad \text{По теореме Виета: } \begin{cases} c_1 = 22 \Rightarrow a_1 = 31; b_1 = 23 \\ c_2 = -25 \Rightarrow a_2 = -16; b_2 = -24 \end{cases}$$

Поставим значения из системы (II) в выражение (4):

$$(c-1) + (c-9)^2 = 560, \quad c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 560,$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0 \quad \begin{cases} c_3 = 32 \Rightarrow a_3 = 31; b_3 = 23 \\ c_4 = 15 \Rightarrow a_4 = -16; b_4 = -24 \end{cases}$$

по т. Виета 7

=> Ответ: (31; 23; 22); (-16; -24; -25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$a - b + 5 = 2ab \Rightarrow a = \frac{5-b}{2b-1}$$

$$x+3 = \frac{25 - 4+x - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{4-x}}{4(4-x) - 4\sqrt{4-x} + 1} = \frac{21+x-10\sqrt{4-x}}{16x-16}$$

$$x^2 (2x-1)^2 = 22^2 + x + 3 + 44\sqrt{x+3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p=3 \Rightarrow \begin{cases} a-c=p^2 \\ 6-c=1 \end{cases} \quad (1) \quad (1) \quad a=g+c \\ \begin{cases} a-c=2p-1 \\ 6-c=-p^2 \end{cases} \quad \Rightarrow g+c+c^2+2c+1=560 \\ x+3=4-x \quad c^2+3c-550=0$$

$$(2) a=c-1$$

$$b=c-g$$

$$\begin{matrix} 45 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 \\ 10 \cdot 55 \end{matrix}$$

$$5 \cdot 11 \cdot 10 \quad 22; 25$$

$$(c-22)(c+25)=0$$

$$\Rightarrow c-1 + c^2 - 18c + 81 = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0 \quad 46^2 + 66^2$$

$$16 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 32; 15$$

$$(c-32)(c+15)=0 \quad \begin{cases} c=32 \Rightarrow a=31; b=23 \\ c=-15 \Rightarrow a=-16; b=24 \end{cases}$$

Ответ: (31; 23; 22); (-16; -24; -25).

$$a-b+5=2ab \leq 7$$

IV

$$\therefore a=\frac{b-5}{17b} = \frac{5}{17b}-1$$

$$a^2+b^2-6ab+25=2ab \quad a^2+b^2=2ab$$

$$\sqrt{x+3}^2 + 5 = \sqrt{4-x} \cdot \frac{12+x-x^2}{12\sqrt{x+3}+15} \quad 12+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=12\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$$

$$x+3+5+10\sqrt{x+3}=(4-x)(4x+13+4\sqrt{x+3}+2)$$

$$x+8+10\sqrt{x+3}=16x+48+16\sqrt{x+3}-2$$

$$4x^2+13x=15x+44+2\sqrt{4x+3}$$

$$4x^2+2x-2x^2-x=22+\sqrt{x+3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. б) - первый ; 9- знатокоматч

$$q^6 b_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} ; q^{12} b_1 = 5-x ; q^{14} b_1 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$(x=-1) \quad q^6 b_1 = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{(13x-35)(x+1)} = q^{14} b_1 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow q^8 = (x+1)^2 \quad q = |x+1|, \Rightarrow b_1 = \frac{5-x}{(x+1)^3}$$

$$q^{20} \cdot b_1^2 = \frac{5}{(x+1)} \cdot \frac{(5-x)^2}{(x+1)^3} = (13x-35) \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

~~$$(13x-35) \cdot x^2 = (13x-35)$$~~

$$\frac{5-x^2}{|x+1|} = \frac{13x-35}{|x+1|}, \quad x \neq -1, \Rightarrow (5-x)^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$\sqrt{1} x+3 - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-z} - x^2 z,$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x+3 \geq 0 \quad \boxed{x \geq -3} \quad \begin{cases} -3 \leq x \\ z \leq 4-x \end{cases} +$$

$$\text{Но } x \neq 20 \text{ и } 983$$

$$(q^{14} b_1) > 0$$

$$\boxed{z \leq 7} \quad \begin{cases} y+x-x^2+z \geq 0 \\ z \geq z \end{cases} +$$

$$y+x-x^2 \geq -7 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \geq x-x^2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad \boxed{y \geq -7 \frac{1}{4}}$$

~~$$12227$$~~

$$-- -1 + -12 + +$$

$$-x-1-3y+36 \quad | \quad y+1-3y+35 \quad | \quad y+1+3y-1036$$

$$-4y + 35$$

$$37-2y \quad 4y-35$$

$$\text{При } y \in \left[\frac{29}{4}; -17 \right]$$

$$f(y) \in [33; 64] \quad f(y) \in (13; +\infty)$$

$$\Rightarrow T \cdot \sqrt{1+3y-2} \leq 73, \text{ при } f(y) \geq 73$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

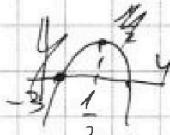
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

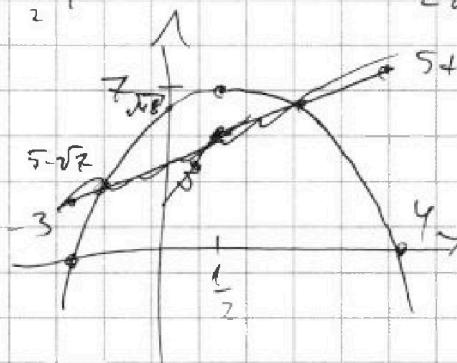
$$x+3 + 4-x+5 + 2\sqrt{x+3} \cancel{= 12} - 2\sqrt{4-x} - 2\sqrt{4-x}(x+3) =$$

$$= 4(x+3)(4-x), \Rightarrow 12+10a \geq 16 - 2ab = 4a^2b^2,$$

$$x \in [-4; 3] \cup [-3; 4]$$



$$2\sqrt{12} = \sqrt{48}$$



$$x = -3, 5 - \sqrt{7}$$

2 нормальный способ.

$$x = 4, 5 +$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= \sqrt{4-x} - 3,5 \\ \Rightarrow \sqrt{t-0,5} &= \sqrt{0,5-t} + 5 - 2\sqrt{t-0,5} \end{aligned}$$

$$x - 3,5 = t, \Rightarrow t = 4,5 \quad x = t + 3,5 = 8,0, 0,5$$

$$\sqrt{t+3,5} - \sqrt{3,5-t} + 5 = 2\sqrt{(t-0,5)(t+3,5)} = 2\sqrt{4,5-t^2}$$

$$x+3 + 4 - x + 10\sqrt{x+3} - 10\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+3)(x-4)} = 4(x+3)(4-x)$$

$$8\sqrt{x+3} - 12\sqrt{4-x} + 27 = 4(x+3)(4-x)$$

$$\begin{cases} 8a - 12b + 27 = 4a^2b^2 \\ a - b + 5 = 2ab \\ -4b - 13 = 4a^2b^2 - 16ab \end{cases}$$

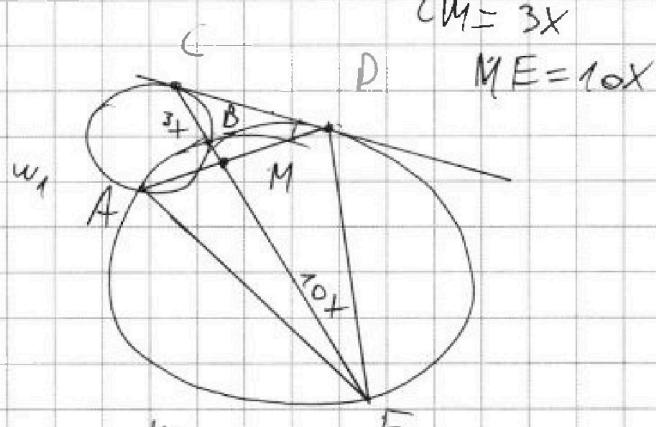
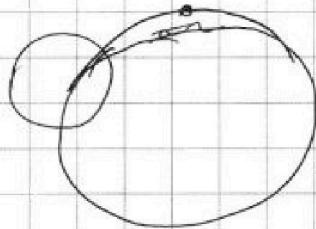
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается чиривиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5. Решение в уме

$$(A \vee B \vee C) = A + B + C - (A \wedge B) - (B \wedge C) - (A \wedge C) + (A \wedge B \wedge C)$$

$A = B = C = C_{2500}^4$ A - член B, C - сред. члены.

$A \wedge B \wedge C$ = одинаковые в четверти № предложений
данных состоящих из трех групп $A \wedge B \wedge C = C_{12500}^2$

$$A \wedge B : \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline & \times \\ \hline \times & \end{array}} \quad C_{12500}^2 = A \wedge B = B \wedge C$$

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline & \times \\ \hline \times & \end{array}} \quad 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 0$$

$$A \wedge B = A \wedge B \wedge C = B \wedge C = A \wedge C$$

$$\text{Ответ: } 3C_{2500}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 ?$$

$$\text{№3} \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x ; \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow 4t^3 + 6t^2 + 6t - 3 + 3t - 3 = p = f(t) \quad f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 6 = 0 \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0 \quad (2t + 1)^2 = 0$$

$t = -\frac{1}{2}$
единственное

$$p \in [-4; 10]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+3} + 5 = \sqrt{4-x^2} (2\sqrt{2x+3} + 1) \\ x+8 + 10\sqrt{2x+3} = (4-x)(4x+12+4\sqrt{2x+3}) = \\ = 16x+52 + 16\sqrt{2x+3} - (4x^2 + 13x + 4\sqrt{2x+3} \cdot x)$$

$$11x^2 + 13x + 4\sqrt{2x+3} \cdot x = 15x + 44 + 6\sqrt{2x+3}$$

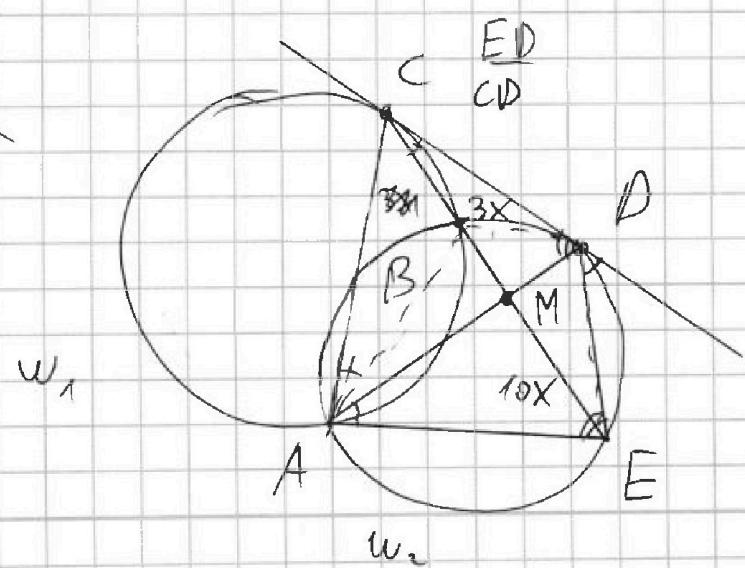
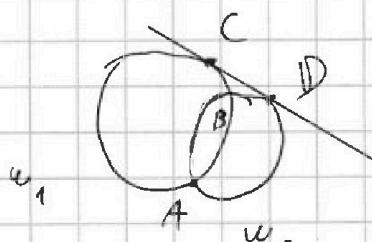
$$a - b + 5 = 2ab$$

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x^2} + 5 \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cancel{1} - \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} - \cancel{(-1)} \cdot (-1) \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) = 0$$

$$\sqrt{2x+3} = -\sqrt{4-x^2} \\ \Rightarrow 4-x^2 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2$$

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x^2} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(2x+3)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. (Продолжение) При $x < \frac{35}{13} \in \left(-\infty; \frac{35}{13}\right)$:

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x, \quad x^2 + 3x - 10 = 0. \quad \text{По т. Виета}$$

$x_1,2 = 2; -5$. Замену, что $x > 0$ забыл = 2.

$$b_{15} = \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}, \quad \text{т.о } (13x - 35)(x + 1) \geq 0 \\ \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{35}{13}; +\infty)$$

$\Rightarrow x = 2$ - не подходит, \Rightarrow единств. подходит $x = -5$

Ответ: $x = -5; 3$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0} \quad x^2-x-12= \\ = (x-4)(x+3)$$

$$x \geq 3; \quad x \leq 4$$

$$\cancel{\sqrt{2+x-x^2} \neq \sqrt{12+x-x^2}} = \cancel{\frac{19}{4}}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)} = 2\sqrt{\frac{16-x^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{16-16}{2}} = 2\sqrt{0} = 0$$

$$a-b+5=2ab$$

$$\cancel{2ab}$$

$$\text{№3. } \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x +$$

$$+ 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$\text{Пусть } t = \cos x$$

$$\Rightarrow 4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = p, \quad t = \cos x$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$3t^3 + 3t^2 + t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = p - 2$$

$$3t^2(t+1) + (t+1)^3 = p-2, \quad (t+1)(t^2+2t+1+3t^2) = p-2$$

$$(t+1)(4t^2+2t+1) = p-2$$

$$\text{№4. } x > b$$

$$a-b \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \Rightarrow \text{найдо } \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b-c = -p^2 \\ a-c = -1 \end{cases}$$

$$\text{Но } a-c \neq b-c, \text{ т.к. } a > b \quad \cancel{a-b = p^2-1} \quad b-a = -p^2+1$$

$$\text{так как } p \nmid 3k, \text{ то } p-1 \text{ или } p+1 \nmid 3$$

$$\Rightarrow p = 3$$