



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✕ [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

- ⊗ [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ③ [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

- ⑤ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты). ?

- ✕ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Пусть  $b_1$  - первый член данной прогрессии,  $q$  - знаменатель прогрессии,  $\Rightarrow$  из условия  $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ ,  $b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5-x$ ;  $b_{15} = b_1 \cdot q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

Заметим, что  $b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \geq 0$ , т.к.  $q^6 \geq 0$ ,  $\Rightarrow b_1 \geq 0$

Также  $b_1, q \neq 0$ , т.к.: при  $b_1 = 0$ ,  $b_7 = b_{13} = b_{15} = 0$

т.е. ~~решение~~  $\begin{cases} 5-x=0 \\ 13x-35=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{35}{13} \end{cases} x \in \emptyset$ , а также при  $q=0$

$b_7 = b_{13} = b_{15} = 0$ , что невозможно.  $\Rightarrow b_1 > 0$ .  $\Rightarrow b_{13} = 5-x > 0$   
 $x < 5$

Заметим, что  $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \frac{1}{x+1} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$= \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{(13x-35)(x+1)} \Rightarrow b_1 \cdot q^6 = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot b_1 \cdot q^{14} \Rightarrow q^8 = (x+1)^2$

$\Rightarrow q^4 = |x+1|$ ,  $\Rightarrow b_{13} \cdot q^{12} = (x+1)^3 \Rightarrow b_{13} = b_1 \cdot q^{12} = 5-x$ ,

$\Rightarrow b_1 = \frac{5-x}{(x+1)^3}$ . Заметим, что  $b_{15} \cdot b_7 = b_1^2 \cdot q^{20}$ ,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(5-x)^2}{(x+1)^6} \cdot (x+1)^5 = \frac{13x-35}{x+1}$ , т.к.  $x \neq -1$ , (в этом случае  $b_7$  не определен)

то  $(5-x)^2 = 13x-35$ , При  $x \geq \frac{35}{13}$ .  $x^2 - 20x + 25 = 13x - 35$ ,

$x^2 - 23x + 60 = 0$ ,  $\Rightarrow$  По т. Виета  $x_{1,2} = 20; 3$ ,  $x=20$  - не подходит, т.к.  $x < 5$ ,  $\Rightarrow$  существует, подходящий:  $x=3$

(Продолжение на след. стр.)



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \quad \begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

(2) Пусть  $f(y) = |y+1| + 3|y-12|$ , рассмотрим, какие значения данная функция может принимать, для этого раскроем модули: I.  $y \leq -1$ :

$$\text{I. } y \leq -1, \quad f(y) = -y-1-3y+36 = 35-4y, \Rightarrow \text{при } y \leq -1$$

$$f(y) = 35-4y \geq 39. \quad \text{II. } y \in (-1; 12):$$

$$f(y) = y+1-3y+36 = 37-2y, \Rightarrow \text{при } y \in (-1; 12),$$

$$f(y) \in (f(12); f(-1)), \quad f(12) = 37-2 \cdot 12 = 13; \quad f(-1) = 39.$$

$$\Rightarrow f(y) \in (13; 39). \quad \text{III. } y \geq 12:$$

$$f(y) = y+1+3y-36 = 4y-35. \quad \text{при } y \geq 12 \quad f(y) \geq 13.$$

$\Rightarrow$  Исходя из этого, можно сказать, что  $f(y) \geq 13$ .

Рассмотрим выражение  $\sqrt{169-z^2}$ , т.к.  $z^2 \geq 0$ , то

$$\text{т.к. } 169-z^2 \leq 169, \text{ т.е. } \sqrt{169-z^2} \leq 13, \text{ т.к. } f(y) = \sqrt{169-z^2} - z^2, \text{ а } f(y) \geq 13, \sqrt{169-z^2} \leq 13, \text{ то } f(y) = \sqrt{169-z^2} = 13.$$

$\Rightarrow y=12; z=0$ , подставим данные значения в выражение (1): Продолжить на след. стр.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2} \text{ (Продолжение) } (1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = \sqrt{12+x-x^2+0} : 2$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3}. \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$\text{Пусть } t = \cos x \geq 0. \Rightarrow (4t^3 - 3t) + 3(2t^2 - 1) + 6t = p,$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p. = f(t), \text{ рассмотрим } f(t) \text{ и ее}$$

$$\text{применяем: } f'(t) = 3 \cdot 4 \cdot t^2 + 6 \cdot 2 \cdot t + 3 = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0,$$

$\Rightarrow$  функция почти всегда возрастает, только в точке

$$t = -\frac{1}{2}, f(t) = 0, \Rightarrow \text{эта точка не в области определения}$$

функции  $\Rightarrow$  если  $t \in [-1; 1]$ , то  $f(t) \in [f(-1); f(1)]$ .

$$(\text{и возрастает}) f(-1) = \min \text{ или } 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10. \Rightarrow \text{если } p \in [-4; 10] \text{ то корни}$$

есть, при  $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$   $|t| > 1$ ,  $\Rightarrow$  т.к.

$$\cos x = t, \text{ то } x \in \emptyset. \text{ Ответ: } p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. Пусть  $A$  - множество клеток, симметричных относительно центра,  $B, C$  - "средние линии",  $\Rightarrow$  по формуле включения/исключения  $|A \cup B \cup C| = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$ , где  $A \cap B$  - симметрия клеток относительно центра и одной "средней" линии (аналогично).

Найдем значение каждого из слагаемых:

$A = C_{25000}^4$  - т.к. всего ~~клеток~~ точек в прямоугольнике:  $250 \cdot 200 = 50000$ , заметим, что каждой клетке есть ровно одна

симметричная первой относительно центра клетка,

всего пар будет  $\frac{50000}{2} = 25000$ , т.к. всего мы зафикси-

руем  $8$  точек, то это эквивалентно выбору  $4$  точек

пар, способов выбрать  $4$  пары из  $25000$ :  $C_{25000}^4$ .

Аналогичные рассуждения можно провести относительно

множеств  $B$  и  $C$ , т.к. конкретной той же бюджет соответствует ровно одна точка  $\Rightarrow$  пар будет только те:

$\frac{250 \cdot 200}{2} = 25000. \Rightarrow B = C = C_{25000}^4$ .

Найдем  $A \cap B$ : Нам далее будет рассматривать на примере одной клетки на рисунке: Продолжение на след. стр.

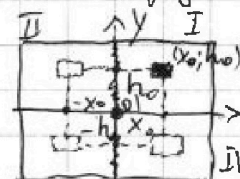


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. (Продолжение). Пусть  $B$  - "средняя линия" делящая большую сторону,  $\Rightarrow$  рисунок:  Выберем точку в I-й четверти (можете сделать без ограничений области, <sup>координатами  $(x_0; h_0)$</sup>

так как ситуация будет симметрична относительно центра,  $\Rightarrow$  данной точке будет соответствовать 1 точка во II-й <sup>или</sup> четверти, т.к. мы рассматривали множество  $(A \cap B)$ , то

клетка во второй четверти будет  $\in (A \cap B)$  в данном случае. Также в III-й четверти будет лежать точка, симметричная относительно <sup>версии</sup> центра - её координаты будут  $(-x_0; -h_0)$ , она тоже будет  $\in$  данному множеству  $(A \cap B)$ .

но т.к. она принадлежит, то точка, симметричная ей

относительно оси абсцисс <sup>(средней линии B)</sup> тоже принадлежит

множеству. координаты 4-й точки в IV-й четверти:

$(-(-x_0); -h_0) \Leftrightarrow (x_0; -h_0)$ , заметим, что данные

точки симметричны относительно оси абсцисс:

точки:  $(x_0; h_0)$  - начальная;  $(-x_0; h_0)$  - II-я четверть;

$(-x_0; -h_0)$  - относительно центра; и  $(x_0; -h_0)$  - в IV-й четверти.

I симметрична IV-й и II-я - III-й, т.к. точки в данных

четвертях имеют равную абсциссу и противоположные ор-

динаты,  $\Rightarrow$  если точка  $\in (A \cap B)$ , то она принадле-

жит и  $\in (A \cap B \cap C)$ , ~~АТБ~~ ~~ВАС~~ ~~АТС~~  $\Rightarrow (A \cap B) = (A \cap B \cap C)$ .

Аналогичные рассуждения с  $(A \cap C)$  - получим перевернутый

картинка.  $\Rightarrow (A \cap C) = (A \cap B \cap C)$ , Продолжение на след. стр.



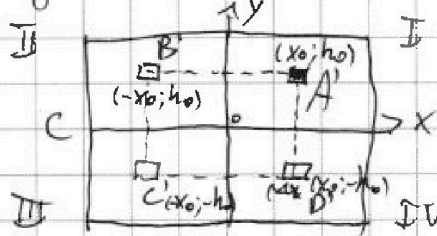
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5. (Продолжение) Рассмотрим точки,  $\in (BAC)$ , на примере одной точки  $A$  в  $I$ -й четверти с координатами  $(x_0; h_0)$ :



Точка  $B'$  симметрична точке  $A'$   
 $B' \in (BAC)$ , ~~и координаты  $B'$~~   
 (относительно пр. "средней линии";  $B$   
 $\Rightarrow$  координаты  $B'(-x_0; h_0)$

Пусть  $D'$  симметрична  $A'$  относительно  
 линии  $C$ ,  $\Rightarrow$  её координаты  $(x_0; -h_0)$ ,  $D' \in (BAC)$

Заметим, что точка  $D'$  должна быть тоже симметрична  
 какой-то точке, только относительно прямой  $B$ , т.к.

$D' \in (BAC)$ , Пусть это будет точка  $C'$  с координатами  
 $(-x_0; -h_0)$

$\Rightarrow$  нетрудно заметить, что  $C'$  симметрична  $B'$  относительно

линии  $C$ , также нетрудно заметить, что  $A'$  и  $C'$ ;  $B'$  и  $D'$

попарно симметричны относительно центра,  $\Rightarrow$  данные

точки также принадлежат множеству  $A$ ,  $\Rightarrow (BAC) = (A'B'C'D')$

$\Rightarrow A'B = B'C = A'C = A'B'C$ , Из предыдущего рисунка нетрудно

заметить, что каждой точке в одной четверти будет

соответствовать три точки в каждой из других четвертей

$\Rightarrow$  таких множеств у нас будут четверти - по шесте

в каждой четверти,  $\Rightarrow$  если у нас 8 клеток закрашивается,

то будет по 2 "четверти" или каждой шесте в одной четверти

будет соотв. соответств. своя "четверть", то таких четвертей

будет:  $C_{12500}^2 = A'B = B'C = A'C = A'B'C$ ,  $\Rightarrow$  Ответ:  $A \cup B \cup C =$   
 $= 3C_{12500}^4 - 2C_{12500}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. Из условий: (Пусть  $p$  - простое число)

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ a - b \not\equiv 0 \pmod{3} & (2) \\ (a-c)(b-c) = p^2 & (3) \\ a + b^2 = 560 & (4) \end{cases}$$

Т.к.  $a, b, c$  - нечетные,  $\Rightarrow a-c; b-c$  - четные,  
 $\Rightarrow$  т.к.  $(a-c) \cdot (b-c) = p^2 \cdot 1 = p \cdot p = (-p^2) \cdot (-1) = (-p) \cdot (-p)$ .

$\Rightarrow$  Т.к.  $a > b$ , то  $a-c > b-c$ , также  
 т.к.  $a \neq b$ , то  $a-c \neq b-c$ ,  $\Rightarrow$   
 разложение вида  $p \cdot p$  или  $(-p) \cdot (-p)$   
 невозможно.

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a-c = p^2 & (I) \\ b-c = 1 \end{cases} & \text{Вычитаем уравнения в системе (I):} \\ \begin{cases} a-c = -1 & (II) \\ b-c = -p^2 \end{cases} & \text{Вычитаем уравнения в системе (II):} \end{cases}$$

$$(a-c) - (b-c) = p^2 - 1, \quad a-b = p^2 - 1$$

$$(a-c) - (b-c) = -1 + p^2,$$

$$a-b = p^2 - 1, \Rightarrow \text{в обоих случаях}$$

$$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

Т.к. из (2)  $a-b \not\equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\Rightarrow$  т.к.  $(p-1)(p+1) \not\equiv 0 \pmod{3}$

Заметим, что при  $p \neq 3$  такое невозможно, т.к. если  $p \neq 3$ , то  $p \not\equiv 3$  (т.к. число простое),  $\Rightarrow$  если  $p \not\equiv 3$ , то оно имеет остаток 1 или 2 при делении на 3,  $\Rightarrow p-1$  или

$p+1$  одно из них будет кратно трем (при  $p \equiv 2 \pmod{3}$ )

$(p+1) \not\equiv 3$ , при  $p \equiv 1 \pmod{3}$   $-(p-1 \not\equiv 3)$ ,  $\Rightarrow$  единственное подходящее

целое  $p = 3$ .  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \begin{cases} a = 9 + c & (I) \\ b = 1 + c \end{cases} \\ \begin{cases} a = c - 1 & (II) \\ b = c - 9 \end{cases} \end{cases}$$

Продолжение на след. странице.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (Продолжение). Подставим полученные значения из системы (I) в выражение (4):

$$(9+c) + (c+1)^2 = 560, \quad c^2 + 2c + 1 + 9 + c = 560,$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0, \quad \text{По теор. Виета: } \begin{cases} c_1 = 22 \Rightarrow a_1 = 31; b_1 = 23 \\ c_2 = -25 \Rightarrow a_2 = -16; b_2 = -24 \end{cases}$$

Подставим значения из системы (II) в выражение (4):

$$(c-1) + (c-9)^2 = 560, \quad c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 560,$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0 \quad \begin{cases} c_3 = 32 \Rightarrow a_3 = 31; b_3 = 23 \\ c_4 = -15 \Rightarrow a_4 = -16; b_4 = -24 \end{cases}$$

по т. Виета 7

$\Rightarrow$  Ответ:  $(31; 23; 22); (-16; -24; -25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$

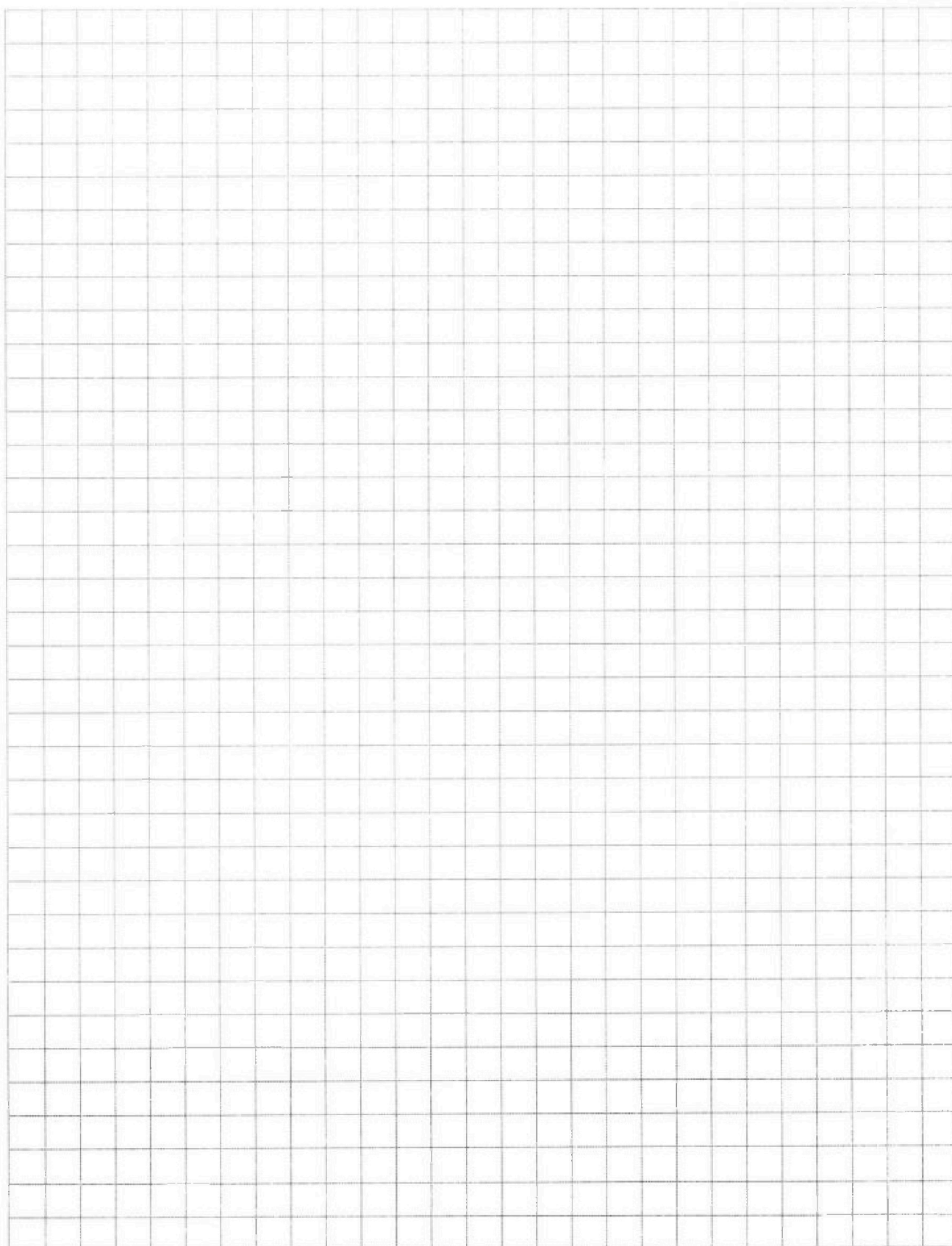


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$a - b + 5 = 2ab \rightarrow a = \frac{5-b}{2b-1}$$

$$x+3 = \frac{25-4+x-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{4-x}}{4(4-x) - 4\sqrt{4-x} + 1} = \frac{21+x-10\sqrt{4-x}}{16-4x-4\sqrt{4-x}+1}$$

$$x^2(2x-1)^2 = 22^2 + x + 3 + 44\sqrt{x+3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p=3 \Rightarrow \begin{cases} a-c=p^2 & (1) \\ b-c=1 & (1) \end{cases} \quad \begin{cases} a=g+c \\ b=1+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow g+c+c^2+2c+1=560$$

$$c^2+3c-559=0$$

$$(2) \quad a=c-1 \quad 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 \quad 5 \cdot 11 \cdot 10 \quad 22; 25$$

$$b=c-9 \quad 10 \cdot 55$$

$$(c-22)(c+25)=0$$

$$\Rightarrow c-1+c^2-18c+81=560$$

$$\begin{cases} c=22 \Rightarrow a=31; b=23 \\ c=-25 \Rightarrow a=-16; b=-24 \end{cases}$$

$$c^2-17c-480=0 \quad 4b^2+6b^2$$

$$16 \cdot 3 \cdot 10 = 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 32; 15$$

$$(c-32)(c+15)=0 \quad \begin{cases} c=32 \Rightarrow a=31; b=23 \\ c=-15 \Rightarrow a=-16; b=-24 \end{cases}$$

Ответ:  $(31; 23; 22); (-16; -24; -25)$ .

$$a-b+5=2ab \Rightarrow 7 \quad x \in \{-3; 4\}$$

$$a = \frac{b-5}{1/b} = \frac{b-5}{1/b}$$

$$a^2 + b^2 - 6a + 5 = 2a + 6b \quad a^2 + b^2 = 2a + 6b$$

$$\sqrt{x+3} + 5 = \sqrt{4-x} \quad \frac{12+x-x^2}{2\sqrt{x+3}+11} \quad 12 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 12\frac{1}{4} = \frac{49}{4}$$

$$x+3+5+10\sqrt{x+3} = (4-x)(4x+13 + \sqrt{4x+3} + 11)$$

$$x+8+10\sqrt{x+3} = 10x + 48 + 152 + 16\sqrt{x+3} - 10x^2$$

$$4x^2 + 13x = 15x + 44 + 2\sqrt{x+3}$$

$$4x^2$$

$$4x^2 - 2x = 22 + \sqrt{x+3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.  $b_1$ -первый; 9-значная

$$9^6 b_1 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}; \quad 9^{12} b_1 = 5-x; \quad 9^{14} b_1 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$x = -1 \quad 9^6 b_1 = \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 9^{14} b_1 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 9^8 = (x+1)^2 \quad 9^4 = |x+1|, \Rightarrow b_1 = \frac{5-x}{|(x+1)|^3}$$

$$9^{20} \cdot b_1^2 = |x+1|^5 \cdot \frac{(5-x)^2}{|(x+1)|^6} = (13x-35) \cdot \frac{1}{|x+1|}$$

~~$$(13x-35) \cdot |x+1| = (5-x)^2$$~~

$$\frac{(5-x)^2}{|x+1|} = \frac{13x-35}{|x+1|}, \quad x \neq -1, \Rightarrow (5-x)^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

№2.  $\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2-z}$

$$x^2 - 23x + 20 = 0$$

$$x = 3; 20$$

Но  $x \neq 20$  по  $9^{12} b_1 \geq 0$

$$x+3 \geq 0 \quad \boxed{x \geq -3}$$

$$4 \geq x+2 \quad \begin{cases} -3 \leq x \\ 2 \leq 4-x \end{cases} +$$

$$\boxed{2 \leq x}$$

$$\begin{cases} y+x-x^2+z \geq 0 \\ 7 \geq z \end{cases} +$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 3 \geq -x \\ 4 \geq 1-x \end{cases}$$

$$x-x^2 \geq -7 \Rightarrow \begin{cases} y+x-x^2 \geq -7 \\ \frac{1}{4} \geq x-x^2 \end{cases} +$$

$$x-x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{y \geq -7\frac{1}{4}}$$

ВОО

$$|y+1| + 3|y-12|$$

$$\begin{aligned} -x-1-3|y+36| \\ -4y+35 \end{aligned}$$

При  $y \in [\frac{29}{4}; -1]$   
 $f(y) \in [39; 64]$

$$-1 + -12 + +$$

$$|y+1-3y+36|$$

$$|y+1+3y-36|$$

$$37-2y$$

$$4y-35$$

$$f(y) \in [13; 39)$$

$$f(y) \in [13; +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } \sqrt{13-2} \leq 13, \text{ то } a \text{ } f(y) \geq 13$$

$$\text{то } x=0; y=12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

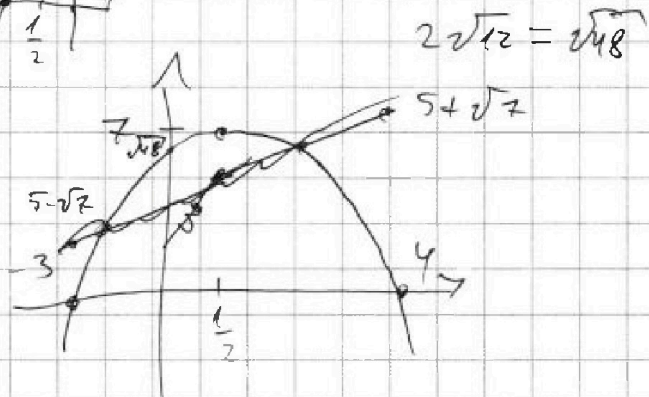
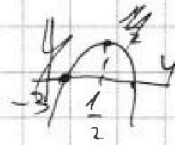
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} x+3 + 4-x+5 + 2 \cdot 5\sqrt{x+3} &= 2 \cdot 5\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} \\ = 4(x+3)(4-x), &\Rightarrow 12 + 10a = 10b - 2ab = 4a^2b^2, \end{aligned}$$

$$x \in [-4; 3] \cup [5-3; 4]$$



$$x = -3: 5 - \sqrt{7}$$

$$x = 4: 5 + \sqrt{7}$$

2 корня есть.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$\begin{aligned} t &= x+3.5 \\ x &= t-3.5 \\ \Rightarrow \sqrt{t-0.5} - \sqrt{0.5-t} + 5 &= 2\sqrt{(0.5-t)(t-0.5)} \end{aligned}$$

$$x - 3.5 = t, \Rightarrow x = t + 3.5$$

$$\sqrt{t+3.5} - \sqrt{3.5-t} + 5 = 2\sqrt{-(t-3.5)(t+3.5)} = 2\sqrt{\frac{49}{4} - t^2}$$

$$x+3 + 4-x+25 + 10\sqrt{x+3} - 10\sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+3)(x-4)} = 4(x+3)(4-x)$$

$$8\sqrt{x+3} - 12\sqrt{4-x} + 27 = 4(x+3)(4-x)$$

$$\begin{cases} 8a - 12b + 27 = 4a^2b^2 \\ a - b + 5 = 2ab \end{cases}$$

$$-4b - 13 = 4a^2b^2 - 16ab$$

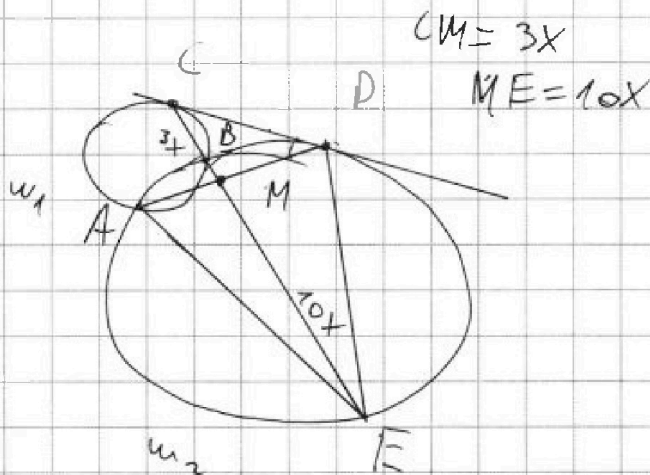
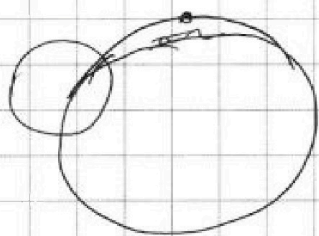


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№5. Формула Виллисона

$$(A \cup B \cup C) = A + B + C - (A \cap B) - (B \cap C) - (A \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

$A = B = C = C_{25000}^4$        $A$  - центр  $B, C$  - сред. линии.

$A \cap B \cap C$  - одна точка в вершине  $\Delta$  и прямоутольного треугольника  
 соответствующая точка окружности  $A \cap B \cap C = C_{12500}^2$

$A \cap B$ : 

$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$

 $C_{12500}^2 = A \cap B = B \cap C$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$A \cap B = A \cap B \cap C = B \cap C = A \cap C$

Ответ:  $3C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

№3  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ;  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$\Rightarrow 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p = f(t)$

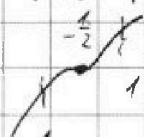
$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$

$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$

$4t^2 + 4t + 1 = 0 \quad (2t+1)^2 = 0$

$t = -\frac{1}{2}$



Всегда одно решение

экстремум

$p \in [-4; 10]$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} + 5 = \sqrt{4-x} (2\sqrt{x+3} + 1)$$

$$x+8 + 10\sqrt{x+3} = (4-x)(4x+12+1 + 4\sqrt{x+3}) =$$

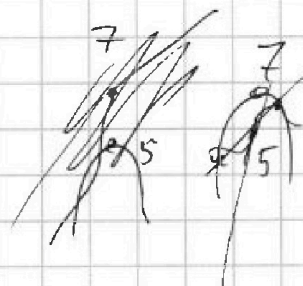
$$= 16x+52 + 16\sqrt{x+3} - (4x^2 + 13x + 4\sqrt{x+3} \cdot x)$$

$$4x^2 + 13x + 4\sqrt{x+3} \cdot x = 15x + 44 + 6\sqrt{x+3}$$

$$a-b+5=2ab$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} - (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right) = 0$$

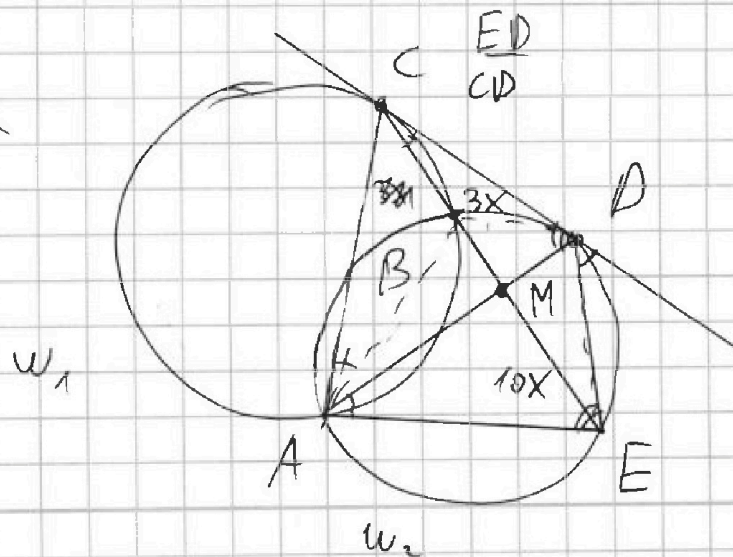
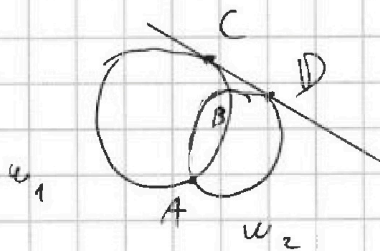


$$\sqrt{x+3} = -\sqrt{4-x}$$

$$\Rightarrow 4-x=0$$

$$x=3 < 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. (Продолжение). При  $x < \frac{35}{13}$ :

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x, \quad x^2 + 3x - 10 = 0. \quad \text{По т. Виета}$$

$x_{1,2} = 2; -5$ . Заметим, что  $b_1 > 0$  та  $b_{21} = -10$ .

$$b_{15} = \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}, \quad \text{то } (13x - 35)(x + 1) \geq 0 \\ \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow x = 2$  - не подходит,  $\Rightarrow$  единств. подходящее  $x = -5$

Ответ:  $x = -5; 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{1-x-0} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2+0} \quad x^2-x-12=$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \stackrel{?}{=} 7 \quad = (x-4)(x+3)$$

$$x \geq 3; \quad x \leq 4$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+3)}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

№3.  $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$

$$= 2\cos^2 x - 1 - 2\sin x \cos x = 2\cos^2 x - 1 - \sin 2x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x) \cdot \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$$

$$4\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

№6.  $t = \cos x$

$$\Rightarrow 4t^3 - 3t + 3(2t^2 - 1) + 6t = p,$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t + 3 = p$$

$$3t^3 + 3t^2 + t^3 + 3t^2 + 3t + 3 = p - 2$$

$$3t^2(t+1) + (t+1)^3 = p-2, \quad (t+1)(t^2+2t+1+3t^2) = p-2$$

$$(t+1)(4t^2+2t+1) = p-2$$

№6.  $a > b$

$$a-b \neq 0 \pmod{3}$$

$$(a-c); (b-c) = p^2. \Rightarrow \text{либо } \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} b-c = -p^2 \\ a-c = -1 \end{cases}$$

либо  $a-c \neq b-c$ , т.к.  $a > b$   $a-b = p^2 - 1$   $b-a = -p^2 + 1$

$$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

если  $p \neq 3k$ , то  $p-1$  или  $p+1 \equiv 3$

$$\Rightarrow p = 3$$