



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть геом прогрессия $\{a_i\}_{i \geq 0}$ такова, что $a_i = b \cdot q^i$, $b \neq 0$, $q \neq 1$.

По условию,

$$\begin{cases} a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b \cdot q^7 \\ a_{13} = 5-x = b \cdot q^{13} \\ a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b \cdot q^{15} \end{cases}$$

Имеем $\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 = q^8 \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$

Имеем $\frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x} = \frac{\sqrt{|13x-35|} \sqrt{x+1}}{5-x} = q^2 = \sqrt{|x+1|}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{|13x-35|}}{5-x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 13x-35 = (x-5)^2 & (1) \\ 13x-35 > 0, x+1 > 0 & \\ 35-13x = (x-5)^2 & (2) \\ \cancel{13x-35 < 0, x+1 < 0} & \\ x < 5 & \end{cases}$

(1): $13x-35 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0$

$\begin{cases} x=3 \\ x=20 \end{cases} \begin{cases} 13x-35 > 0; \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow x=3$

При $x=3$ $a_i = \frac{\sqrt{2}}{64} \cdot (\sqrt{2})^i = (\sqrt{2})^{i-11}$ $\log x \log q$
 $a_7 = \sqrt{\frac{4}{43}} = \frac{1}{4}$ $(a_7 = \sqrt{2}^{-4} = \frac{1}{4})$
 $a_{13} = 2$ $(a_{13} = \sqrt{2}^2 = 2)$
 $a_{15} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ $(a_{15} = \sqrt{2}^4 = 4)$

(2): $35-13x = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
 $x = -5$: $\begin{cases} a_7 = \sqrt{\frac{100}{24}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \\ a_{13} = 10 \\ a_{15} = 20 \end{cases} \log x \begin{cases} x < 5 \\ 13x-35 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \log q \cdot x = -5$

Ответ: $x \in \{-5; 3\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 - 7t + 9 = 0 \quad t = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$0 < \frac{7 - \sqrt{13}}{2} < \frac{7 + \sqrt{13}}{2} < 7 \quad - \text{OK.}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$2) \sqrt{t} = \sqrt{7-t} - 2, \quad t = 7-t - 4\sqrt{7-t} + 4$$

$$4\sqrt{7-t} = 11 - 2t$$

$$16(7-t) = (11-2t)^2$$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0 \quad t = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$0 < \frac{7}{2} - \sqrt{10} < \frac{7}{2} + \sqrt{10} < 7 \quad - \text{OK.}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \sqrt{10} \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 12, 0\right), \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 12, 0\right),$$

$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{10}, 12, 0\right), \left(\frac{1}{2} + \sqrt{10}, 12, 0\right).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} & (2) \end{cases}$$

Имеем $|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \leq 13$.

1) $y > 12$; $|y+1| + 3|y-12| \geq |y+1| = y+1 > 13$ — не ОК

2) $-1 \leq y \leq 12$; $3|y+1| + 3|y-12| = y+1 + 3(12-y) = 37-2y \geq$

$37 - 2 \cdot 12 = 13 \Rightarrow$ равенство только при $y=12$.

3) $y < -1$; $3|y+1| + 3|y-12| \geq 3|y-12| \geq 3 \cdot 13 > 13$ — не ОК.

Итак, второе ⁽²⁾ равенство выполн. $\Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ z=0 \end{cases}$

Подставим это в первое равенство:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} = 2\sqrt{(x+3)(4-x)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$. $x+3=t$, $0 \leq t \leq 7$.

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + (\sqrt{t})^2 + (\sqrt{7-t})^2 - 2 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + (\sqrt{t} - \sqrt{7-t})^2 = 2$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = -2 \quad (2)$$

1) $\sqrt{t} = \sqrt{7-t} + 1$, $t = 7-t + 1 + 2\sqrt{7-t} \Leftrightarrow t-4 = \sqrt{7-t}$

$$(t-4)^2 = \sqrt{7-t}^2$$

$$\begin{cases} t^2 - 8t + 16 = 7-t \\ 0 \leq t \leq 7 \end{cases} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x &= \\ &= (4t^3 - 3t) + 3(2t^2 - 1) + 6t \\ &= 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \end{aligned}$$

Итак, мы исследуем ур-ние $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$ при $-1 \leq t \leq 1$.

Заметим, что $f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$
монотонно
f ~~возрастает~~ возрастает на всей вещ. оси (т.к. производная ~~не меньше~~ ≥ 0).

Поэтому она принимает все значения от $f(-1)$ до $f(1)$ при $-1 \leq t \leq 1$ (из непрерывности) ровно по одному разу. Итак, подойдут знач. $-4 \leq p \leq 10$.

$$f(-1) = -4$$

$$f(1) = 10$$

Заметим, что ~~$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$~~

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot (2t+1)^3 - \frac{7}{2}$$

Поэтому $f(t) = p \Leftrightarrow (2t+1)^3 = 2p+7 \Leftrightarrow$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}. \text{ Осталось решить ур-ние } \cos x = t:$$

$$x = \arccos(t) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -4 \leq p \leq 10, x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть A, B, C - ми-ва конф. в клетках, обладающих первым, вторым и третьим свойством соотв. (симм. от. центра, от. ср. линии // 250, от. ср. линии // 200).

Мы хотим найти $|A \cup B \cup C|$.

По ф-ле включения-исключения,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Обозначим для краткости $250 = n$, $200 = m$

Посчитаем каждое слагаемое по-отдельности

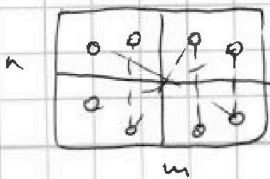
1) $|A| = \cancel{\frac{m \cdot n}{2}} \cdot C_{\frac{mn}{2}}^4$ (т.к. достаточно

выбрать из нижней половины пр-ка 4 разных кл. и симм. отразить их от центра)

2) $|B| = C_{\frac{mn}{2}}^4$ - выбираем из нижней половины 4 разных клетки и отр. их от. ср. линии

3) $|C| = C_{\frac{mn}{2}}^4$ - выбираем из левой половины 4 разных кл. и отр. их от. ср. линии

4) $|A \cap B| = C_{\frac{mn}{4}}^2$. Из 8 клеток берется на 2 пр-ка с центром в центре пр-ка $m \times n$,



ровно 2 разл. ~~клетки~~ клетки лежат в левом и правом пр-ке, ост. получаются симметрией



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(a-c) \cdot (b-c) = p^2$ (p - простое).

Заметим, что $a-c > b-c$, поэтому

$$\begin{cases} a-c = p^2 & (1) \\ b-c = 1 \end{cases} \quad (\text{т.к. } p^2 \text{ имеет делители } \pm 1, \pm p, \pm p^2, \text{ и } a-c \neq \pm p, \\ \text{иначе } b-c = \pm p \text{ и } a=b)$$

Отметим, что в обоих случаях

$$a-b = (a-c) - (b-c) = p^2 - 1.$$

По условию, $a-b = p^2 - 1$ не кратно 3.

Но это означает, что $p \equiv 0 \pmod{3}$ (т.к. $1^2 \equiv 1 \pmod{3}$ и $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$)

$$\Rightarrow p = 3.$$

Итак, имеем

~~$$\begin{cases} a-c = a \\ b-c = 1 \\ a-c = \end{cases}$$~~

$$a-b = p^2 - 1 = 8$$

$$\begin{cases} 1) c = b - 1 \\ 2) c = b + 9 \end{cases}$$

По условию, $a + b^2 = 560 \Leftrightarrow b + 8 + b^2 = 560$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 23, a = 31 \\ b = -24, a = -16 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} a = 31, b = 23, c = 22 \\ a = -16, b = -24, c = -25 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a = 31, b = 23, c = 32 \\ a = -16, b = -24, c = -15 \end{cases}$$

Ответ: $(31, 23, 22), (-16, -24, -25), (31, 23, 32), (-16, -24, -15)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{BC, B_1} = BC \cdot \text{dist}(B_1, BC) = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1 - x - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 + h^2} = 4.$$

Итак, найдем систему

$$\begin{cases} y^2 + h^2 = 16 & (1) \\ \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - y\right)^2 + h^2 = 9 & (2) \\ \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 + h^2 = 16 & (3) \end{cases}$$

$$(3) - (2): \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y\right)^2 - \left(\sqrt{3}\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - y\right)^2 = 7$$

$$\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1\right) - y + \sqrt{3}\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4}\right) - y\right) = 7$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 = 7$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4, \quad x = \frac{8 + \sqrt{3}y}{3}$$

$$(2) - (1): \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - y\right)^2 - y^2 = -7$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}y - 3 \cdot \frac{8 + \sqrt{3}y}{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} \cdot \frac{8 + \sqrt{3}y}{3} - y}{4}\right)^2 - y^2 = -7$$

$$2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - y^2 = -7$$

$$h^2 = 16 - y^2 = 16 - \left(2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 7\right) =$$

$$16 - 4 - \frac{4}{3} - 7 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}, \quad h = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

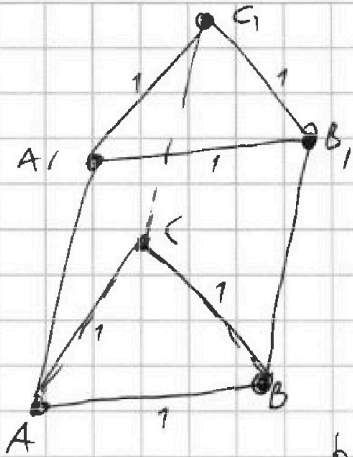
$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{11}{3}}.$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $A_1B_1C_1A_1B_1C_1$ — исходная призма

$$\text{БОО } S_{ABB_1A_1} = S_{BCC_1B_1} = 4,$$

$$S_{ACC_1A_1} = 3.$$

Пусть h — высота призмы.

Введём декартову СК с центром A ,

$Ox = AB$, $Oz \perp (ABC)$, $Oy \in (ABC)$ и $\perp AB$.

Имеем

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \text{ на прямой}$$

$$\vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{CC_1} = (x, y, h) \Rightarrow$$

$$A_1(x, y, h), B_1(x+1, y, h), C_1\left(\frac{1}{2}+x, \frac{\sqrt{3}}{2}+y, h\right).$$

$$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot \text{dist}(A_1, AB) = 1 \cdot \sqrt{y^2 + h^2} = 4$$

$$S_{ACC_1A_1} = AC \cdot \text{dist}(A_1, AC) = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - x\right)^2 + \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{4} - y\right)^2 + h^2} = 3$$

A_1P — высота на AC

$$P(a, \sqrt{3}a, 0)$$

$O \parallel$

$$\langle AC, A_1P \rangle =$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (a-x, \sqrt{3}a-y, 0) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}(a-x + \sqrt{3}(\sqrt{3}a-y)) =$$

$$= \frac{1}{2}(4a-x-\sqrt{3}y)$$

$$a = \frac{x+\sqrt{3}y}{4}$$

B_1Q — высота на BC

$$Q(b, \sqrt{3}-\sqrt{3}b, 0)$$

$$O \perp \langle A_1B_1, B_1Q \rangle =$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (b-x-1, \sqrt{3}-\sqrt{3}b-y, 0) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}((b-x-1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{3}b-y))$$

$$= \frac{1}{2}(4b-x-\sqrt{3}y-4)$$

$$b = \frac{x+\sqrt{3}y}{4} + 1$$